Azim Premji University

A publication of Azim Premji University
together with Community Mathematics Centre,
Rishi Valley

शिक्षण ज्यामिति भाग-दो

पद्मप्रिया शिराली

प्राथमिक स्तर

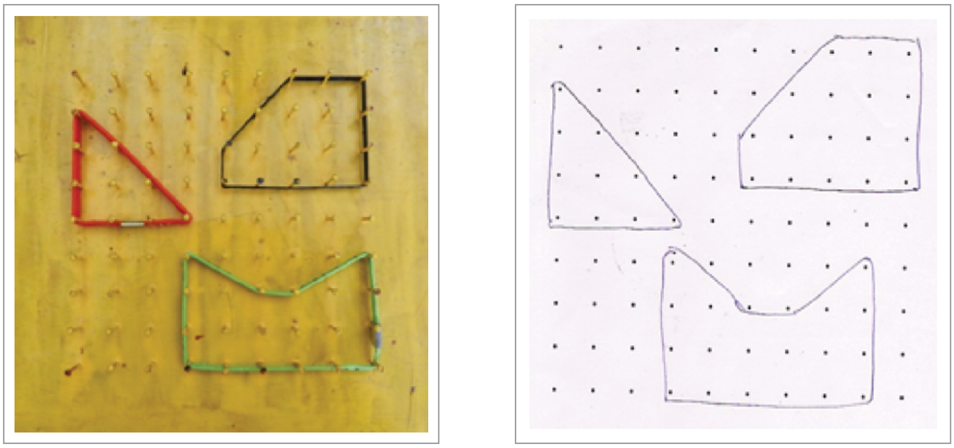
At Right Angles
A Resource for School Mathematics

(ज्यामिति शिक्षण भाग–एक से आगे......)

ज्यामिति शिक्षण यदि सही तरीके से किया जाए तो कई मायनों में इसमें देखने व अवलोकन करने की कला सीखने की बहुत ज्यादा सम्भावना होती है। यदि आप केवल एक सादे चौकोर कागज को अलग–अलग तरीकों से मोड़कर खेल करते हैं या बिन्दुओं वाले एक कागज पर दिए बिन्दुओं को जोड़ना शुरू करते हैं तो भी आप ऐसा करने से उभरती विभिन्न आकृतियों को देखना शुरू करते हैं। व्यक्तिगत तौर पर मैंने हमेशा यह देखा है कि ऐसा करना काफी मजेदार और समृद्ध अनुभव होता है क्योंकि हर वह विद्यार्थी जिससे मैं मिली हूँ वह आकृतियों को अपने एक अलग ही तरीके से देखता और नोटिस करता है। ऐसा लगता है कि इसमें देखने की कला सीखने, अवलोकन कौशल को बढ़ाने और अपनी रचनात्मकता को सामने लाने की बहुत गुंजाइश है। गणित के सभी विषयों में केवल ज्यामिति शिक्षण में ही एक शिक्षक आकृतियों के गुणों को खोजने, आकृतियों को संचालित करने, उन्हें घुमाने, खिसकाने पर वह किस तरह का व्यवहार करती हैं, जिस तरह से उन्हें विभाजित किया जा सकता है और फिर उन्हें जोड़कर नई आकृतियाँ बनाई जा सकती हैं आदि को जानने–समझने के लिए उच्च स्तर पर प्रायोगिक पद्धति का इस्तेमाल कर सकते हैं। वास्तव में एक बार जब शिक्षक कोई गतिविधि करवाना शुरू करते हैं तो बिना समय लिए बच्चे उसमें थोड़ा बहुत फेर–बदल करके अपनी खुद की गतिविधियाँ विकसित कर लेते हैं और अपनी खोज करना शुरू कर देते हैं। एक शिक्षक के लिए भला इससे बड़ा क्या इनाम हो सकता है।

कक्षा दो

जब बच्चे ऊपर की कक्षाओं में पहुँच जाएँ तो भी आप पहली की कक्षाओं में इस्तेमाल की गई सामग्री (आकृतियाँ, जियो–बोर्ड्स, नलियाँ, बिन्दुओं वाले कागज, कागज की प्लेटें, टैनग्राम सेट्स) का इस्तेमाल जारी रख सकते हैं लेकिन हर गतिविधि में आपको उनकी चुनौती का स्तर बढ़ाना होगा।



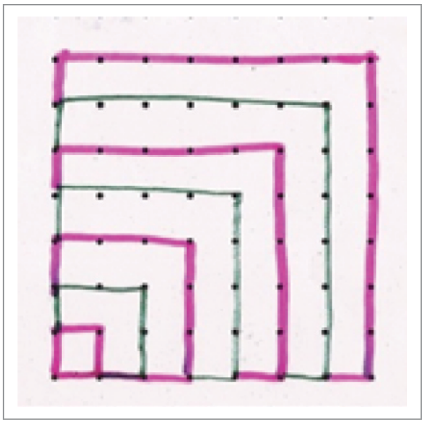
चित्र 1

जियो–बोर्ड

उदाहरण के लिए : जियो–बोर्ड का इस्तेमाल करने वाली गतिविधियों में शिक्षक बच्चों से बिन्दुओं वाले कागज पर उन आकृतियों का रिकॉर्ड रखने को कह सकते हैं जो उन्होंने जियो–बोर्ड पर बनाई हैं। यह काफी सरल लगता है लेकिन कई बच्चों के लिए ऐसा करना काफी मुश्किल होता है। उन्हें जियो–बोर्ड पर अपनी बनाई आकृति के अनुकूल बिन्दुओं की कल्पना बिन्दुओं वाले कागज में करना होता है। इसके लिए उन्हें आकृति की माप और उसके अनुस्थापन, खड़े में आकृति में शामिल कीलें, आड़े में आकृति में शामिल कीलें, भुजाओं का सीधापन आदि की समझ होना जरूरी है। यह नक्शा बनाने की समझ के लिए जरूरी होता है जो काफी बाद में आती है।

बिन्दुओं वाले कागज पर पैटर्न बनाना

शिक्षक अब जियो–बोर्ड पर की गई गतिविधियों के साथ–साथ बिन्दुओं वाले कागज की भी कई सारी गतिविधियाँ करवा सकते हैं।



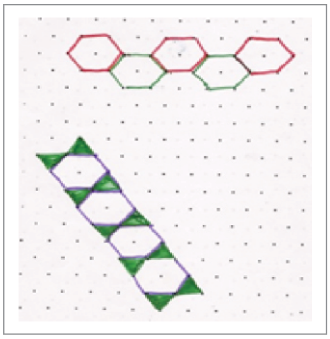
चित्र 2

आकृतियों के पैटर्न बनाने के लिए वे चौकोर बिन्दुओं वाले कागज इस्तेमाल कर सकते हैं। वे अलग–अलग रंगों से समान आकार के वर्गों का क्रम, बारी–बारी से वर्गों और आयतों के क्रम या वर्गों और त्रिभुजों के क्रम, बढ़ते आकार के वर्गों के क्रम (एक ही केन्द्र वाले या एक ही कोने से शुरू करके) इत्यादि बना सकते हैं (चित्र 2)।

वे ज्यादा जटिल पैटर्न जैसे वर्गों के चारों ओर त्रिभुजों की बार्डर बनाने की भी कोशिश कर सकते हैं।

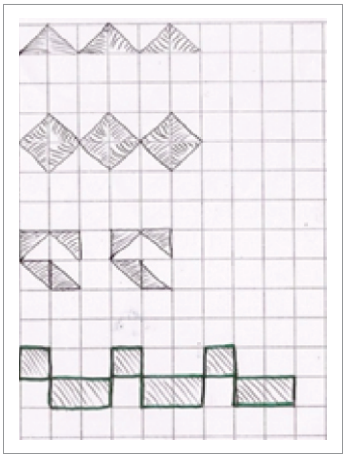
वे वृत्त या बन्द संरचना वाले अन्य पैटर्न बना सकते हैं और वे ऐसे पैटर्न भी बना सकते हैं जिनका विस्तार असीमित हो।

इन पैटर्नों को बनाने की प्रक्रिया में वे सममिति, समानता, विभिन्न आकृतियों को बिना किसी अन्तराल के एक साथ जमाना आदि के अपने सहज ज्ञान का इस्तेमाल करते हैं।



चित्र 3

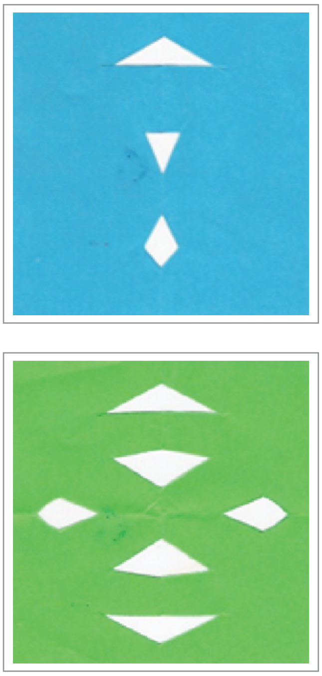
इसी तरह त्रिभुजों और षट्कोणों का इस्तेमाल कर अलग–अलग पैटर्न बनाने के लिए तिकोन बिन्दुओं वाले कागज इस्तेमाल किए जा सकते हैं। (चित्र 3)



चित्र 4

शिक्षक बच्चों को छायांकित वर्गों के कुछ पैटर्न देकर उनकी नकल करने को कह सकते हैं (चित्र 4)। इसके लिए भी उन्हें छोटी–छोटी जगहों को ध्यानपूर्वक देखने व स्थानिक समझ बनाने की जरूरत होती है।

कागज मोड़ना और सममिति

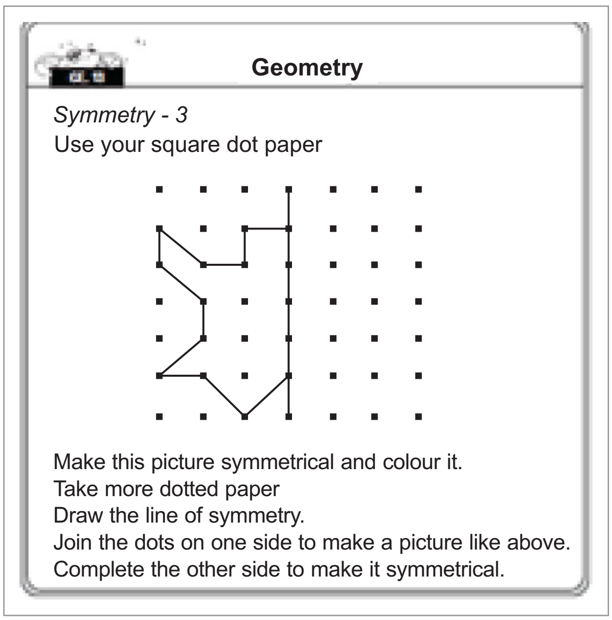


चित्र 5

सममितीय आकृतियाँ बनाने के लिए उन्हें कागज को मोड़ने व काटने (पेपर फोल्डिंग और कटिंग) की गतिविधियाँ करने को कहें (चित्र 5)।

शुरुआत में वे केवल एक बार मोड़े हुए कागजों को काटकर जाँचें और ऐसा करने से जो आकृतियाँ उभरती हैं उन्हें देखें। बाद में वे आड़े व खड़े दो मोड़ बना सकते हैं और ऐसा करने से बनी आकृतियों का अवलोकन कर सकते हैं।

प्रयोगों के जरिए उन्हें काटने के अलग–अलग तरह के तरीके और इनसे बनने वाली आकृतियों को खोजने को कहें।



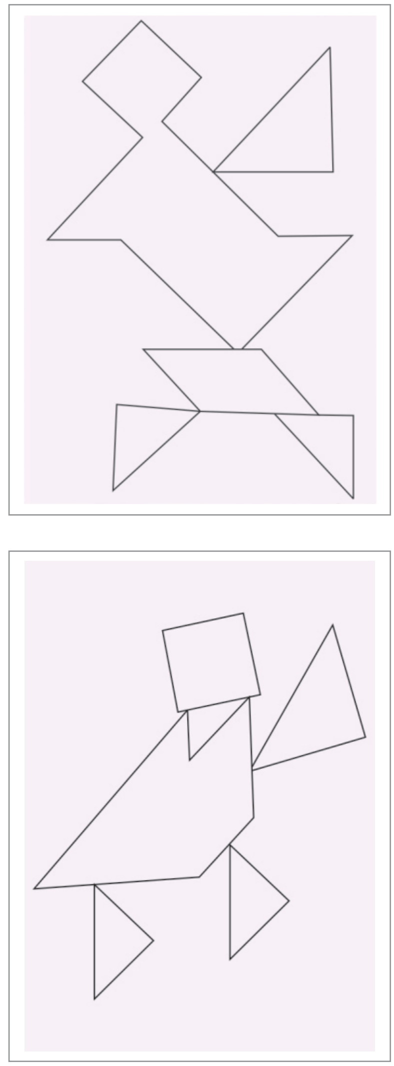
चित्र 6

आधे–अधूरे डिजाइन बनाकर सममिति की खोज करना जारी रखें। इन डिजाइनों को उन्हें बिन्दुओं वाले कागज पर उतारने और इनके दूसरे भाग को पूरा करने को कहें (चित्र 6)।

तरह–तरह के आसान–से रंगोली पैटर्न भी बनाए व सिखाए जा सकते हैं।

मुड़े हुए कागज पर स्याही या पेंट के डिजाइन बनाकर भी वे अपनी सममिति की खोज जारी रख सकते हैं।

टैनग्राम्स



चित्र 7

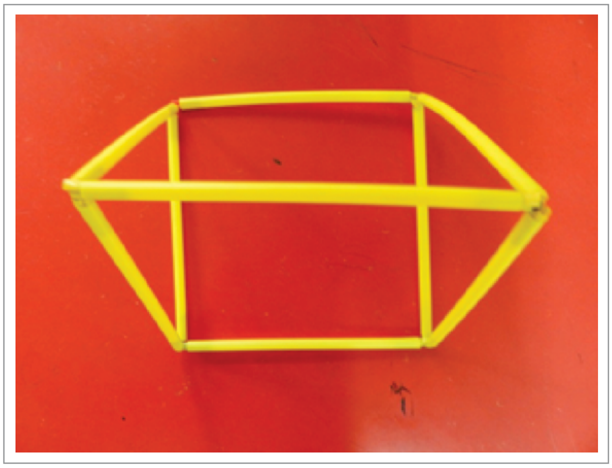
उन्हें कुछ डिजाइन दिखाएँ (आसान–से डिजाइन चुनें जैसा कि चित्र 7 में दिखाया गया है) और उनसे इन डिजाइनों को बनाने को कहें। शुरुआत में उन्हें डिजाइन के साथ–साथ एक बड़े चार्ट पेपर में आकृति का खाका (outline) बनाकर दें ताकि बच्चे टैनग्राम के टुकड़ों को उस खाके पर जमाकर देख सकें। बच्चे अकसर इन्हें अपने सहज ज्ञान से हल करते हैं। दिए गए डिजाइन को बनाने में इस्तेमाल होने वाले टुकड़ों को तार्किक तरीके से ढूँढ़ने के लिए उन्हें डिजाइन के कोने, रेखाओं के घुमाव, आकृति की माप आदि को ध्यानपूर्वक देखने की जरूरत होगी।

कक्षा तीन

त्रिविमीय आकृतियाँ (3-D Structures)

कितनी समान? कितनी अलग? कक्षा में दिखाई देने वाली त्रिविमीय आकृतियों पर चर्चा करें। कुछ आकृतियाँ नियमित त्रिविमीय आकृतियाँ होती हैं जैसे : घनाभ, गोला आदि। पर हमारे द्वारा इस्तेमाल की जाने वाली कुछ आकृतियाँ काफी हद तक घनाभ व बेलन के समान लगती हैं लेकिन असल में घनाभ या बेलन नहीं होतीं। उदाहरण : पानी की बोतल अक्सर पूरी तरह बेलनाकार नहीं होती बल्कि वह खुलने वाले सिरे पर संकरी होती जाती है।

चर्चा करें : "किन मायनों में यह एक बेलन से अलग है?" एक टिफिन बॉक्स की आकृति लगभग एक घनाभ जैसी लग सकती है लेकिन वह असल में पूरी तरह घनाभ नहीं हो सकती। इसी तरह एक कम्पास बॉक्स आमतौर पर किनारों पर घुमावदार होता है। हमें यह देखने की जरूरत है कि इस गतिविधि को करते हुए बच्चे बारीकी से अवलोकन करें और समानताओं व विभिन्नताओं दोनों की परस्पर तुलना करें।

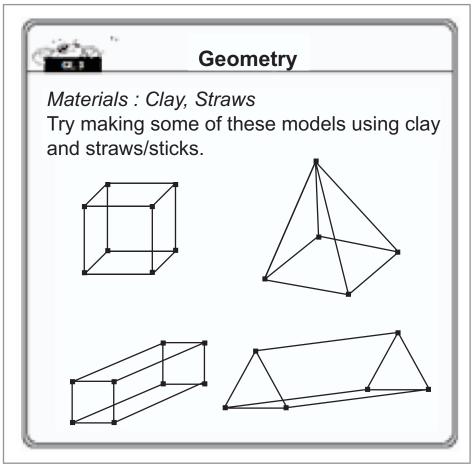


चित्र 9

त्रिविमीय आकृतियों के ढाँचेनुमा नमूने बनाना

ढाँचेनुमा नमूने बनाने के लिए पेय पीने वाली मजबूत नलियाँ या कागज की नलियाँ इस्तेमाल की जा सकती हैं (चित्र 9)। कागज की छोटी–छोटी शीट्स को कसकर मोड़कर बच्चों को कागज की नलियाँ बनाना सिखाया जा सकता है। यह बहुत–सी गतिविधियों के लिए बढ़िया सामग्री होती है।

बच्चे इन नलियों को रबर ट्यूब के जोड़ने वाले टुकड़ों से जोड़कर घन, घनाभ, प्रिज्म, पिरामिड आदि बना सकते हैं।



चित्र 10

उनसे पूछें : 'यह आकृतियाँ ठोस घन या घनाभ से किन मायनों में अलग हैं?' आसान–सी शब्दावली जैसे फलकें, किनारे, कोने, सीधी रेखाएँ, तिरछी रेखाएँ आदि से उनका परिचय कराएँ। (चित्र 10 देखें।)

उनसे पूछें :

'यह दो फलकें कहाँ मिलती हैं?'

'यह तीनों फलकें कहाँ मिलती हैं?'

'क्या तुम ऐसी कोई दो फलकें बता सकते हो जो मिलती न हों?'

'इस फलक के सामने की फलक कौन–सी है?'

'किस ठोस आकृति में सबसे ज्यादा किनारे होते हैं?'

'किस ठोस आकृति में बराबर लम्बाई के किनारे होते हैं?'

'किस ठोस आकृति में अलग–अलग लम्बाई के किनारे होते हैं?'

'किस ठोस आकृति में केवल चौकोर फलकें होती हैं?'

'किस ठोस आकृति में आयताकार फलकें होती हैं?'

दो फलकों के मिलने के बारे में सवाल पूछें। उदाहरण के लिए चतुष्फलक की स्थिति में पूछें :

'तुम्हें इसमें कितने V आकृति के जोड़ दिखाई देते हैं?'

'कितने L आकृति के जोड़ दिखाई देते हैं?'

'क्या तुम्हें इसमें कोई और जोड़ भी दिखाई देते हैं?'

उन्हें घन और घनाभ जैसी आकृतियों की प्रिज्म और पिरामिड जैसी आकृतियों से तुलना करने को कहें। (आकृतियों के नाम बताना जरूरी नहीं हैं।)

द्विविमीय आकृतियों से त्रिविमीय आकृतियाँ बनाना (Buliding 3-D shapes from 2-D shapes)

उनसे कहें कि वे लकड़ी के कई सारे तिकोने टुकड़ों का क्रमबद्ध ढेर बनाएँ और देखें कि इस तरह वे कौन–कौन–सी ठोस आकृतियाँ बना सकते हैं (जैसे कि प्रिज्म)।

फिर उन्हें कहें कि वे लकड़ी के कई सारे आयताकार टुकड़ों का क्रमबद्ध ढेर बनाएँ और देखें कि ऐसा करके वे कौन–कौन सी आकृतियाँ बना सकते हैं (जैसे कि घनाभ)।

इसी तरह उन्हें कहें कि लकड़ी के कई सारे चौकोर टुकड़ों का एक क्रमबद्ध ढेर बनाएँ और देखें कि इस तरह कौन–सी आकृतियाँ बनाई जा सकती हैं (उदाहरण के लिए घन या घनाभ)।

बच्चों को पुरानी पत्रिकाओं के चिकने कागज दें। उनसे पूछें : 'क्या तुम इससे एक बेलनाकार आकृति बना सकते हो?' यदि वे कागज को मोड़कर किनारों को एक साथ चिपका देते हैं तो वह एक खोखला बेलन बन जाता है। उन्हें अलग–अलग व्यास के कई खोखले बेलन बनाने को कहें।

कागज मोड़ना

गतिविधि को उन्हें अपने तरीके से करने दें। जितना ज्यादा वे कागज के साथ काम करेंगे कागज मोड़ने में उतने ही ज्यादा निपुण होंगे और उसमें सटीकता भी आएगी। उनसे पूछें : 'एक चौकोर कागज को तुम कितने तरीकों से आधा मोड़ सकते हो?' वे एक चौकोर कागज को आड़े में या खड़े में, या तिरछे में आधा मोड़ सकते हैं और उसके किनारों को मिला सकते हैं। कागज मोड़ने के बाद जो भी आकृति बने उन्हें उसका वर्णन करने के लिए कहें। उन्हें एक चौकोर कागज को मोड़ने के अलग–अलग तरीके खोजने को कहें : 'यदि तुम एक कोने को मोड़ दो तो तुम्हें कौन–सी आकृति मिलती है?' 'एक और कोने को मोड़ देने से आकृति में क्या बदलाव आता है?' 'क्या होगा यदि तुम चारों कोनों को मोड़ दो?'

अब यही सारे सवाल एक आयत के बारे में करें। वे आयताकार कागज के साथ भी यही गतिविधियाँ कर सकते हैं और देख सकते हैं कि यदि वे एक आयत के एक कोने को सामने वाले कोने तक मोड़ते हैं तो उसके किनारे एक सीध में नहीं होते जैसा कि चौकोर कागज में होता है। इसके साथ भी वे अलग–अलग कोनों को मोड़ने वाला प्रयोग कर सकते हैं और देख सकते हैं ऐसा करने से कौन–कौन सी आकृतियाँ उभरती हैं।

इसी तरह वे देख सकते हैं कि एक तिकोने कागज को केवल कुछ ही तरीकों से आधा मोड़ा जा सकता है। वे यह भी ध्यान दे सकते हैं कि अलग–अलग तरह के तिकोन कागजों को अलग–अलग तरह से मोड़ा जाता है। बहुत जरूरी है कि यह सब बातें बच्चे खेल और कभी–कभार शिक्षक के दिए सुझावों के जरिए खोजें (जब लगे कि बच्चों को अब कुछ सूझ नहीं रहा है)।

बच्चों को कागज के आयताकार टुकड़ों को मोड़कर नियमित आकृतियाँ बनाने का प्रयास करने को कहें।

टेनग्राम

डिजाइनों को कुछ छोटा करके दिया जा सकता है। हो सकता है कि बच्चे डिजाइन को देखकर आकृतियाँ बना लें (चित्र 11)। शिक्षक ऐसे डिजाइन भी दे सकते हैं जिनमें केवल कुछ ही टुकड़ों का इस्तेमाल हो।

शिक्षक बच्चों को टैनग्राम के टुकड़ों का इस्तेमाल कर अन्य नियमित आकृतियाँ बनाने को कह सकते हैं और इनसे जुड़े सवाल भी पूछ सकते हैं। उनसे पूछें :

चित्र 11

'दो छोटे त्रिभुज लो। क्या तुम इन दोनों त्रिभुजों से एक चौकोर बना सकते हो?'

'क्या तुम इनसे एक और बड़ा त्रिभुज बना सकते हो?'

'क्या तुम इनसे कोई और आकृति बना सकते हो?'

स्थिति और नक्शे

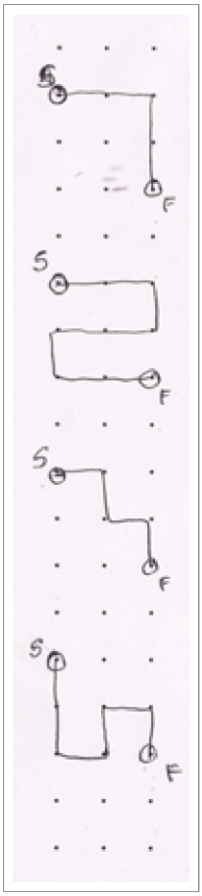
स्थिति के बारे में निर्देश : उपयुक्त शब्दावली जैसे बाएँ, दाएँ, मोड़ आदि से बच्चों का परिचय कराएँ। बच्चों को एक क्रमबद्ध तरीके से निर्देश दें जिसका उन्हें पालन करना हो जैसे उन्हें स्कूल की किसी एक जगह से दूसरी जगह जाने के लिए कहें। आसान–से निर्देशों का इस्तेमाल करें : बाएँ, दाएँ, सीधे, मुड़ो आदि।

उनसे सही स्थितीय भाषा (स्थिति को दर्शाने वाली भाषा) का इस्तेमाल करते हुए अपने चलने की गतिविधि का वर्णन करने को कहें।

ठोस वस्तुओं के साथ आसान नक्शे बनाना

बच्चों से अपनी कक्षा का एक आसान–सा नक्शा बनाने को कहें जिसमें वे आयत, चौकोर और वृत्त का इस्तेमाल करके शिक्षक की मेज, उनकी बैंच, कचरे का डिब्बा या फिर दराज वगैरह दिखाएँ। शिक्षक चीजों के स्थितीय सम्बन्धों के बारे में चर्चा कर सकते हैं, जैसे कौन–सी चीज कौन–सी चीज के दाईं या बाईं ओर है, कौन–सी चीज शिक्षक की मेज के पास है, कौन–सी उससे दूर है आदि।

इसके बाद बच्चों को रास्ते से सम्बन्धित नक्शे बनाने को कहा जा सकता है। वे 3 by 3 की एक जाली (जैसे कि चित्र 12 में दिखाई गई है) S (शुरुआत) बिन्दु से शुरू करके F (समाप्ति) बिन्दु तक पहुँचने के तरीके खोज सकते हैं।



चित्र 12

यदि केवल आड़े/खड़े में ही चलने की अनुमति हो तो S से F तक पहुँचने के कितने तरीके हो सकते हैं? कौन–सा रास्ता सबसे लम्बा होगा? कौन–सा सबसे छोटा होगा?

खेल : आकृतियों की कल्पना करना

एक बच्चा दूसरे बच्चे की पीठ पर अपनी उँगली से किसी भी एक नियमित आकृति जैसे चौकोर, आयत या वृत्त का अनुरेखण (trace) करे और दूसरा बच्चा उस अनुरेखण को महसूस कर, मोड़ों पर ध्यान देकर और भुजाओं को गिनकर उसकी कल्पना करे और आकृति का नाम बताए।

कक्षा चार

इस स्तर पर आप इस हिसाब से गतिविधियाँ करवा सकते हैं कि बच्चे पाँचवें साल में शुरू होने वाली औपचारिक ज्यामिति सीखने के लिए तैयार हो जाएँ। कोण और कोण की माप एक ऐसी ही प्रमुख अवधारणा है जिसमें बच्चों को समस्याएँ होती हैं। शिक्षकों को बहुत सारी ऐसी गतिविधियाँ करवानी चाहिए जिनमें एक चौकोर कागज को पैमाने की तरह इस्तेमाल करके कक्षा में मौजूद विभिन्न चीजों के कोनों की माप लेना शामिल हो। साथ ही मोड़ने वाली (अपनी भुजाओं को मोड़ना या घड़ी की सुइयों को मोड़ना) भी कई सारी गतिविधियाँ करवानी चाहिए।

त्रिविमीय आकृतियाँ

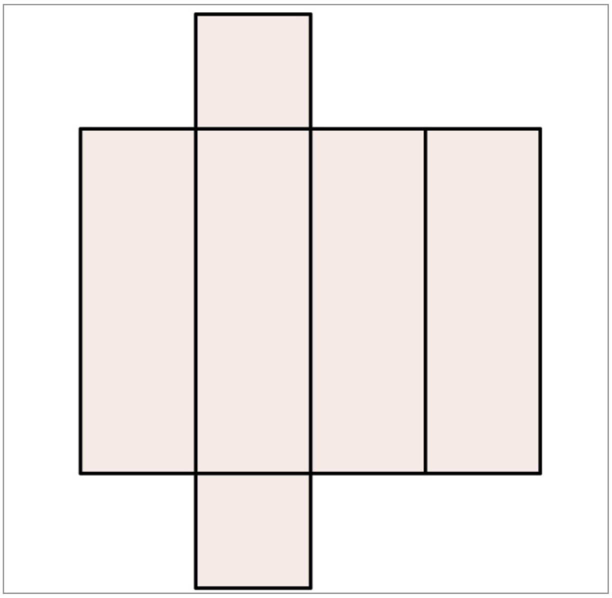
उन्हें फलकों की संख्या, फलकों की आकृति, किनारों की संख्या, हर ठोस आकृति के कोनों की संख्या आदि की पहचान करके कई सारी त्रिविमीय आकृतियों (घन, घनाभ, बेलन, शंकु, तिकोन प्रिज्म, गोला) का अध्ययन करने और एक सारणी के रूप में इन सबका रिकॉर्ड रखने को कहें।

जालियाँ (Nets)

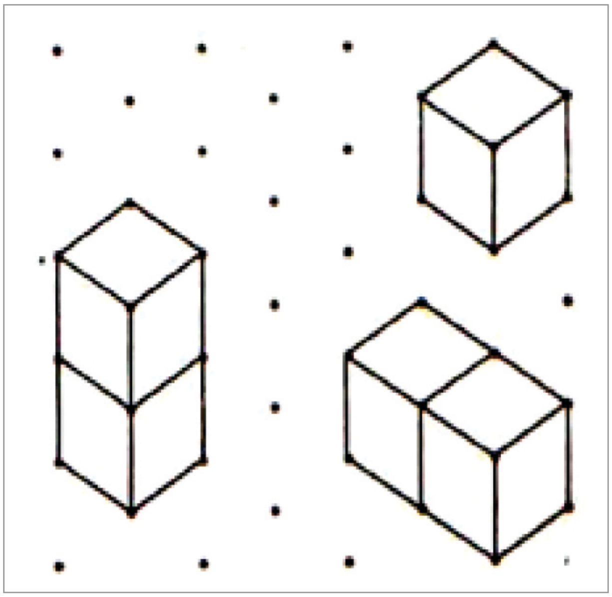
घन व घनाभ बनाने के लिए बच्चों से इनकी जालियों का इस्तेमाल करने को कहें। शिक्षक जाली को बोर्ड पर बना सकते हैं और बच्चे जाली बनाने के लिए एक चौकोर या आयताकार आकृति का इस्तेमाल कर सकते हैं (चित्र 13)। इस स्तर पर वे स्केल का इस्तेमाल करके सटीक चित्र नहीं बना पाएँगे।

तिकोन बिन्दुओं वाले कागज पर त्रिविमीय आकृतियाँ बनाना

उन्हें दिखाएँ कि बिन्दुओं वाले कागज पर घन कैसे बनाएँ (चित्र 14)। वे घनाभ, जुड़े हुए घनों का क्रम (टॉवर) आदि बनाने की भी कोशिश कर सकते हैं।



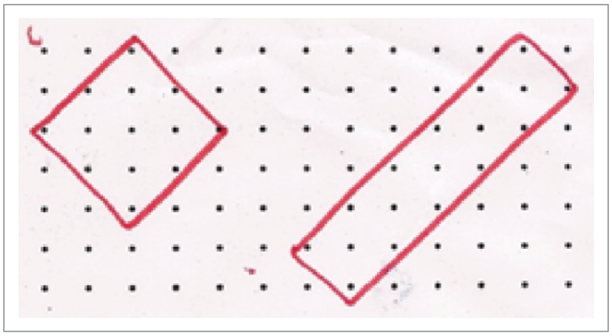
चित्र 13



चित्र 14

जियो–बोर्ड गतिविधियाँ

उन्हें ऐसी संयुक्त आकृतियाँ बनाने को कहें जो एक–दूसरे के एकदम उपयुक्त हों और इन आकृतियों का कोनों, भुजाओं की लम्बाई आदि के रूप में वर्णन करने को कहें।



चित्र 15

अब उनसे कीलों को तिरछे में भी जोड़कर नियमित आकृतियाँ बनाने को कहें। उनसे एक चौकोर और एक आयत बनाने को कहें (चित्र 15)। एक चौकोर या एक आयत की सीधी व समान्तर भुजाएँ बनाना अब और भी ज्यादा चुनौतीपूर्ण होगा। इसके लिए बहुत अच्छे अवलोकन कौशल की जरूरत होगी।

जियोबोर्ड पर की गई गतिविधियों के साथ–साथ बिन्दुओं वाले कागज की गतिविधियों द्वारा भी खोज करते रहें।

ऐसी खोज का एक तरीका यहाँ सुझाया गया है

3 by 3 की एक जाली का इस्तेमाल करें और अलग–अलग आकृतियाँ बनाने के लिए बिन्दुओं को सीधी (आड़ी या खड़ी या तिरछी) रेखाओं से जोड़ें (चित्र 16)। सवाल पूछें :

'इस तरह तुम कितनी अलग–अलग आकृतियाँ बना सकते हो? उनमें से कुछ के नाम बताओ।'

'किस आकृति में सबसे ज्यादा किनारे हैं?'

'एक आकृति बनाने के लिए कम से कम कितने बिन्दुओं को जोड़ने की जरूरत होती है? इस तरह कौन–सी आकृति बनती है? तुमने ज्यादा से ज्यादा कितने बिन्दुओं का इस्तेमाल किया? ऐसा करने से तुम्हें कौन–सी आकृति मिली?'

'क्या तुम अलग–अलग माप के चौकोर बना सकते हो? क्या तुम अलग–अलग माप के आयत बना सकते हो? कितने तरह के? क्या तुम अलग–अलग माप के त्रिभुज बना सकते हो? कितने तरह के?'

द्विविमीय आकृतियाँ

सामग्री : षट्कोण, बड़े चौकोर, छोटे चौकोर, अलग–अलग तरह के त्रिभुज, वृत्त, पंचभुज और अष्टभुज।

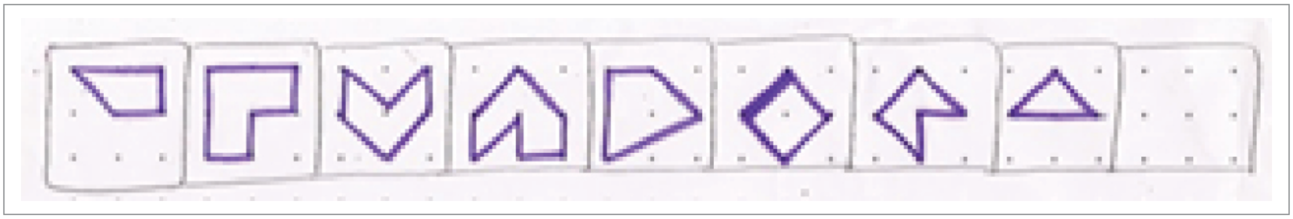
चित्र 17

बच्चों को सममितीय डिजाइन बनाने या चित्र में दिखाए जैसे बन्द पैटर्न बनाने के लिए कुछ आकृतियाँ इस्तेमाल करने को कहें (चित्र 17)। सवाल पूछें :

'दो त्रिभुजों का इस्तेमाल करके तुम कौन–कौन–सी आकृतियाँ बना सकते हो?' 'तीन त्रिभुजों का इस्तेमाल करके कौन–सी आकृतियाँ बनाई जा सकती हैं?' 'इनमें से जितनी भी आकृतियों को तुम कागज पर बना सकते हो बनाओ (बनाई गई संयुक्त आकृतियों के खाके बनाओ)।'

'क्या तुम छोटे त्रिभुजों का इस्तेमाल करके एक बड़ा त्रिभुज बना सकते हो?' (जरूरी नहीं कि बड़े त्रिभुज की आकृति भी छोटे त्रिभुजों जैसी ही हो।)

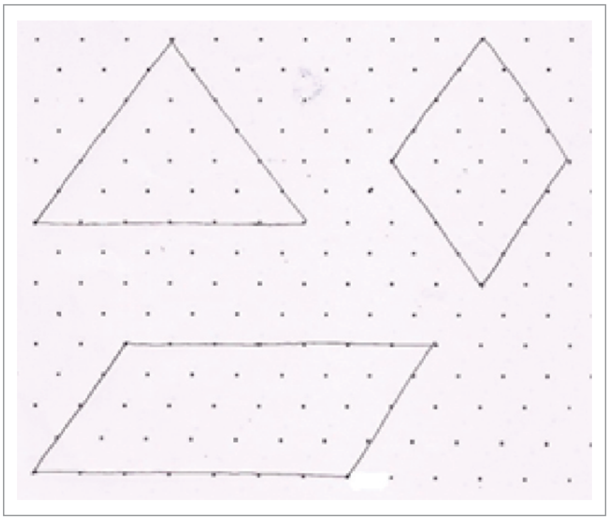
'क्या तुम चौकोर आकृतियों के इस्तेमाल से एक त्रिभुज बना सकते हो? क्यों या क्यों नहीं? क्या तुम त्रिभुजों का इस्तेमाल कर एक चौकोर बना सकते हो? क्यों या क्यों नहीं?'



चित्र 16

आकृतियों का खाका बनाना

बच्चे किसी भी एक आकृति के खाके को सादे कागज पर अनुरेखित कर सकते हैं और देख सकते हैं कि कोई आकृति अपने ही खाके पर कितने तरीकों से फिट हो पाती है।



चित्र 18

दूसरी आकृतियों में आकृतियाँ खोजना

चित्र 18 में दिखाए अनुसार कुछ आकृतियाँ बनाएँ।

उनसे पूछें : 'क्या तुम्हें इन आकृतियों में एक षट्कोण और कुछ त्रिभुज दिखाई देते हैं?'

विभिन्न आकृतियों को बिना अन्तराल के एक साथ जमाना (टाइल्स के पैटर्न)

बच्चों को रास्तों या दीवारों में लगे टाइल्स के पैटर्न या इन पैटर्नों की तस्वीरें भी दिखा सकते हैं। वे ऐसे पैटर्न बनाने के लिए जिनमें विभिन्न आकृतियों को बिना किसी अन्तराल के एक साथ जमाया जा सके अलग–अलग आकृतियों से खेल सकते हैं। उन्हें ऐसी आकृतियों की एक सूची बनाने को कहें जिन्हें बिना अन्तराल के एक साथ जमाकर पैटर्न बनाया जा सके और जिनके साथ ऐसा पैटर्न न बनाया जा सके। प्रयोगों के जरिए वे देख सकते हैं कि कौन–सी आकृतियाँ आपस में फिट होती हैं और कौन–सी नहीं।

उनसे पूछें :

'कौन–सी आकृतियाँ बिना जगह छोड़े पूरी सतह को ढँक लेती हैं?'

'कौन–सी आकृतियों में थोड़ी जगह छूट जाती है?'

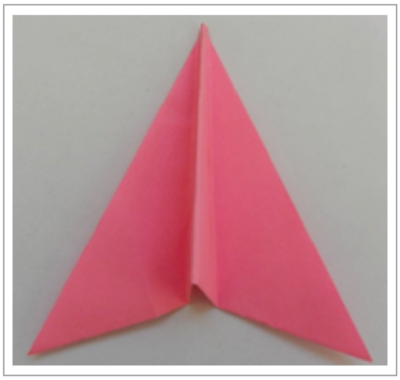
'छूटी हुई जगह कौन–सी आकृति की होती है?'

पेपर फोल्डिंग

एक चौकोर कागज से शुरुआत करें। बच्चों से कहें कि वे आपको साबित करके दिखाएँ कि दी गई आकृति चौकोर है। वे एक किनारे को सामने के किनारे पर मोड़कर (आड़ा) दिखाएँगे और दूसरे किनारे को बगल के किनारे पर मोड़कर (तिरछा)। वे कागज को एक चौथाई मोड़कर भी दिखा सकते हैं कि सारे कोण बराबर हैं।

उन्हें एक कागज (चौकोर या आयताकार) को अलग–अलग तरीके से मोड़कर खोज करने को कहें। एक कागज को बीच से आड़ा मोड़ने के कई तरीके हो सकते हैं लेकिन बीच से खड़ा मोड़ने के नहीं (चित्र 19)। ऐसा करने से क्या आकृतियाँ बनती हैं? उन्हें कागज की चारों भुजाओं को किनारों से मोड़ने को कहें। अब मोड़ को खोलकर बनी हुई आकृति को देखें। उन्हें अलग–अलग तरह के तिरछे मोड़ बनाने को कहें जिनसे कि नुकीली छत या नाव की आकृति बनाई जा सके।

आप सवाल को उलटी तरह से भी पूछ सकते हैं। उन्हें पहले से मुड़ा हुआ (दो या तीन बार से ज्यादा न मुड़ा हो) एक कागज दिखाएँ और उनसे ऐसी ही एक आकृति बनाने के लिए जरूरी मोड़ों को समझने को कहें।



चित्र 19

चौकोर कागज का इस्तेमाल करके अलग–अलग आकृतियाँ बनाना

बच्चों को एक समान्तर चतुर्भुज, एक समचतुर्भुज, एक षट्कोण और एक पंचभुज दिखाएँ और उनसे पूछें कि क्या वे एक चौकोर कागज से यह आकृतियाँ बना सकते हैं। वे इन आकृतियों को बनाने के लिए कागज के कोनों को मोड़कर प्रयोग कर सकते हैं।

एक गोलाकार कागज (उदाहरण के लिए कागज की प्लेट) को मोड़ने से कई मजेदार आकृतियाँ व डिजाइन बनते हैं। वे इससे एक चौकोर, एक आयत और एक त्रिभुज बनाने की कोशिश कर सकते हैं। उन्हें समचतुर्भुज और षट्कोण भी दिखाएँ व पूछें कि क्या वे गोलाकार कागज को मोड़कर यह आकृतियाँ बना सकते हैं।

एक कोने के रूप में कोण

बच्चों से एक चौकोर कागज का इस्तेमाल कर कक्षा में मौजूद विभिन्न आकृतियों (शिक्षक की मेज, फर्श पर लगी टाइल, किताब, तिकोने टुकड़े, अन्य बहुभुज आकृतियाँ) के कोनों को जाँचने को कहें।

वे कक्षा में मौजूद ऐसी आकृतियों की सूची बना सकते हैं जिनके कोने चौकोर हैं, जिनके कोने चौकोर से थोड़ा कम हैं या जिनके कोने चौकोर से थोड़ा ज्यादा हैं। शिक्षक चाहें तो औपचारिक शब्दावली : न्यून कोण, समकोण, अधिक कोण का इस्तेमाल भी कर सकते हैं।

खेल : 'मेरी आकृति कौन–सी है?'

सामग्री : अलग–अलग आकृतियों के जोड़ों के समूह (आयत, चौकोर, अलग–अलग आकृतियों के त्रिभुज, समान्तर चतुर्भुज, समचतुर्भुज, असमान्तर चतुर्भुज, पंचभुज, षट्कोण, वृत्त)

शिक्षक दोनों समूहों को अलग कर लें। एक समूह अपने पास रख लें और दूसरा बच्चों को दे दें। एक बच्चा शिक्षक के समूह से कोई भी एक आकृति उठा ले।

अब वह बच्चा बाकी बच्चों को केवल उस आकृति के कोनों के बारे में बताए। (उदाहरण के लिए : मेरी आकृति में एक कोना चौकोर है और दो कोने चौकोर से थोड़ा कम हैं।)

वह बच्चा भुजाओं और कोनों के बारे में भी जानकारी दे सकता है। (उदाहरण : मेरे पास 4 चौकोर कोनों और 4 भुजाओं वाली एक आकृति है लेकिन यह वर्ग नहीं है।) या फिर वे किनारों के तिरछेपन के बारे में भी बता सकता है। (उदाहरण : मेरी आकृति में 4 भुजाएँ हैं और उनमें से आमने–सामने की दो भुजाएँ तिरछी हैं।)

बाकी बच्चों को अब तर्क द्वारा पता लगाना है कि वह कौन–सी आकृति हो सकती है और फिर उसकी जोड़ीदार आकृति अपने समूह से निकालनी है।

यह गतिविधि बच्चों को आकृतियों के खास गुणों को देखने के लिए प्रशिक्षित करती है। वे जल्दी ही समझ जाएँगे कि यदि वे आकृति के खास गुण के बारे में नहीं बताते हैं तो उनके बताए वर्णन के मुताबिक कई आकृतियाँ हो सकती है।

मैंने देखा है कि यह खेल बच्चों के अवलोकन कौशल व तार्किक कौशल को तेज करने में उपयोगी होता है।

मोड़ के रूप में कोण

एक रबर ट्यूब के टुकड़े के जरिए दो छड़ियों को जोड़ें ताकि L आकार की एक मोड़ी जा सकने वाली सख्त आकृति बन जाए।

उनसे कहें कि एक छड़ी को मजबूती से स्थिर कर दें व दूसरी छड़ी को चारों ओर घुमाएँ और एक चौथाई घुमाने पर, आधा घुमाने पर, तीन चौथाई घुमाने पर और पूरी तरह घुमाने पर छड़ियों के बीच बनने वाले कोण पर ध्यान दें।

दो कोणों की तुलना करने के लिए भी यह गतिविधि इस्तेमाल की जा सकती है। वे L आकृति की भुजाओं को पहले कोण की भुजाओं की सीध में उस पर रख सकते हैं। फिर वे इसे दूसरे कोण पर रखकर देख सकते हैं कि कौन–सा कोण बड़ा है।

बच्चों को एक वर्कशीट दी जा सकती हैं जिसमें समान माप के कोणों की कई जोड़ियाँ अव्यवस्थित तरीके से दी गई हों। फिर वे ऊपर दिए गए तरीके का इस्तेमाल करके समान कोणों की जोड़ियों का पता लगा सकते हैं।

कोणों की खोज

बच्चों से अपने आसपास न्यून कोणों को ढूँढ़ने को कहा जा सकता है। उन्हें कुर्सी, घड़ी, कब्जे, पंखे की ब्लेड आदि को ध्यानपूर्वक देखने को कहें।

रेखाएँ

कागज मोड़ने की गतिविधियों के जरिए रेखाओं और बिन्दुओं पर चर्चा की जा सकती है।

बच्चों से कहें कि वे कागज को कुछ इस तरह से मोड़ें कि ज्यादा से ज्यादा रेखाएँ एक ही बिन्दु से होकर गुजरें। वह बिन्दु चौकोर के कोने पर हो सकता है, चौकोर की किसी एक भुजा पर हो सकता है या फिर चौकोर के अन्दर भी हो सकता है।

समान्तर रेखाओं व लम्बवत् रेखाओं की अवधारणा को भी इसमें शामिल किया जा सकता है।

बिन्दुओं वाले कागज पर रेखाएँ

किन्हीं भी दो बिन्दुओं पर जो एक–दूसरे से थोड़ी दूरी पर हों गोला लगाएँ। उनसे पूछें :

'यदि इन दो बिन्दुओं को एक सीधी रेखा से जोड़ा जाए तो और कौन–कौन से बिन्दु इस रेखा पर पड़ेंगे?'

किन्हीं भी तीन बिन्दुओं पर गोला लगाएँ और पूछें, 'क्या यह सभी बिन्दु एक ही रेखा पर हैं?'

रेखाचित्र

रेखाचित्र बनाना बहुत ही मजेदार गतिविधि होती है। यह स्केल का इस्तेमाल करने, उसे एक सीध पर रखने और सटीक रूप से बिन्दु लगाने का कौशल विकसित करने में मदद करते हैं। इसके लिए उन्हें अनुरूप बिन्दुओं के जोड़ों को पहचानने की जरूरत होती है। इन्हें शुरुआत में बिन्दुओं वाले कागज पर और बाद में फिर सादे कागज पर बनाया जा सकता है।

बनाने के लिए निर्देश

10 सेन्टीमीटर लम्बाई की सीधी रेखाओं का एक जोड़ा बनाएँ जो कि एक–दूसरे से समकोण बनाती हों जैसा कि चित्र 20 में दिखाया गया है। दोनों रेखाएँ जिस बिन्दु पर मिलती है उसे 0 नाम दें। खड़ी रेखा में ऊपर से नीचे 10 से 0 तक संख्याएँ दें। आड़ी रेखा में बाएँ से दाएँ 0 से 10 संख्याएँ दें। अब खड़ी रेखा पर दिए गए 10 को आड़ी रेखा पर दिए गए 1 से जोड़ें, खड़ी रेखा पर दिए गए 9 को आड़ी रेखा पर दिए गए 2 से, 8 को 3 से, 7 को 4 से और इसी तरह आगे भी जोड़ते जाएँ। ऐसा करने से एक मजेदार वक्राकार रेखा का प्रभाव देखने को मिलता है।

एक बार जब बच्चे यह तकनीक सीख जाते हैं तो आमतौर पर वे खूबसूरत डिजाइन बनाने के लिए शुरुआती रेखाओं (V आकार की, तिकोनी, 'जोड़ के चिन्ह' की आदि) को बनाने के कई सारे तरीके निकाल लेते हैं।

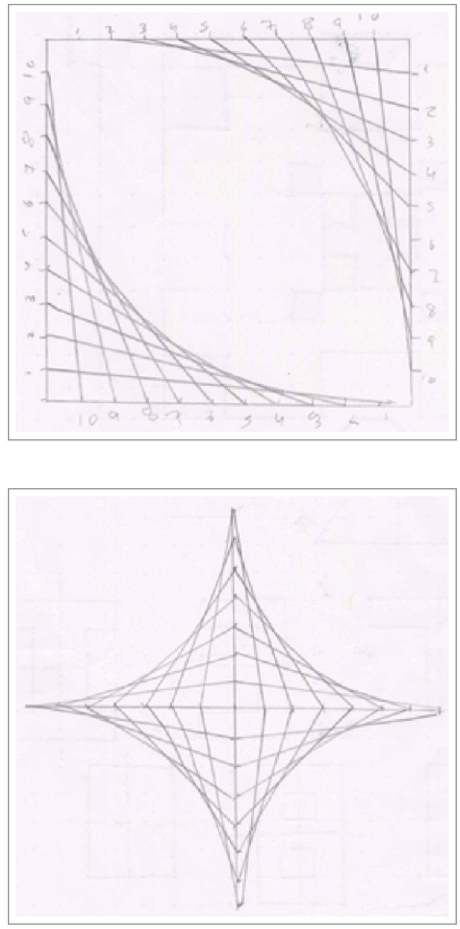
आकृति विच्छेदन

गत्ते के एक बड़े–से चौकोर के 3 से 5 टुकड़े कीजिए जैसे कि जिग्सा पजल्स में होते हैं। अब बच्चों से कहें कि वे इन टुकड़ों को एक साथ जोड़कर एक चौकोर बनाएँ।

यही गतिविधि आयत, त्रिभुज या वृत्त के साथ भी की जा सकती है।

चुनौती

गत्ते पर एक आयत बनाएँ। अब विकर्ण बनाएँ और समान त्रिभुजों के 2 जोड़े बनाने के लिए आयत को विकर्णों पर से काटें। आकृतियों का खाका बनाने के लिए इन 4 त्रिभुजों को कई अलग–अलग तरीकों से जमाया जा सकता है। बच्चों को इन चारों त्रिभुजों को खाकों पर जमाने के अलग–अलग तरीके खोजने को कहें।



चित्र 20

नक्शा

बच्चे अपने घर से स्कूल तक के रास्ते का नक्शा बनाने के लिए (बशर्ते कि वह बहुत ज्यादा दूर न हो) स्कूल के पास–पड़ोस का नक्शा इस्तेमाल करें। उन्हें स्थितीय भाषा का इस्तेमाल करते हुए रास्ते का वर्णन करने को कहें।

नक्शे में किसी एक स्थान पर इंगित करें और पूछें :

'यदि तुम इस बिल्डिंग में खड़े हो तो क्या बैंक तुम्हारे बाईं तरफ होगा?'

'पहले दाहिने मोड़ पर कौन–सी बिल्डिंग होगी?'

'इस स्थान से तुम बाएँ मुड़ोगे या दाएँ?'

'बस अड्डे का रास्ता तुम कैसे बताओगे?'

आँखों पर पट्टी बाँधने का खेल

बच्चों में स्थान की समझ बनाने का एक और मजेदार तरीका है उन्हें आँखों पर पट्टी बाँधकर कमरे में चलने को कहना। एक बच्चा दूसरे बच्चे को जिसकी आँखों पर पट्टी बँधी हो कुछ इस तरह निर्देश दे, 'दो कदम आगे जाओ, दाएँ मुड़ो, अब तीन कदम चलो, फिर बाएँ मुड़ जाओ' आदि। खेल का उद्देश्य कमरे में आने वाली रुकावटों से बचते हुए शुरुआती स्थान से आखिरी स्थान पर पहुँचना है।

कई सारी बच्चों की पत्रिकाओं में भूलभुलैया, माचिस की तीलियों वाली पहेलियाँ, रास्ता ढूँढ़ो, घनों के एक ढेर में छिपे घनों को ढूँढ़ना आदि आकर्षक व रोचक पहेलियाँ आती हैं। यह सभी स्थानिक व तार्किक कौशल को बनाने में मदद करती हैं।

चित्र 21

पद्‌मप्रिया शिराली

पद्‌मप्रिया शिराली ऋषिवैली स्कूल, आन्ध्रप्रदेश के कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेन्टर में 1983 से काम कर रही हैं। वे गणित,कम्प्युटर, भूगोल,अर्थशास्त्र, पर्यावरण विज्ञान तथा तेलगु भाषा का अध्यापन करती रहीं हैं। आजकल वे आउटरीच कार्यक्रम के तहत एस.सी.ई.आर.टी., आन्ध्रप्रदेश के साथ उनके पाठ्यक्रम सुधार तथा प्राथमिक स्तर की गणित पाठ्यपुस्तकों के निमार्ण में संलग्न हैं। 1990 के दशक में उन्होंने जाने–माने गणितज्ञ श्री पी.के. श्रीनिवासन के साथ काम किया है। वे ऋषिवैली स्कूल की मल्टीग्रेड लर्निंग प्रोग्राम टीम का हिस्सा भी रही हैं, जिसे 'स्कूल इन ए बाक्स' के नाम से जाना जाता है। उनसे padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

यह अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय तथा कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेन्टर,ऋषिवैली की संयुक्त पत्रिका At Right Angles (a resource for school mathematics) Volume 4, N0.1 March 2015 में प्रकाशित Teaching Geometry at the Primary Level-II का हिन्दी अनुवाद है। **अनुवाद** : कविता तिवारी **सम्पादन :** राजेश उत्साही