अंक 23 | नवम्बर 2025
चौ-मासिक | बेंगलूरु
अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी का प्रकाशन

Azim Premji University

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी
एट राइट एंगल्स

स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

त्योहारों का समय, वह समय होता है जब हम अपने परिवेश की हर सुन्दर चीज़ का उत्सव मनाते हैं। क्या आपने कभी ग़ौर किया है कि ऐसे समय में हम जो कुछ भी करते हैं, उसमें कितना गणित छिपा होता है?

जरा हमारे कपड़ों के पैटर्न और उन सजावटी चीज़ों के बारे में सोचिए जिन्हें हम बनाते और अपने घर के आस-पास लगाते और लटकाते हैं, हमारे फ़र्श की शोभा बढ़ाने वाली विभिन्न आकृतियों, उस संगीत के बारे में जो ऐसे समय में गूँजता है, यहाँ तक कि हमारे द्वारा बनाए जाने वाले भोजन और उसे परोसने के तरीके के बारे में भी सोचिए।

हम ज्यामिति में संख्याएँ, आकार और माप देखते हैं; संख्याओं और संगीत में पैटर्न देखते हैं; और अपनी योजना बनाने में डेटा का उपयोग करते हैं, जिसमें विशिष्ट परिस्थितियों के लिए व्यवस्था करना भी शामिल है!

गणित जीवन के उत्सवों और जीवन के उल्लास में एक सामंजस्यपूर्ण पूर्णता लिए एक साथ आता है।

सम्पादक की ओर से...

प्रिय पाठको,

बस देखते-ही-देखते, 2025 तेज़ी से गुज़र गया और हम वर्ष के **अन्तिम अंक** पर आ पहुँचे हैं! **एट राइट एंगल्स** के लिए यह वर्ष सीखने का वर्ष रहा है - न केवल गणित का, बल्कि प्राथमिक विद्यालय गणित की शिक्षण-पद्धति में मौजूद कमियों और ज़रूरतों का भी। हमने गणित के साथ शिल्प, कला, प्रौद्योगिकी, हमारे पर्यावरण और हमारे रोज़मर्रा के जीवन के व्यवसायों तथा रुचियों के **अन्तर्सम्बन्ध** की जाँच की। नवम्बर, 2025 के अंक में हम **गणित के उत्सव** पर ध्यान केन्द्रित कर रहे हैं! हम इस बात से भली-भाँति अवगत हैं कि विद्यार्थियों और वयस्कों की एक बड़ी आबादी इस विचार का उपहास उड़ाती है। एक प्रसिद्ध उद्धरण है, *''गणित के साथ मेरा प्यार और नफ़रत का रिश्ता है - मुझे इसे प्यार करने से नफ़रत है, लेकिन मुझे इससे नफ़रत करना पसन्द है।''* एक **उत्सव** ऐसे दृष्टिकोण के बिल्कुल विपरीत लगता है; इसलिए हम यह पड़ताल करना चाहते थे कि हम एक **सार्थक उत्सव** कैसे मना सकते हैं जो समावेशी हो, विभिन्न क्षमताओं को पूरा करता हो और, सबसे महत्त्वपूर्ण बात यह है कि गणित के बारे में इस मानसिकता को बदलता हो।

त्योहार विविधता को बढ़ावा देते हैं, वे विभिन्न हितधारकों को संवाद में लाते हैं, वे रचनात्मकता बढ़ाते हैं, वे 'विषय पर स्वामित्व' के अवसर प्रदान करते हैं। संक्षेप में, वे कक्षा को बदल देते हैं – कम-से-कम एक दिन के लिए! हम स्थायी परिवर्तन लाने के लिए ऐसे अवसरों का लाभ कैसे उठा सकते हैं? क्या हम हर साल 22 दिसम्बर को मनाए जाने वाले राष्ट्रीय गणित दिवस के उत्सव को आगामी शैक्षणिक वर्ष तक ले जा सकते हैं? तभी वे वास्तव में मनाने लायक होंगे। इस अंक के दो 'विशेष' लेख और 'पुलआउट' इस उत्सव के विभिन्न पहलुओं और विचारों को प्रस्तुत कर रहे हैं।

इस अंक का 'कक्षा में' खण्ड स्मृति स्मारक पाण्डा के विचारोत्तेजक लेख *"पढ़ाते-पढ़ाते हम क्या छीन लेते हैं?"* के साथ शुरू होता है। हम सीखने में कमी लाए बिना कैसे सिखाएँ? जीनत रहमान की नन्ही माया की संख्याओं के साथ खोज और माया ने कैसे *विभाज्यता के बारे में बचपन में कुछ छोटी-छोटी गणितीय खोजें* की, इस पर आधारित कहानी विद्यार्थियों द्वारा किए जाने वाले शिक्षण के महत्त्व पर ज़ोर देती है। और करण सिंह जारी रखते हैं - *"अपने अनुभव के माध्यम से क्षेत्रफल और परिमाप सिखाना।"* वे एक शिक्षक प्रशिक्षण सत्र का वर्णन करते हैं जिसमें शिक्षकों ने सीखा कि सूत्रों को बताए बिना प्रासंगिक उदाहरणों के माध्यम से अवधारणाओं का पता कैसे लगाएँ।

क्षमा चक्रवर्ती का लेख, *"कैसे पता करूँ कि उन्होंने समझ लिया है?"* शिक्षण पद्धतियों के कुछ अच्छे त्रुटि-सुधार उदाहरणों को समाहित करता है। हम उन त्रुटियों का पता कैसे लगा सकते हैं और उन्हें कैसे दूर कर सकते हैं जो विद्यार्थी के मन में अवधारणा-निर्माण की प्रक्रिया में आ जाती हैं? कक्षा में वास्तविक हस्तक्षेप पहलों के साथ इस लेख को आगे बढ़ाने के क्षमा के उदार प्रस्ताव पर उनसे ज़रूर सम्पर्क करें।

हम इस खण्ड का समापन स्वाती सरकार की रिपोर्ट और आकेफ़ा बसरी के फ़ैक्ट फ़ैमिली पर दिए गए पाठ के फॉलो-अप के साथ कर रहे हैं - जोड़ और घटाव के फ़ैक्ट संख्याओं के बीच सम्बन्ध कैसे बना सकते हैं? यह हमें 'गणित का मज़ा' खण्ड के लिए एक शानदार शुरुआत देता है। बहुत लम्बे समय के बाद एक वर्ग-संख्या पहेली दी जा रही है, जो जोड़ फ़ैक्ट फ़ैमिली पर आधारित है। आर. मोहन वर्ग टाइल्स के साथ दिलचस्प खोजों का वर्णन करते हैं। हम पद्मप्रिया शिराली की एक गणितीय नाटक स्क्रिप्ट और उनके अनुभव के आधार पर यह निष्कर्ष निकालते हैं कि अच्छे नाटक गणित से दूर-दूर रहने वाले विद्यार्थियों को भी गणित की कक्षा के केन्द्रीय मंच पर खींच लाते हैं।

हम केरलिन क्रिस्टोफर की पहेली 'संख्याओं में कला' पर एट राइट एंगल्स के पाठकों को उनकी विभिन्न प्रतिक्रियाओं के लिए धन्यवाद देते हैं। इनमें से दो पाठकों की प्रतिक्रियाओं को इस अंक में शामिल किया गया है; दोनों पाठकों ने कई सुझाव भेजें हैं, लेकिन हमें जगह की कमी के कारण उनमें से कुछ को चुनना पड़ा।

एट राइट एंगल्स के जुलाई, 2025 अंक के 'पुलआउट' और कवर ने इस बात पर ध्यान केन्द्रित किया था कि बुनाई के पैटर्न स्कूल गणित से कैसे जुड़ सकते हैं। हमें ख़ुशी है कि एनसीईआरटी की कक्षा-5 की नई पाठ्यपुस्तक में भी इस विचार को शामिल किया गया है। हमें उम्मीद है कि शिक्षक बुनाई के माध्यम से गणित को कक्षा के जीवन में शामिल करने का आनन्द लेंगे।

जॉन वॉन न्यूमैन का प्रसिद्ध कथन है, *"गणित में, आप चीज़ों को समझते नहीं हैं। आप बस उनके आदी हो जाते हैं।"* हम इसका उपयोग आपको यह आग्रह करने के लिए करना चाहते हैं कि आप गणित के उत्सव को सिर्फ एक दिन का कार्यक्रम नहीं, बल्कि जीवन जीने का एक तरीक़ा बनाएँ।

स्नेहा टाइटस
मुख्य सम्पादक
AtRightAngles.editor@apu.edu.in

सम्पादकीय कार्यालय
अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी,
सर्वे नम्बर 66, बुरुगुंटे विलेज, बिक्कनाहल्ली मेन रोड,
सरजापुरा, बेंगलूरु, कर्नाटक - 562 125
ई-मेल : publications@apu.edu.in
वेबसाइट : www.azimpremjiuniversity.edu.in

डिज़ाइन
जिंक एंड ब्रोकोली
बेंगलूरु, कर्नाटक

हिन्दी अंक लेआउट एवं मुद्रक
आदर्श प्रा.लि., भोपाल, मध्य प्रदेश

एट राइट एंगल्स अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी का प्रकाशन है, जो स्कूली शिक्षकों के लिए गुणवत्तापूर्ण गणित शिक्षण संसाधन प्रदान करता है। इसका उद्देश्य न केवल कक्षाओं के भीतर, बल्कि स्कूली प्रक्रियाओं के व्यापक सन्दर्भ में भी, अधिक अनुभवात्मक और सार्थक शिक्षण-अधिगम प्रक्रियाओं को सुगम बनाना है। उद्देश्यपूर्ण और उत्साहपूर्ण शिक्षण के लिए, एट राइट एंगल्स भारत और उसके विविध समुदायों की वास्तविकताओं पर आधारित व्यावहारिक अन्तर्दृष्टि प्रस्तुत करता है।

__एट राइट एंगल्स__ अंक 23, नवम्बर 2025 का यह __हिन्दी अनुवाद__ जनवरी, 2026 में प्रकाशित हुआ है।

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी
एट राइट एंगल्स
स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

Azim Premji University

A Publication of Azim Premji University

विशेष

कक्षा में

गणित का मज़ा

समीक्षा

पुलआउट

गणित दिवस : एक बार फिर

एट राइट एंगल्स के सम्पादकों द्वारा संकलित

दिसम्बर नज़दीक आते ही देश-भर के संस्थान श्रीनिवास रामानुजन की जयन्ती यानी 22 दिसम्बर या उसके आस-पास राष्ट्रीय गणित दिवस मनाने की तैयारियों में जुट जाते हैं। *एट राइट एंगल्स* की टीम ने सोचा कि क्यों न इस दिन होने वाले आयोजनों पर गणित के क्षेत्र से जुड़े विभिन्न लोगों से उनकी राय और सुझाव माँगे जाएँ।

हमने उनके सामने ये कुछ सवाल रखे :

- क्या राष्ट्रीय गणित दिवस मनाने का विचार सार्थक है?
- क्या आपको लगता है कि साल-भर होने वाली गणित की रोज़मर्रा की पढ़ाई पर इस तरह के आयोजनों का कोई प्रभाव पड़ता है?
- क्या इस तरह के आयोजनों से जुड़ी आपकी कोई व्यक्तिगत यादें या दिलचस्प क़िस्से हैं?
- क्या आपके पास ऐसे कोई सुझाव हैं, जिससे यह दिन और ज़्यादा सार्थक व प्रभावी बन सके?

इसके जवाब में हमें गणित क्षेत्र के कई शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों और विशेषज्ञों से प्रतिक्रियाएँ मिलीं। अधिकांश का मानना था कि गणित को समर्पित एक विशेष दिवस मनाना वाक़ई एक सराहनीय विचार है और इससे उन विद्यार्थियों में भी दिलचस्पी जगाई जा सकती है, जो सामान्यतः इस विषय से दूर भागते हैं।

जयश्री सुब्रमणियन कहती हैं कि *स्कूल-कॉलेजों में गणित को अकसर परीक्षा के मद्देनज़र रखकर ही पढ़ाया जाता है और इसकी पढ़ाई रोज़मर्रा की नीरस दिनचर्या में फँसकर रह जाती है। ऐसे में इस एकरसता को तोड़ने और गणित के परीक्षा दायरे से इतर उसके किसी अन्य पहलू से विद्यार्थियों को रूबरू कराने वाला कोई भी अवसर न सिर्फ़ स्वागतयोग्य है, बल्कि अनिवार्य भी।*

सौम्याश्री एन. जे. का भी मानना है कि *राष्ट्रीय गणित दिवस मनाना एक अच्छी पहल है। यह गणित को लेकर विद्यार्थियों में फैले भय को, जो कि बहुत आम है, दूर करने का अवसर देता है। साथ ही यह गणित विषय में आनन्द, खोज और उद्देश्य को महसूस करने का मौक़ा देता है।*

लेकिन **आशीष गुप्ता** आगाह करते हुए कहते हैं कि *सिर्फ़ किसी एक दिन को त्योहार की तरह मनाने से कोई स्थायी बदलाव नहीं आ जाएगा। जैसे केवल एक दिन दिवाली मनाने भर से ऐसा नहीं होता कि अच्छाई हमेशा के लिए बुराई पर विजय पा ले, उसी तरह केवल राष्ट्रीय गणित दिवस मना लेने से हमारे स्कूलों में गणित शिक्षण की वास्तविकता अपने-आप नहीं बदल जाएगी। असल ज़रूरत इस बात की है कि हम ऐसे आयोजनों के मूल उद्देश्य को समझें।*

इस तरह के आयोजन कब अधिक सार्थक और स्थायी प्रभाव डाल सकते हैं, आशीष इस पर विस्तार से प्रकाश डालते हैं। *उनके मुताबिक़ राष्ट्रीय गणित दिवस मनाने का बड़ा उद्देश्य यही है कि विद्यार्थी गणितीय संसार की पड़ताल करने और शिक्षक अपनी कक्षाओं को अधिक रोचक व आनन्ददायक बनाने के लिए प्रेरित हों, ताकि बच्चे इस विषय को हौव्वा न मानते हुए आगे बढ़ सकें। ऐसे आयोजन विद्यार्थियों व इस विषय से जुड़े लोगों में गणितीय सोच और समस्या-समाधान कौशल को बढ़ावा देने का एक अवसर भी देते हैं। गणित तथा रामानुजन जैसे गणितज्ञों के प्रति एक पूरा दिन*

की-वर्ड : गणित दिवस, गतिविधियाँ, पहेलियाँ, अन्वेषण, खोज

समर्पित करके हम स्वीकार करते हैं कि यह विषय राष्ट्र की प्रगति के लिए तो महत्त्वपूर्ण है ही, साथ ही प्रत्येक व्यक्ति की रोज़मर्रा की ज़िन्दगी में भी मायने रखता है। यह दिन भारत की समृद्ध गणितीय विरासत, फिर चाहे वह शून्य से लेकर दशमलव पद्धति जैसी प्राचीन देन हो या आधुनिक उपलब्धियाँ, सभी को रेखांकित करता है। यह हमें याद दिलाता है कि गणित न केवल एक सांस्कृतिक धरोहर है, बल्कि भविष्य को आकार देने वाला महत्त्वपूर्ण औज़ार भी है। साथ ही यह शिक्षकों को प्रेरित करता है कि वे अपनी रोज़मर्रा की कक्षाओं में ऐसे तरीक़े अपनाएँ, जिनसे बच्चों में विश्लेषण क्षमता, तार्किक सोच और रचनात्मकता विकसित हो सके। हालाँकि यह बदलाव सिर्फ़ एक दिन में नहीं आ सकता। इसे गणित की प्रत्येक कक्षा में रोज़ाना की शिक्षण एवं प्रशिक्षण गतिविधियों का एक अभिन्न हिस्सा बनाना होगा।

नुज़हत अंजुम *इस तरह के आयोजन को लेकर शिक्षकों के मन में उठने वाले कई तरह के सवाल साझा करती हैं :*

- *जो बच्चे साल भर पढ़ाई करने पर भी नहीं सीख पाते हैं, वे क्या सिर्फ़ एक ही दिन में सीख जाएँगे?*
- *हमें तो पढ़ाने का ही समय नहीं मिल पाता है, तो ऐसे कार्यक्रमों के लिए अतिरिक्त समय कहाँ से लाएँ?*
- *हमारे पास इसकी कोई बुनियादी समझ नहीं है कि इसे हम आगे कैसे बढ़ाएँ?*
- *मैं तो इस विषय का/ की शिक्षक/ शिक्षिका ही नहीं हूँ, तो मुझे यह सब क्यों करना चाहिए?*
- *हमारे विद्यार्थियों को न संख्याओं का ज्ञान है और न बुनियादी संक्रियाओं का, तो ऐसे में हम क्या करें?*
- *हमारे स्कूल के अन्य शिक्षकों को इसकी परवाह नहीं है, तो मैं अकेले ही इसके बारे में क्यों सोचूँ?*

इन सारे सवालों के मुझे जो जवाब मिले, उनका निचोड़ यह था कि ***मैं एक शिक्षक/ शिक्षिका हूँ***, *और इसलिए :*

- *मैं बच्चों की समझ को बेहतर बनाने के लिए अलग-अलग तरीक़े आज़माता/ आज़माती हूँ और गणित दिवस भी उन्हीं तरीक़ों में से एक है।*
- *मैं बच्चों के लिए ऐसा समय तय करता/ करती हूँ, जिसमें वे विभिन्न टीएलएम के साथ खेल सकें और उनसे सीख सकें।*
- *बच्चों को संख्या ज्ञान और बुनियादी संक्रियाओं की समझ देना मेरा काम है। बच्चे इस ज्ञान को आत्मसात कर सकें, इसके लिए मैं रोज़मर्रा के तरीक़ों के अलावा कुछ नए तरीक़े भी आज़माता/ आज़माती हूँ।*
- *मैं उदाहरणों के साथ पढ़ाता/ पढ़ाती हूँ और कोई नया तरीक़ा आज़माने पर उससे मुझे ख़ुद भी सीखने का अवसर मिलता है।*

कंचन *कहती हैं कि यदि इस दिवस को किसी उद्देश्य के साथ मनाया जाए तो इससे शिक्षकों को यह विचार करने का मौक़ा मिलता है कि उनके विद्यार्थी कैसे सीखते हैं और उन्हें कहाँ-कहाँ कठिनाइयाँ या चुनौतियाँ पेश आती हैं। इस तरह के आयोजनों के बाद कक्षाओं में अकसर गणित की शिक्षण सामग्रियों का अच्छा संग्रह हो जाता है। कई स्कूलों में इस पूरी प्रक्रिया का असल नायक गणित किट होता है। जब ऐसे कार्यक्रमों के प्रति शिक्षक और विद्यार्थी पहले से जिज्ञासु हों या फिर उनका आयोजन केवल खानापूर्ति के लिए किया गया हो, दोनों ही स्थितियों में मैंने देखा है कि ये गणित किट विद्यार्थियों एवं शिक्षकों को कुछ नया खोजने, समझने और उस पर विचार-मन्थन करने का अवसर देते हैं। इस प्रक्रिया में कई अवधारणाएँ जीवन्त होकर सामने आती हैं।*

पते की बात : राष्ट्रीय गणित दिवस मनाने के उद्देश्य क्या हैं, हमें इसकी पूरी स्पष्ट समझ होनी चाहिए।

भारत में होने वाले गणित दिवस आयोजनों की झलक

जयश्री : *जहाँ मैं पली-बढ़ी उस छोटे-से क़स्बे पलक्कड़ के मेरे कॉलेज में रामानुजन का जन्म शताब्दी वर्ष मनाए जाने की यादें आज भी मेरी स्मृतियों में ताज़ा हैं। उस समय मैं कक्षा 11वीं में थी। मेरे कॉलेज ने रामानुजन के व्यक्तित्व व कृतित्व पर क्विज़ और भाषण प्रतियोगिता आयोजित की थी। तब मुझे रामानुजन द्वारा किए गए कार्यों के बारे में ज़्यादा कुछ*

पता नहीं था। शायद मैंने इससे पहले उनका नाम भी नहीं सुना था। उस वक़्त मैं सोच भी नहीं सकती थी कि कोई 'मैथ्स क्विज़' भी हो सकती है। भला गणित में किस तरह के सवाल पूछे जा सकते हैं? मुझे याद है कि इस क्विज़ में भाग लेने पर पहली बार मैंने गणित को अपनी पाठ्यपुस्तकों से कुछ अलग हटके महसूस किया था। तब मेरे सामने 'गणितज्ञ' शब्द का एक अलग मतलब उजागर हुआ था। इससे पहले तक मेरे लिए गणितज्ञ वही थे, जिनके नाम मैंने अपनी पाठ्यपुस्तकों में पढ़े थे, जैसे पाइथागोरस और यूक्लिड। कुम्भकोणम और चेन्नई ऐसी जगहें थीं, जहाँ मैं जा चुकी थी और मुझे एहसास हुआ कि कोई गणितज्ञ इन जगहों से भी हो सकता है। रामानुजन ने यहाँ के जिन स्कूलों और कॉलेजों से पढ़ाई की, वे अस्तित्व में थे और मेरे लिए इसके बड़े मायने थे। मुझे महसूस हुआ कि 'गणितज्ञ' होना कोई दूर की कौड़ी नहीं है।

जीवन के बाद के दिनों में मैं गुजरात के एक छोटे से क़स्बे में रही, जहाँ मेरे बच्चों की परवरिश हुई। जब आस-पास के बहुत से लोग सिर्फ़ कम्प्यूटर स्क्रीन पर द्वि-आयामी चेहरों में सिमट गए थे, तब मुझे याद है कि 'पाई डे' पर मेरे बच्चे कितनी दीवानगी के साथ ऑनलाइन सवाल हल किया करते थे। उस समय कोई ऑनलाइन प्रतिस्पर्धा हो रही थी, जिसकी जानकारी स्कूल ने अपने सभी विद्यार्थियों को दी थी। और फिर जिस उत्साह के साथ बच्चे रोज़मर्रा के अभ्यास (गणितीय गणनाएँ) में जुट गए थे, वह उत्साह देखने लायक था। वे चाहते थे अधिक-से-अधिक सवालों को हल करके वे अपने स्कूल के नाम को 'लीडरबोर्ड' पर सबसे आगे कर सकें! यह दो-तीन साल तक चला। मैं बच्चों में 'प्रतिस्पर्धा की भावना' का समर्थन नहीं कर रही हूँ और न ही इस बात के पक्ष में हूँ कि वे सदैव निरर्थक गणनाओं में उलझे रहें, लेकिन इस अनुभव के ज़रिए केवल यह बताना चाहती हूँ कि बच्चों ने इसे किस तरह एक 'मिशन' की तरह अपनाया। मेरा मानना है कि अगर कोई उत्सव इसी ऊर्जा को अधिक सार्थक व रोचक गतिविधियों की तरफ़ मोड़ सके, जिससे कि गणित के प्रति बच्चों में स्वाभाविक दिलचस्पी विकसित हो, तो यह अच्छा ही होगा।

मेरा मानना है कि किसी भी पहल का असर तभी दिखता है, जब वह छोटे-छोटे क़स्बों और गाँवों तक पहुँच सके। मैं इंटरनेशनल मैथमेटिक्स यूनियन (IMU) के 'पाई डे' उत्सव की भी सराहना करती हूँ, जहाँ सारी गतिविधियाँ एक निश्चित थीम के साथ आयोजित होती हैं। यहाँ आप अपनी छोटी-सी गतिविधि भी अन्य लोगों के साथ साझा कर सकते हैं और यह भी जान सकते हैं कि उन्होंने इस उत्सव को किस तरह मनाया। इस आदान-प्रदान से आपकी समझ और अधिक समृद्ध होती जाती है।

जी. जगदीश एक व्यावहारिक सुझाव देते हैं : *यदि इसे संकुल (क्लस्टर) स्तर पर मनाया जाए और तालुक के सभी स्कूलों को इसमें शामिल किया जा सके तो यह काफ़ी प्रभावी साबित होगा।*

करण सिंह का अनुभव इस तरह रहा : *गत वर्ष 17 से 20 दिसम्बर, 2024 तक हमने रुद्रप्रयाग में प्राथमिक स्कूलों के 35 शिक्षकों की चार दिवसीय गणित टीएलएम निर्माण कार्यशाला आयोजित की थी। इसमें शिक्षकों ने विभिन्न गणितीय अवधारणाओं पर अपने-अपने टीएलएम तैयार किए। बाद में उन्हें डाइट रुद्रप्रयाग में आयोजित टीचर्स मेले में प्रदर्शित किया गया। आस-पास के उच्च प्राथमिक विद्यालयों व शासकीय इंटर कॉलेज के विद्यार्थी भी इस मेले में आए। उन्होंने शिक्षकों से बात-चीत की और प्रत्येक टीएलएम के उपयोग के बारे में जानकारी ली। शिक्षकों ने विस्तार से अपनी अवधारणाएँ समझाईं और इस तरह विद्यार्थियों के लिए यह सीखने का एक शानदार अनुभव बन गया। कार्यशाला के आख़िर में हमने शिक्षकों को सलाह दी कि वे 22 दिसम्बर को अपने-अपने स्कूलों में राष्ट्रीय गणित दिवस मनाएँ और उसमें इस आयोजन की तस्वीरें व वीडियोज़ दिखाएँ। इस पहल को काफ़ी अच्छी प्रतिक्रियाएँ मिलीं और फ़ील्ड में इसे प्रभावी तरीक़े से लागू किया गया। यहाँ तक कि उत्तराखण्ड सरकार ने राष्ट्रीय गणित दिवस मनाने के लिए सभी स्कूलों को एक एडवाइज़री भी जारी की। इस आयोजन के लिए हमने अपनी तरफ़ से कुछ आइडियाज़, गतिविधियाँ और उपयोगी सामग्री साझा की। इस तरह, यह दिन आनन्द, रचनात्मकता और स्वतंत्रता के साथ गणित सीखने का अवसर बन गया। साथ ही, पूरे साल गणित की पढ़ाई किस तरह से होनी चाहिए, इसके लिए भी एक सकारात्मक माहौल तैयार हुआ।*

पूजा दुमागा कहती हैं कि उन्हें *पौड़ी में आयोजित गणित की एक डीआरजी (डिस्ट्रिक्ट रिसोर्स ग्रुप) कार्यशाला याद है, जिसमें कुछ चयनित डीआरजी सदस्य शामिल हुए थे। इसका उद्देश्य राष्ट्रीय गणित दिवस के सन्दर्भ में प्राथमिक कक्षाओं*

में टीएलएम के उपयोग पर चर्चा करना था। इसकी फॉलोअप बैठक में 3-4 शिक्षक उनके द्वारा तैयार टीएलएम लाए और उन्होंने अपने अनुभव अन्य शिक्षकों के साथ साझा किए। एक शिक्षिका ने बताया कि पूर्णांकों के जोड़ और घटा को सिखाने के लिए वे किस तरह से संख्या-रेखा (नम्बर-लाइन) वाली स्केल का प्रभावी उपयोग करती हैं। एक अन्य शिक्षक ने बताया कि $\sqrt{2}$ और $\sqrt{3}$ की अवधारणाओं को समझाने के लिए उन्होंने कैसे एक व्यावहारिक उपकरण का इस्तेमाल किया। कार्यशाला के बाद 7 से 8 शिक्षकों ने अपने स्कूलों में बनाए गए मैथ्स कॉर्नर की तस्वीरें और वीडियोज़ साझा किए। कुछ शिक्षकों ने कट-आउट्स की मदद से गणितीय पहचानों को समझने का प्रयोग भी शुरू किया।

पते की बात : राष्ट्रीय गणित दिवस के आयोजन विशेष रूप से दूरस्थ क्षेत्रों में काफ़ी सार्थक हैं। ऐसे क्षेत्रों के स्कूल यदि मिलकर संयुक्त गतिविधियाँ आयोजित करें, तो न सिर्फ़ संसाधनों का बेहतर इस्तेमाल होगा, बल्कि अपने अनुभवों व सीखों का आदान-प्रदान करने के लिए वे साझा मंच भी बना सकेंगे।

सार्थक आयोजन के लिए सुझाव

पूजा : *उक्त अनुभवों से मुझे यह समझ में आया कि कई तरह के टीएलएम पर चर्चा करने के बनिस्बत कुछ चुनिन्दा टीएलएम पर ही ध्यान देना और सही गणितीय भाषा का उपयोग कर उन्हें स्पष्ट रूप से समझाना ज़्यादा बेहतर रहेगा। इससे शिक्षक बग़ैर समझ-बूझ के महज़ खानापूर्ति के वास्ते टीएलएम बनाने की बजाय समग्र रूप से सोच पाएँगे।*

पूजा ज़ोर देती हैं कि विद्यार्थियों को महान गणितज्ञों के जीवन और उनके कार्यों के बारे में ज़रूर बताया जाना चाहिए। इससे बच्चों में गणित के प्रति सराहना बढ़ती है और वे समझ पाते हैं कि यह अंकों या समीकरणों से भी आगे वास्तविक लोगों की कहानियों से जुड़ा एक जीवन्त विषय है।

चित्र-1 : आकारों की सममिति पर आधारित पेपर कटिंग गतिविधि।

ऐसी गतिविधियाँ जो बच्चे ख़ुद से करके सीखें, काफ़ी महत्त्वपूर्ण हैं। **सद्दाम हुसैन** *बताते हैं कि पिछली बार चौथी-पाँचवीं व उससे ऊपर की कक्षाओं के बच्चों के साथ पेपर क्राफ्ट गतिविधियों की योजना बनाई गई थी। इसका मुख्य उद्देश्य यह था कि बच्चे दृश्यात्मक समझ विकसित कर परिकल्पनाएँ कर सकें। यह देखा गया है कि जब गणित दिवस पर बच्चों से ऐसी रोचक गतिविधियाँ करवाई जाती हैं, तो इसका असर बाद में भी शिक्षकों के पढ़ाने के तरीक़ों पर पड़ता है।*

मोख़्तर ज़मान : *हमारे स्कूल के बाल शोध मेले में हमने एक मैथमेटिक्स कॉर्नर बनाया था। वहाँ बच्चों ने पहेलियों को हल करने, नम्बर गेम्स खेलने और इसी तरह की अलग-अलग गतिविधियों में ख़ूब उत्साह से भाग लिया। मैंने पाया कि इसके बाद जब हमने नियमित कक्षाओं में पढ़ाई के दौरान मापन अध्याय में वज़न और ज्यामिति अध्याय में कोण के बारे में बताया तो उन्हीं विद्यार्थियों ने काफ़ी अधिक रुचि दिखाई।*

बकौल मोख़्तर ज़मान, जब मैं छात्र था, उस वक़्त हमारे स्कूल में एक गणित प्रयोगशाला स्थापित की गई थी। हमसे कहा गया कि हम अपने छोटे-मोटे शोध कार्य भी यहाँ कर सकते हैं। उस समय हम सभी विद्यार्थी उलझन में थे और यह सोचकर आश्चर्यचकित भी कि 'भला गणित में कोई शोध कैसे हो सकता है?' लेकिन जल्दी ही हमारी जिज्ञासा उत्साह में बदल गई, जब हमसे अपने-अपने छोटे प्रोजेक्ट तैयार करने को कहा गया। मुझे आज भी याद है कि तब मैंने अपने प्रोजेक्ट के लिए बीजगणितीय सूत्र $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ को चुना था। उस वक़्त मेरे घर में कुछ निर्माण कार्य चल रहा था। तो मैंने संगमरमर के एक टुकड़े पर दो वर्ग और दो आयत उकेरकर इस सूत्र को समझाया था। भले ही यह बेहद

साधारण-सा आइडिया था, मगर मुझे ख़ुद पर बड़ा फ़क्र महसूस हो रहा था। बाद में जब सभी विद्यार्थियों ने अपने मॉडल जमा किए, तो 22 दिसम्बर को राष्ट्रीय गणित दिवस के अवसर पर एक प्रदर्शनी आयोजित की गई। यह पहला मौक़ा था, जब हमारे स्कूल में गणित दिवस मनाया गया और इसकी शुरुआत हमारे ही प्रोजेक्ट्स एवं रचनात्मकता से हुई थी।

सौम्याश्री कहती हैं कि *इस दिवस को कई अलग-अलग तरीक़ों से मनाया जा सकता है। मुझे ऐसे ही एक ख़ास आयोजन की याद है, जब मैं शिक्षिका थी। मुझे हाईस्कूल के विद्यार्थियों के साथ गतिविधियों की योजना बनाने का अवसर मिला था। हमने अन्य शिक्षकों और अभिभावकों के साथ मिलकर एक ऐसा कार्यक्रम तैयार किया, जिसके आयोजन की पूरी ज़िम्मेदारी विद्यार्थियों को ही दी गई थी।*

विद्यार्थियों ने सम्भाला था मोर्चा : *कक्षा आठवीं से दसवीं तक के विद्यार्थियों ने छोटे बच्चों के प्रशिक्षण और मार्गदर्शन की ज़िम्मेदारी ली। एक समूह ने स्कूल की सड़क पर खड़े होकर यह जानने के लिए एक सरल सर्वे किया कि कितने बच्चे प्लास्टिक की बोतल लेकर स्कूल आते हैं। उन्होंने सारे आँकड़े एकत्रकर अपने निष्कर्ष स्कूल असेंबली के समक्ष पेश किए। आँकड़ों को एकत्र करने, उनको व्यवस्थित करने और फिर साझा करने की पूरी प्रकिया से उन्हें गणित के एक नए उद्देश्य का बोध हुआ। सबसे महत्त्वपूर्ण बात, उनके काम का सीधा असर भी हुआ : प्रधान अध्यापक ने स्कूल में 'नो प्लास्टिक यूजेस वीक' मनाने का निर्णय लिया। इससे विद्यार्थियों को समझ में आया कि गणित असल दुनिया के फ़ैसलों को प्रभावित कर समाज में सकारात्मक बदलाव भी ला सकता है।*

साथ मिलकर सीखना : *एक दूसरा समूह उन छोटे बच्चों के साथ जुड़ा, जिन्हें गणित में अकसर कठिनाई होती थी। हाईस्कूल के विद्यार्थियों ने क्षेत्रफल और परिधि जैसी अवधारणाओं को बेहद व्यावहारिक और सहज तरीक़ों से सिखाया। वे छोटे बच्चों और मापने वाली टेप को लेकर खेल के मैदान में गए। फिर ग्राफ़ पेपर का इस्तेमाल करके क्षेत्रफल निकालना सिखाया। इस तरह बड़े विद्यार्थियों ने इन अवधारणाओं को जीवन्त बनाकर सीखने की पूरी प्रक्रिया रोचक बना दी। इन सत्रों में अभिभावकों और शिक्षकों ने भी पूरा सहयोग किया। छोटे बच्चों को सारी बातें न केवल अच्छे से समझ में आईं, बल्कि गणित को लेकर उनका आत्मविश्वास भी बढ़ा। बड़े विद्यार्थियों को धैर्य के साथ पढ़ाते और समझाते हुए देखना दिल को छू लेने वाला था। इसने गणित को एक सहभागी, सहायक और आनन्ददायक विषय बना दिया।*

इस तरह के आयोजनों से क्या सीखने को मिलता है, इस बारे में **नरेन्द्र कोठियाल** कहते हैं : *गणित को रोज़मर्रा के अनुभवों से जोड़ना ज़रूरी है। इसलिए असाइनमेंट्स भी ऐसे होने चाहिए, जो गणितीय अनुप्रयोगों से सीधे जुड़े हों।*

ज़्यादातर विद्यार्थियों को मॉडल बनाना पसन्द होता है। बस ज़रूरत इस बात की है कि इसे कक्षाओं में पढ़ाई जाने वाली थ्योरियों के साथ अर्थपूर्ण तरीक़े से जोड़ा जाए, ताकि सीखने की गुणवत्ता बढ़ सके। उदाहरण के लिए, यदि एक सिलेंडर की त्रिज्या (रेडियस) कुछ बढ़ा दी जाए और दूसरे सिलेंडर की ऊँचाई भी उतनी ही बढ़ा दी जाए, तो उनके आयतन (वॉल्यूम) में क्या बदलाव आएगा? इस तरह के प्रश्न और गतिविधियाँ विद्यार्थियों की समझ व गणनात्मक क्षमता को गहराई देती हैं। इसे सुनिश्चित करने के लिए यहाँ कुछ प्रमुख तरीक़े दिए गए हैं :

1. *विद्यार्थियों को उस विषय से जुड़े सवालों के लिए पहले से तैयार करना चाहिए, ताकि वे पूरे आत्मविश्वास के साथ उनका सामना कर सकें।*
2. *विद्यार्थियों को स्वतंत्र रूप से खोज-पड़ताल करने और समझने के लिए अधिक-से-अधिक अवसर दिए जाने चाहिए।*
3. *आयोजन के लिए विद्यार्थियों को तैयारी और उसकी रिहर्सल करनी चाहिए।*
4. *तैयारी के लिए विद्यार्थियों को पर्याप्त समय दिया जाना चाहिए।*

कंचन इस पूरी चर्चा का सार इस तरह से पेश करती हैं :

राष्ट्रीय गणित दिवस मनाना अच्छा है, लेकिन इसकी सार्थकता तभी है, जब यह केवल औपचारिकता बनकर न रह जाए। इसका मुख्य उद्देश्य ऐसा माहौल बनाना है, जिसमें विद्यार्थी नई-नई पड़ताल करने, सवाल पूछने, ग़लतियाँ करने

और मज़े-मज़े में गणित सीखने के लिए प्रेरित हो सकें। मैंने दोनों तरह के आयोजन देखे हैं। एक प्राथमिक कक्षा में बच्चे पज़ल्स हल करने व पैटर्न को पहचानने की प्रक्रिया के दौरान नए विचार सोचते हैं, गेम्स खेलते हैं, चुनौतियों का सामना करते हैं और यहाँ तक कि ग़लतियाँ भी करते हैं। वहीं, एक अन्य कक्षा में इसकी केवल खानापूर्ति की जाती है और इसके असल मक़सद से इसका कोई जुड़ाव नहीं रहता है। हालाँकि दोनों ही स्थितियों की सकारात्मक बात यह है कि इससे शिक्षक और विद्यार्थी अपनी रोज़मर्रा की दिनचर्या से बाहर निकलकर कुछ नया सोचने को प्रेरित ज़रूर होते हैं। पहले ही पढ़ाए जा चुके विषयों से अर्जित ज्ञान पर आधारित डिज़ाइनिंग प्रॉब्लम्स, पज़ल्स और गेम्स तैयार करना एक मज़ेदार व बिना दबाव वाला आकलन का तरीक़ा बन जाता है, जो शिक्षकों को यह जानने में मदद करता है कि बच्चे अवधारणाओं को कितना समझ पाए हैं। साथ ही यह विद्यार्थियों के लिए खेल-खेल में सीखने का अवसर भी बन जाता है।

पते की बात : सभी गतिविधियाँ पाठ्यक्रम से सम्बद्ध होनी चाहिए और साथ ही वे विद्यार्थियों को यह समझने में मदद करें कि किताबों में दिया गया विषय केवल लिखने-पढ़ने वाले अभ्यासों तक सीमित नहीं है।

यह दिवस न सिर्फ़ विद्यार्थियों के लिए, बल्कि शिक्षण की प्रभावशीलता को परखने के लिए भी एक अनौपचारिक आकलन का अवसर बन सकता है।

जब विद्यार्थियों को ज़िम्मेदारी दी जाती है, तो वे केवल गणित ही नहीं सीखते हैं, बल्कि इससे उन्हें अपने जीवन-कौशल को विकसित करने का भी मौक़ा मिलता है। यह आयोजन गणितज्ञों व उनके अनथक प्रयासों की कहानियों, गणित के अनुप्रयोगों के उदाहरणों और गणितीय सवालों को हल करने की ख़ुशी के ज़रिए बच्चों को प्रेरित करने का एक अवसर भी होता है।

हर कक्षा के अधिगम प्रतिफलों को ध्यान में रखते हुए जब ऐसे दिवस आयोजित होते हैं, तो स्कूली गणित शिक्षण की परिकल्पना कोई दूरवर्ती सपना नहीं रह जाती, बल्कि एक वास्तविक सम्भावना बन जाती है।

निष्कर्ष

देश भर में गणित दिवस मनाने के लिए जो तैयारियाँ की जाती हैं और जिस स्तर पर विचार-विमर्श किया जाता है, उसे देखना सुखद था। यह दिवस पाठ्यक्रम को जीवन्त और सीखने-सिखाने को रोमांचक बनाने का अवसर होता है, बशर्ते ऐसे आयोजन के उद्देश्यों की समझ एकदम स्पष्ट हो। यह अलग-अलग क्षमताओं वाले विद्यार्थियों को अपनी प्रतिभा प्रदर्शित करने का अवसर भी देता है और साथ ही उनकी व्यक्तिगत योग्यता व आत्मविश्वास को मज़बूत बनाने में भी मददगार होता है।

इस आलेख में इनका योगदान रहा :

आशीष गुप्ता
डिस्ट्रिक्ट लीडर, अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन, जयपुर, राजस्थान

जगदीश जी.
सहायक शिक्षक, जीएचपीएस, अम्मनकेरे, कुडलिगी, ज़िला विजयनगर, कर्नाटक

जयश्री सुब्रमणियन
एजुकेशनल आउटरीच ऑफिसर, आईआईटी, पलक्कड़, केरल

कंचन
ब्लॉक कॉर्डिनेटर, अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन रुद्रप्रयाग, उत्तराखण्ड

करण सिंह
सदस्य, अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन रुद्रप्रयाग, उत्तराखण्ड

मोख़्तर ज़मान
शिक्षक, अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन, धमतरी, छत्तीसगढ़

नरेन्द्र कोठियाल
शिक्षक, अज़ीम प्रेमजी स्कूल, उत्तरकाशी, उत्तराखण्ड

नुज़हत अंजुम एस. जे.
ग्रेजुएट प्राइमरी टीचर, जीएचपीएस, गोविन्दगिरि, कुडलिगी, ज़िला विजयनगर, कर्नाटक

पूजा दुमगा,
ब्लॉक कॉर्डिनेटर, अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन रुद्रप्रयाग, उत्तराखण्ड

सौम्याश्री एन. जे.
रिसोर्स पर्सन, अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन, बेंगलूरु

सद्दाम हुसैन
डिस्ट्रिक्ट कॉर्डिनेटर, अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन, प्रतापगढ़, राजस्थान

अनुवाद : जयजीत अकलेचा **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

राष्ट्रीय गणित दिवस

स्कूलों में सार्थक आयोजनों की योजना

पद्मप्रिया शिराली

अपने स्कूल के दिनों में हम कभी-कभार विज्ञान और गणित की प्रदर्शनियों में हिस्सा लिया करते थे। पूरा अनुभव मज़ेदार तो होता था, लेकिन हमें कभी भी एक सुव्यवस्थित प्रदर्शनी की गहराई को महसूस करने का मौक़ा नहीं मिल पाता था। चूँकि हमें स्टॉल सम्भालने की ज़िम्मेदारी दी जाती थी और इसलिए हम अकसर पूरा दिन वहीं बिता देते थे। इससे हम अन्य स्टॉलों को देखने, लोगों से मिलने-जुलने और प्रदर्शित वस्तुओं या विज्ञान मॉडलों पर विचार करने से वंचित रह जाते थे। विद्यार्थी और बाद में शिक्षक के तौर पर मेरे अनुभवों ने मुझे एहसास कराया कि अच्छी तरह से व्यवस्थित गणित प्रदर्शनी या गणित दिवस के आयोजन के लिए सोच-समझकर बनाई गई योजना कितनी ज़रूरी है।

ऋषि वैली में अपने अध्यापन काल के दौरान मेरा श्री पी. के. श्रीनिवासन के मार्गदर्शन में मैथमेटिक्स एक्स्पोजिशन (मैथ एक्स्पो या गणित प्रदर्शनी) की अवधारणा से परिचय हुआ। इसके बाद मैंने कई वर्षों तक गणित विभाग के अन्य साथियों के साथ मिलकर इस परम्परा को आगे बढ़ाया।

मैथ एक्स्पो को लेकर मेरे मेंटर के विज़न का केन्द्रीय बिन्दु था 'पाठ्यक्रम की सैर'। इसमें यह ध्यान रखा जाता था कि स्टॉल के लिए वही विषय चुने जाएँ, जो स्कूली गणित की प्रमुख अवधारणाओं पर आधारित हों। इन्हें उपयोग में लाई गई सामग्री, कार्ड्स, पोस्टर्स, मैथ गेम्स, पज़ल्स आदि द्वारा बनाया जाता था। इस प्रदर्शनी के दो मक़सद होते थे। स्टॉल पर आने वाले हर विद्यार्थी के लिए वहाँ प्रदर्शित मॉडल्स या तो उसे पहले की कक्षाओं में पढ़ी गईं अवधारणाओं को फिर से ताज़ा करने का मौक़ा दें और या फिर इस बात की झलक कि अगली उच्च कक्षाओं में उसका सामना किन अवधारणाओं से होगा। चूँकि वहाँ सारी अवधारणाएँ गेम्स या फिज़िकल एड के रूप में प्रस्तुत की जाती थीं, जिससे दर्शकों में दिलचस्पी बनी रहती थी। यह निश्चित ही विद्यार्थियों में गणित के प्रति सामान्य रुचि बढ़ाने का माध्यम तो बनता ही, साथ ही उन्हें इस विषय को लेकर चर्चा करने का अवसर भी मिलता था। इससे उनमें धीरे-धीरे गणित को लेकर आत्मविश्वास में भी बढ़ोतरी होती थी।

भारत में राष्ट्रीय गणित दिवस हर साल 22 दिसम्बर को महान गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन के जन्म दिवस पर मनाया जाता है। अन्तर्राष्ट्रीय गणित दिवस 14 मार्च को मनाया जाता है। यह तारीख़ 'पाई' के शुरुआती तीन अंकों (3.14) का प्रतिनिधित्व करती है। दरअसल, वेस्टर्न कैलेंडर के प्रारूप में लिखने पर ये अंक 14 मार्च की तारीख़ बनाते हैं।

कई स्कूलों में गणित दिवस मनाया जाता है और इसमें तरह-तरह की रोचक गतिविधियाँ व प्रेरक प्रस्तुतियाँ शामिल की जाती हैं। ये गतिविधियाँ समय की कमी की वजह से आमतौर पर नियमित कक्षाओं में सम्भव नहीं हो पातीं हैं।

मैं यहाँ संक्षेप में ऐसे आयोजनों के संगठनात्मक पहलुओं पर बात करूँगी। ऐसे दिवस के लिए इस अंक (नवम्बर 2025) के पुलआउट में कुछ गतिविधियों के सुझाव दिए गए हैं। बेहतर होगा कि इन गतिविधियों में

की-वर्ड : गणित प्रदर्शनी, उत्सव, सामग्री, व्यवस्थाएँ, तैयारी

गणित की विभिन्न शाखाओं जैसे अंकगणित, ज्यामिति, सांख्यिकी, तर्कशास्त्र आदि का प्रतिनिधित्व रहे। यह याद रखें कि गतिविधियों का एक बड़ा हिस्सा आम लोगों के लिए भी सुगम होना चाहिए, ताकि अभिभावक और अन्य दर्शक भी भाग लेने के लिए प्रेरित हों। हमारा सिद्धान्त है, 'गणित सभी के लिए!'

चूँकि स्टॉलों पर आने वाले दर्शक अलग-अलग पृष्ठभूमियों से होते हैं, इसलिए प्रस्तुतियाँ इतनी लचीली और सरल होनी चाहिए कि अधिक-से-अधिक लोग उन्हें सहज रूप से समझ सकें। साथ ही, प्रत्येक गतिविधि ऐसी हो कि उसे 5 से 10 मिनट के भीतर पूरा किया जा सके, ताकि सभी दर्शक आराम से हर स्टॉल का मज़ा ले सकें।

विद्यार्थी समूहों का निर्माण

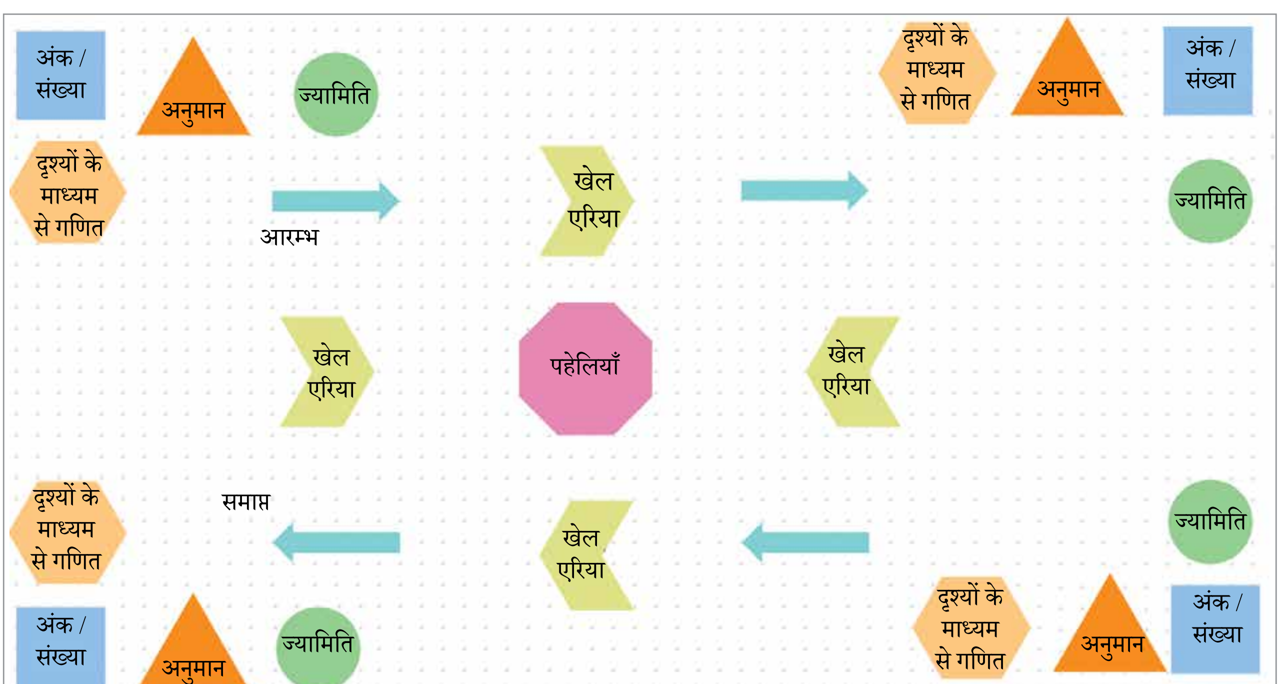
स्टॉल पर कौन-सा विषय प्रस्तुत किया जाना है, इसका निर्धारण चार विद्यार्थियों का एक समूह कर सकता है। ये समूह कक्षा-वार बनाए जा सकते हैं, ताकि स्कूल का हर विद्यार्थी किसी-न-किसी समूह का हिस्सा रहे। प्रत्येक समूह से दो विद्यार्थी एक निर्धारित समय तक अपने चयनित विषय का प्रदर्शन करेंगे। इस दौरान बाक़ी दो विद्यार्थी अन्य स्टॉलों का अवलोकन कर सकेंगे। उसके बाद वे स्टॉल पर रहेंगे और पहले वाले दोनों विद्यार्थी अन्य स्टॉलों का अवलोकन करेंगे। इस व्यवस्था से हर विद्यार्थी को सभी स्टॉलों का अवलोकन करने का अवसर मिल सकेगा।

ऐसे आयोजन के लिए विद्यार्थियो को किस तरह की तैयारी करनी चाहिए?

विद्यार्थी अपने स्टॉल पर जिस विषय या समस्या को प्रस्तुत करने जा रहे हैं, उस पर उन्हें गहराई से कार्य करना चाहिए। उनके पास इसके एक-या-एक से अधिक समाधान होने चाहिए। उन्हें पहले से ही अनुमान लगाकर रखना चाहिए कि दर्शक किस प्रकार की प्रतिक्रियाएँ दे सकते हैं, वे किस तरह के सवाल पूछ सकते हैं इसलिए उनके विभिन्न तरह के सवालों के जवाब देने के लिए तैयार रहना चाहिए। ज़रूरत पड़ने पर अपने समाधान को स्पष्ट रूप से समझा सकें, इसकी भी पूरी तैयारी होनी चाहिए। इसके लिए पहले से ही थोड़े अभ्यास की ज़रूरत होगी। विषय या समस्या, जिसका निर्धारण शिक्षक या विद्यार्थी स्वयं कर सकते हैं, के लिए सम्भावित मानदण्ड इस प्रकार हैं : जिसे 5 से 10 मिनट के भीतर हल किया जा सके; इसमें इतने स्तर हों कि गणित की अलग-अलग क्षमताओं और ज्ञान रखने वाला कोई भी दर्शक उसके समाधान का प्रयास कर सके; जो कक्षा में पढ़ाए गए विषय का ही विस्तार हो इत्यादि।

स्टॉलों का लेआउट

स्टॉल लगाने के लिए स्कूल का खेल मैदान (अगर आउटडोर करना चाहें) या असेंबली हॉल (अगर इनडोर करना चाहें) जैसी बड़ी जगहों का चयन करना अच्छा होता है। 4 से 5 स्टॉल को मिलाकर एक छोटा-सा क्लस्टर बनाया



चित्र-1 : मैथ एक्सपो में स्टॉल्स के लिए सुझाया गया एक लेआउट।

जा सकता है। ऐसे ही कई क्लस्टर एक-दूसरे से थोड़ी-थोड़ी दूरी पर लगाए जा सकते हैं। इससे आपसी चर्चा और उत्साह की वजह से होने वाला शोर नियंत्रण में रहता है। प्रत्येक क्लस्टर में अलग-अलग तरह की गतिविधियों के स्टॉल रखना बेहतर होता है। जैसे एक क्लस्टर में संख्या आधारित गतिविधियों, ज्यामिति, अनुमान लगाने वाले खेल और दृश्य/ पैटर्न आधारित गणित के अलग-अलग मिश्रित स्टॉल रखे जा सकते हैं। एक जैसी गतिविधियों वाले सभी स्टॉल एक ही जगह रखने से बचें, अगर ऐसा होगा तो उनमें दोहराव होने की सम्भावना बढ़ जाएगी। इस वजह से हो सकता है कि किसी-किसी को वह पूरा क्लस्टर उबाऊ लगे और कहीं पर बहुत ज़्यादा भीड़ हो सकती है।

विभिन्न क्लस्टर्स के बीच खाली जगह में कुछ गेम्स भी रखे जा सकते हैं। इसका फ़ायदा यह होगा कि अगर कुछ लोगों को स्टॉल्स की भीड़ के छँटने का इन्तज़ार करना पड़े, तो वे वहाँ गेम्स खेलकर समय बिता सकते हैं।

ऐसे आयोजन की योजना में गणितीय अनुमानों की भी अहमियत होती है। जैसे कितने लोग आएँगे, हर स्टॉल पर लोग कितनी देर तक रुकेंगे और दर्शक किस क्रम में आगे बढ़ेंगे आदि का अनुमान लगाना। वरिष्ठ विद्यार्थियों के लिए यह एक उपयोगी अभ्यास होगा कि वे दर्शकों की आवा-जाही के लिए ऐसा रूट प्लान तैयार करें, जिससे लोग एक क्षेत्र से दूसरे क्षेत्र में आसानी से पहुँच सकें और किसी भी स्थान पर अनावश्यक भीड़ न हो। साथ ही, योजना में सुरक्षा से जुड़े पहलुओं जैसे आपात स्थिति में भीड़ को तेज़ी से बाहर निकालने की व्यवस्था को भी शामिल किया जाना चाहिए।

दिन भर के कार्यक्रमों की रूपरेखा

स्कूल में दिन की शुरुआत आमतौर पर असेंबली से होती है, जहाँ सभी छात्र-छात्राएँ और शिक्षक संगीत, समाचार व अन्य जानकारी साझा करने के लिए एकत्र होते हैं। गणित दिवस के अवसर पर यह असेंबली इस दिन से जुड़े रोचक तथ्यों या किसी महान गणितज्ञ के कार्यों पर केन्द्रित हो सकती है। विद्यार्थी किसी गणितज्ञ के जीवन से जुड़ी दिलचस्प घटनाओं या गणित आधारित कहानियों पर छोटी नाट्य प्रस्तुति दे सकते हैं। इसके लिए स्क्रिप्ट लिखने या रिसर्च करने से बच्चों में कई तरह की एक-दूसरे से जुड़ी क्षमताओं का विकास होता है। विद्यार्थी गणित के क्षेत्र में हाल ही में हुई खोजों या अनसुलझी पहेलियों के बारे में भी चर्चा कर सकते हैं। वे तेज़ी से गणना करने की ट्रिक्स बता सकते हैं या इस बारे में बात कर सकते हैं कि गणित को लेकर उनकी क्या सोच है, इस विषय से जुड़ी किन चीज़ों में उनकी दिलचस्पी है या आगे भी इस विषय को क्यों पढ़ना चाहेंगे। इसके अलावा, सममिति, त्रिआयामी आकृतियों के एनिमेशन, पैटर्न, इल्युज़न्स आदि को समझाने वाली कुछ वीडियो क्लिपिंग्स भी प्रदर्शित की जा सकती हैं।

गणित दिवस जैसे कार्यक्रमों में प्रस्तुतकर्ता या संचालनकर्ता की भूमिका निभाने वाले विद्यार्थी जब बाद में अपनी कक्षाओं में जाते हैं, तो वे ज़िम्मेदारी निभाने के एक विशेष आत्मविश्वास से भरे होते हैं। उम्मीद कर सकते हैं कि इससे उन्हें यह महसूस होगा कि गणित सीखने की प्रक्रिया में वे सिर्फ़ दर्शक नहीं, बल्कि सक्रिय भागीदार हैं।

सम्पादक की टिप्पणी : इन सुझावों से गणित दिवस को सार्थक और सुव्यवस्थित तरीक़े से मनाने की एक रूपरेखा मिलती है। यह कार्यक्रम गणित विषय में कम रुचि रखने वाले विद्यार्थियों को भी अपनी तरफ़ आकर्षित करने की क्षमता रखता है। सम्भावित गतिविधियों, खाली जगह में खेले जाने वाले गेम्स और सांस्कृतिक कार्यक्रमों का विस्तृत विवरण इस अंक के पुलआउट में दिया गया है।

पद्मप्रिया शिराली वैली स्कूल (बेंगलूरु) और ऋषि वैली (आन्ध्र प्रदेश) स्थित कम्युनिटी मैथ सेंटर से जुड़ी हैं। वे यहाँ 1983 से काम कर रही हैं और इस दौरान उन्होंने गणित, कम्प्यूटर एप्लीकेशन, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन व तेलुगु जैसे कई विषय पढ़ाए हैं। 1990 के दशक में उन्होंने विख्यात गणितज्ञ श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ काम किया है। वे उस टीम का हिस्सा भी रहीं, जिसने ऋषि वैली रूरल सेंटर के मल्टीग्रेड एलिमेंट्री लर्निंग प्रोग्राम, जिसे 'स्कूल इन ए बॉक्स' के नाम से जाना जाता है, को तैयार किया था। वर्तमान में वे एनसीईआरटी की पाठ्यपुस्तक विकास टीम का हिस्सा हैं। उनसे padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : जयजीत अकलेचा **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

पढ़ाते-पढ़ाते हम क्या छीन लेते हैं ?

स्मृति स्मारक पाण्डा

> “शिक्षा का सबसे बड़ा अनैतिक घोटाला यह है कि जब भी आप बच्चे को कुछ सिखाते हैं, तो आप उसे खोज करने के मज़े और फ़ायदे से वंचित कर देते हैं।”
>
> — सीमोर पेपर्ट, द *चिल्ड्रन्स मशीन* (1993)

लगभग 95 साल पहले की बात है, दो साल का एक बच्चा था जिसके दिमाग़ में गाड़ियाँ-ही-गाड़ियाँ घूमती रहती थीं। उसे कारों से इतना प्यार था कि वह कार के सभी पुर्ज़ों के नाम बता सकता था। वक़्त बीतने के साथ उसने समझा कि गियर कैसे काम करते हैं और फिर गियर्स से उसका इस क़दर जुड़ाव हो गया कि वे उसके पसन्दीदा खिलौनों में शुमार हो गए। उसे बोतल के ढक्कन जैसी गोलाकार चीज़ों को एक-दूसरे की उलटी दिशा में घुमाने में मज़ा आता था। उसके लिए यह देखना हैरानी भरा होता कि कैसे एक गियर को एक दिशा में घुमाने पर दूसरा गियर दूसरी दिशा में घूमता है। ‘कार्य-कारण’ शृंखलाओं के साथ अन्तर्क्रिया और समझ बनने की यह उस बच्चे की शुरुआत थी।

चित्र-1 : Source: https://bit.ly/4ovZAA0

चित्र-2 : Source: https://bit.ly/43yokzx

वह बच्चा, बाद में एक किंवदन्ती बना और बना बहुत ख़ास इन्सान, जिसे इतिहास बहुत स्नेह से याद करता है। वे सीमोर पेपर्ट थे। उनका मानना था कि अगर वे अपने इस खिलौने का बयान शिक्षाविदों के बीच करेंगे, तो ज़्यादातर उन्हें मशविरा देंगे कि वे उससे ऐसा गियर सेट बना लें जिसका इस्तेमाल करके बच्चे गियर्स के बारे में सीख सकें। लेकिन उनकी कहानी का निचोड़ यह था कि वे गियर्स पर फ़िदा थे। इसीलिए वे गियर्स के साथ लगातार खेलते रह सकते थे। उन्हें गियर्स को घुमाना पसन्द था। उन्हें लगता था कि ऐसे गियर सेट के साथ दी गई कोई भी मार्गदर्शिका खेल में अड़चन ही बनेगी।

शिक्षाशास्त्र पर अपने विचारों पर लगातार काम करने के बाद सीमोर पेपर्ट इस निष्कर्ष पर पहुँचे कि स्पष्ट निर्देशों के बिना कोई गियर सेट अन्वेषण और खोज को बढ़ावा देने के लायक़ नहीं हो

की-वर्ड : *खोज, अन्वेषण, स्वतंत्र सीखना, सीखने में सहायता*

पाएगा, मगर शायद कम्प्यूटर यह भूमिका निभा सकते हैं। उन्होंने 'लोगो' [LOGO] खेल (**देखें** [2]) विकसित किया और इसे ऐसा बनाया जो उनके मुताबिक़ उस समय की ज़रूरत थी।

कुछ समय पहले मुझे पेपर्ट की पुस्तक *'माइण्डस्टॉर्म्स'* (Mindstorms)[1] मिली। तब तक मैंने पेपर्ट के बारे में नहीं सुना था। *माइण्डस्टॉर्म्स* की प्रस्तावना में उन्होंने गियर्स के साथ अपने जुड़ाव और काम का ज़िक्र किया है। उनका कहना है कि कम्प्यूटर और प्रोग्रामिंग बच्चों के लिए ऐसी भूमिका निभा सकते हैं और ऐसा माहौल बना सकते हैं जिसमें गणितीय विचार थोपे हुए न लगें, बल्कि स्वाभाविक महसूस हों। उनका बुनियादी विश्वास यह है कि सीखने का मतलब ज्ञान को हासिल कर लेना भर नहीं है, बल्कि ऐसे वातावरण में रहना है जो सीखने में मददगार हो। यह वैसा ही है जैसे इंग्लैंड में परवरिश पाने वाला बच्चा अँग्रेज़ी में ही बात-चीत करने के माहौल में रहने की वजह से सहज ही धाराप्रवाह अँग्रेज़ी सीख जाता है, जबकि उसी बच्चे को भारत में अँग्रेज़ी में बात-चीत करने में मुश्किल पेश आ सकती है। पेपर्ट का मशविरा है कि गणितीय 'माहौल' बनाने के लिए स्कूल कम्प्यूटर का इस्तेमाल कर सकते हैं, जिससे छोटे बच्चे स्कूल में गणित को किसी अजनबी और मुश्किल विषय की तरह न देखें बल्कि कम्प्यूटर की सहायता से अन्वेषण और विज़ुअल प्रोग्रामिंग के ज़रिए स्वाभाविक रूप से ज्ञान का निर्माण कर पाएँ।

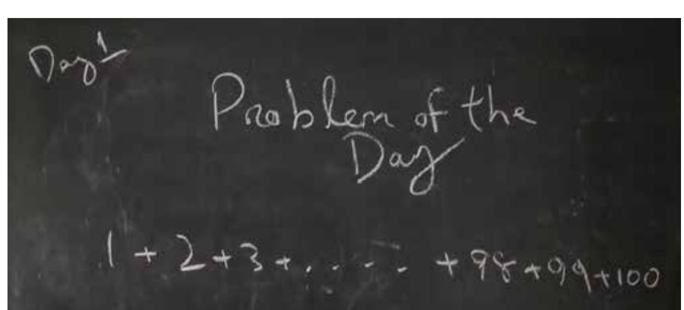
कक्षा के अन्दर लोकतंत्र

अब मैं ओड़िया-माध्यम के स्थानीय प्राथमिक विद्यालय में अँग्रेज़ी पढ़ाने के अपने हाल ही के काम पर कुछ रोशनी डाल रहा हूँ। हो सकता है कि मैं इस हिस्से में कक्षा के माहौल को नए सिरे से तैयार करने की जो चर्चा करूँगा, उसका गणित सीखने से कोई सीधा सम्बन्ध न हो, लेकिन पेपर्ट के गियर्स का भी गणित से क्या रिश्ता था? मेरा विचार यह है कि उस तरह का माहौल तैयार किया जाए, जिस तरह के माहौल में कक्षा को ढलना चाहिए। ऐसी कक्षा जहाँ सीखने-सिखाने का और ज्ञान का निर्माण विद्यार्थियों द्वारा किया जाए और वे जो कुछ सीखें वह उन्हें अपना लगे। हम सिर्फ़ जहाँ ज़रूरी हो उन्हें सीखने में शुरुआती मदद के लिए कुछ निर्देश देंगे। इससे विद्यार्थी पुरजोश और मशग़ूल रहते हैं। उनके दिमाग़ को जानकारी याद करने और जवाब लिखने की बजाय लगातार लीक से हटकर सोचने में लगाया जाता है। कई विद्यार्थी गणित से जुड़ने से पहले ही उससे डरने लगते हैं। क्योंकि उनका माहौल बार-बार उनमें यही सोच बैठाता है कि यह विषय अपने आप में बहुत कठिन और डरावना है। और इसमें सिर्फ़ एक ही सही तरीक़ा होता है जो एकमेव सही जवाब तक ले जाता है। इसलिए, विद्यार्थियों पर सीधे ही गणित के प्रश्न थोपने की बजाय उन्हें पहले इस बारे में सोचना और बात करना शुरू करवाना मुझे ज़्यादा स्वाभाविक लगा।

फ़िल्म *'डेड पोएट्स सोसायटी'* में रॉबिन विलियम्स के क़िरदार मिस्टर कीटिंग्स से प्रेरित होकर मैंने ऐसी कक्षा बनाने का इरादा किया, जो गहराई से सोचना और महसूस करना सीखे और हर दिन का पूरी तरह सदुपयोग करे। मैंने कक्षा-5 को लोकतंत्र को प्रतिबिम्बित करने वाली कक्षा बनाना तय किया। सबसे पहले, हमने मंत्रिमण्डल बनाया। प्रज्ञान मुख्यमंत्री थे, इप्सिता वाचन मंत्री। जब भी विद्यार्थी ज़ोर से वाचन करने में हिचकते, तो वे कक्षा को दो समूहों में बाँट देते और अपने साथियों की अगुवाई करते थे। कमरे में कोलाहल होता मगर मज़ा आता था। कक्षा साथियों की हौसला-अफ़ज़ाई और पुरजोश वाचन से गूँज रही होती थी। फिर, हमने विस्तार करके एक विधायी निकाय बनाया : कक्षा-5 लोकसभा बनी, कक्षा-4 राज्यसभा हुई, जिसमें शिक्षक पीठासीन अधिकारी थे। बहस हुई कि सिनेमा अच्छा है या बुरा। आख़िर में, फ़िल्मों को ज्ञान और नई-नई चीज़ों से रूबरू करवाने वाला स्रोत मानते हुए फ़िल्मों के पक्ष में सर्वसम्मत मतदान के साथ बहस समाप्त हुई।

आज का सवाल

सई निगम और स्वागत नाम के दो विद्यार्थियों को गणित बहुत पसन्द था। उन्हें 'आज का सवाल मंत्री' नियुक्त किया गया। उनका काम था कि वे स्कूल के ब्लैकबोर्ड पर हर रोज़ एक रोचक सवाल लिखेंगे। बाक़ी विद्यार्थी स्कूल के समय में इन्हें पढ़ व हल कर सकते थे। यह तय किया गया कि



चित्र-3

सवाल के समाधान पर चर्चा हर रोज़ स्कूल ख़त्म होने पर की जाएगी।

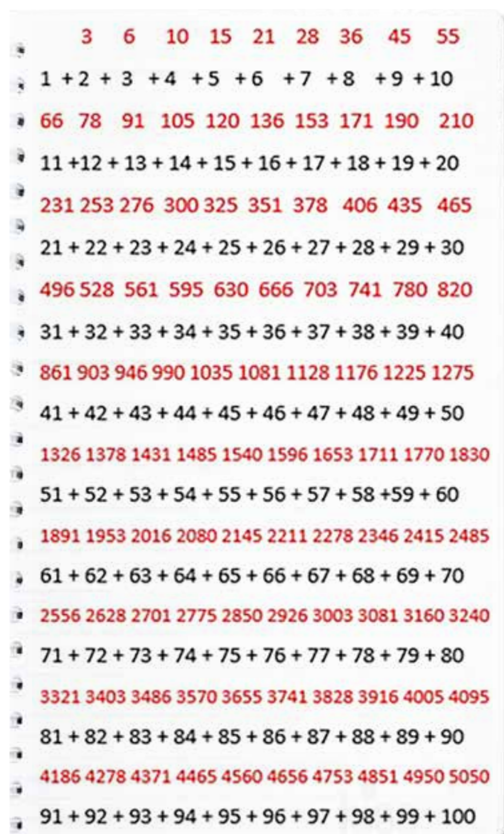
चित्र-4

दोनों 'मंत्रियों' को *'दिनकु खण्डिए अंका (रोज़ का एक सवाल)'* नाम की ओड़िया किताब दी गई, जिसके लेखक प्रो. चन्द्र किशोर महापात्र हैं। वे अपने समय में ओडिशा में ओलंपियाड प्रशिक्षक के तौर पर बहुत सक्रिय थे। उनकी किताब का गठन बहुत ही रोचक है। किताब में 12 अध्याय हैं, जिनमें से हर अध्याय एक महीने से जुड़ा हुआ है। हर अध्याय में 30, 31 या 28 सवाल हैं; यह संख्या उस महीने पर निर्भर करती है जिसके नाम पर अध्याय बनाया गया है। सभी सवालों के समाधान ख़ुद अध्ययन से समझ में आने लायक़ हैं और सवालों वाले अध्याय के बाद इनके जवाब दिए गए हैं। लेकिन मैंने यह साफ़ कर दिया था कि हमें सवाल का हल देखने से पहले कम-से-कम 30 मिनट से 1 घण्टे तक उस पर काम करना चाहिए। 'आज का सवाल मंत्री' की भूमिका के लिए विद्यार्थियों को चुनते समय उनकी ईमानदारी और निष्ठा मेरे लिए महत्त्वपूर्ण कसौटी थी। 23 जुलाई, 2025 को बोर्ड पर पहला सवाल लिखा गया, जो यह मशहूर समस्या थी $1 + 2 + 3 + 4 \ldots\ldots + 97 + 98 + 99 + 100 = ?$; इसे प्रोफ़ेसर सी. के. महापात्र की एक अन्य किताब के कवर से लिया गया था।

ज़्यादातर विद्यार्थियों ने इस सवाल के हल होने की सम्भावना को ही ख़ारिज कर दिया। लेकिन तीन विद्यार्थी (सई सम्पूर्णा, प्रज्ञान और इप्सिता) इस सवाल पर काम करने में जुट गए। इससे भी महत्त्वपूर्ण यह था कि वे एक साथ मिलकर इस पर काम कर रहे थे। लोकतांत्रिक कक्षा-व्यवस्था में जिस तरह के आपसी सहयोग की मुझे उम्मीद थी, यह वैसा ही था। यहाँ तक कि मध्यान्तर में भी मैं उन्हें इस सवाल को हल करते हुए देख सकता था।

$$1 + 2 = 3$$
$$3 + 3 = 6$$
$$6 + 4 = 10$$
$$10 + 5 = 15$$

और इसी तरह आगे वे जोड़ लगाने लगे, जब तक कि वे गड़बड़ा नहीं गए। वे कभी एक संख्या को दो बार जोड़ने लगते तो कभी ग़लत योगफल प्राप्त करने लगते और तब उन्हें फिर से शुरू करने की ज़रूरत महसूस होती थी। स्कूल के बाक़ी शिक्षकों ने भी उन्हें इस सवाल को बार-बार हल करते हुए देखा। लगभग एक घण्टे बाद, जब मैं कक्षा-4 में पढ़ा रहा था, तो इन तीनों विद्यार्थियों ने सवाल के जवाब में 5050 का योगफल प्राप्त किया। उससे भी महत्त्वपूर्ण बात यह है कि उन्होंने सवाल का हल एक पेज पर लिखा, जिसे पाठकों की एक नज़र के लिए **चित्र-5** में प्रस्तुत किया गया है।


3 6 10 15 21 28 36 45 55
1 +2 + 3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 +10
66 78 91 105 120 136 153 171 190 210
11 +12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20
231 253 276 300 325 351 378 406 435 465
21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30
496 528 561 595 630 666 703 741 780 820
31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39 + 40
861 903 946 990 1035 1081 1128 1176 1225 1275
41 + 42 + 43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48 + 49 + 50
1326 1378 1431 1485 1540 1596 1653 1711 1770 1830
51 + 52 + 53 + 54 + 55 + 56 + 57 + 58 +59 + 60
1891 1953 2016 2080 2145 2211 2278 2346 2415 2485
61 + 62 + 63 + 64 + 65 + 66 + 67 + 68 + 69 + 70
2556 2628 2701 2775 2850 2926 3003 3081 3160 3240
71 + 72 + 73 + 74 + 75 + 76 + 77 + 78 + 79 + 80
3321 3403 3486 3570 3655 3741 3828 3916 4005 4095
81 + 82 + 83 + 84 + 85 + 86 + 87 + 88 + 89 + 90
4186 4278 4371 4465 4560 4656 4753 4851 4950 5050
91 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100

चित्र-5

इस समस्या का समाधान करने के लिए इन तीनों विद्यार्थियों की चरण-दर-चरण कोशिशों को कोई भी साफ़तौर से देख सकता है। क्या वे कार्ल फ्रीड्रिक गाउस जितने होशियार हैं, जिन्होंने अपने स्कूल के दिनों में इस सवाल का एक मशहूर समाधान निकाला था? नहीं, कम-से-कम अभी तक तो नहीं। लेकिन क्या वे उन

चित्र-6

विद्यार्थियों से बेहतर हैं जो इन्तज़ार में रहे कि उन्हें इस सवाल को हल करने का तरीक़ा सिखाया जाएगा या जिन्हें ख़ुद इस सवाल को हल करने का मौक़ा न देकर गाउस पद्धति सिखा दी गई थी? मेरा मानना है कि यक़ीनन, वे तीन इन विद्यार्थियों से बेहतर हैं।

ज़ाहिर है, इसके बाद मैंने उन्हें और कक्षा के अन्य बच्चों को गाउस और उनके शिक्षक की कहानी सुनाई। आप सोचिए कि यह उन विद्यार्थियों के लिए कितना रोमांचक रहा होगा, जो पिछले एक घण्टे से उसी सवाल को हल करने में जुटे हुए थे। फिर मैंने उन्हें गाउस की तस्वीर दिखाई और मुझे यक़ीन है कि उन्होंने पहली बार आइंस्टाइन के अलावा किसी विदेशी गणितज्ञ/ वैज्ञानिक को देखा था; मुझे यक़ीन है कि यह पहली बार था जब उन्होंने गणित से जुड़ी कहानी सुनी थी, वह भी ऐसी जो कि वास्तविक थी। इसके बाद, मैंने उन्हें 'सवाल को हल करने की कला' का 2:49 मिनट का यूट्यूब वीडियो भी दिखाया, जिसमें रिचर्ड रस्झ़िक इसी सवाल को हल कर रहे थे। हमें उसी यूट्यूब चैनल पर सुझाए गए वीडियोज़ में 151 'प्री–एलजेब्रा वीडियोज़'[6] की प्लेलिस्ट भी मिली।

'रोज़ का एक सवाल' को कक्षा में रोज़ाना की प्रथा बना लिया जाए तो यह गणितीय सोच का अच्छा माहौल बना सकती है। ये सवाल भाँति-भाँति के हो सकते हैं और दुनिया भर की गणित प्रतियोगिताओं से उम्र के अनुसार उपयुक्त आधार पर लिए जा सकते हैं (मैंने आगे 'सन्दर्भ' में ऐसी कुछ प्रतियोगिताओं के लिंक दिए हैं)। ऐसे सवाल देना बच्चों के सीखने-समझने में मददगार होता है, जहाँ वे अपना समय लेते हुए उन सवालों को हल करने के अलग-अलग तरीक़े खोज पाएँ। उदाहरण के लिए, जिस तरह का सवाल **चित्र-7** में दिखाया गया है, इसमें यदि वे देखें तो हर कॉलम में 1 व 0 की संख्या समान है और वह 2 के बराबर है, तो वे इस सवाल को आसानी से हल कर सकते हैं। लेकिन, यह भी हो सकता है कि विद्यार्थियों का एक समूह मिल-बैठकर सभी मुक़ाबलों का पूरा आरेख बनाए और इस तरह इस सवाल से बड़ा रचनात्मक नतीजा निकल सकता है। इस रवानी को बरक़रार रखते हुए आप मुक़ाबलों और प्रतियोगिताओं पर आधारित सवाल बनवा सकते हैं। हमें ऐसे सवालों से बचना चाहिए जो बहुत कठिन हों, क्योंकि इससे विद्यार्थियों की रुचि और उनका आत्मविश्वास दोनों कम हो जाएँगे। यदि वे इस तरह के ग़ैर-नियमित आसान सवालों को हल करना जारी रखेंगे, तो जल्दी ही वे कठिन सवालों को हल करना सीख जाएँगे, जो आमतौर पर सवालों के समाधान के दो-या-दो से ज़्यादा सरल विचारों का नतीजा होते हैं।

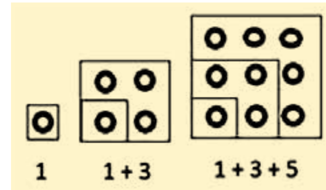
लोला, लोलो, टिया और टियो ने पिंग-पॉन्ग टूर्नामेंट में हिस्सा लिया। हर खिलाड़ी ने बाक़ी तीन खिलाड़ियों के साथ ठीक दो बार मुक़ाबला किया। नीचे खिलाड़ियों के जीत-हार के रिकॉर्ड दिए गए हैं। संख्या 1 जीत को और 0 हार को बताती है। उदाहरण के लिए, लोला ने पाँच मैच जीते और चौथा मैच हार गई। बताओ कि टियो का जीत-हार का रिकॉर्ड क्या था?

खिलाड़ी	परिणाम
लोला	111011
लोलो	101010
टिया	010100
टियो	??????

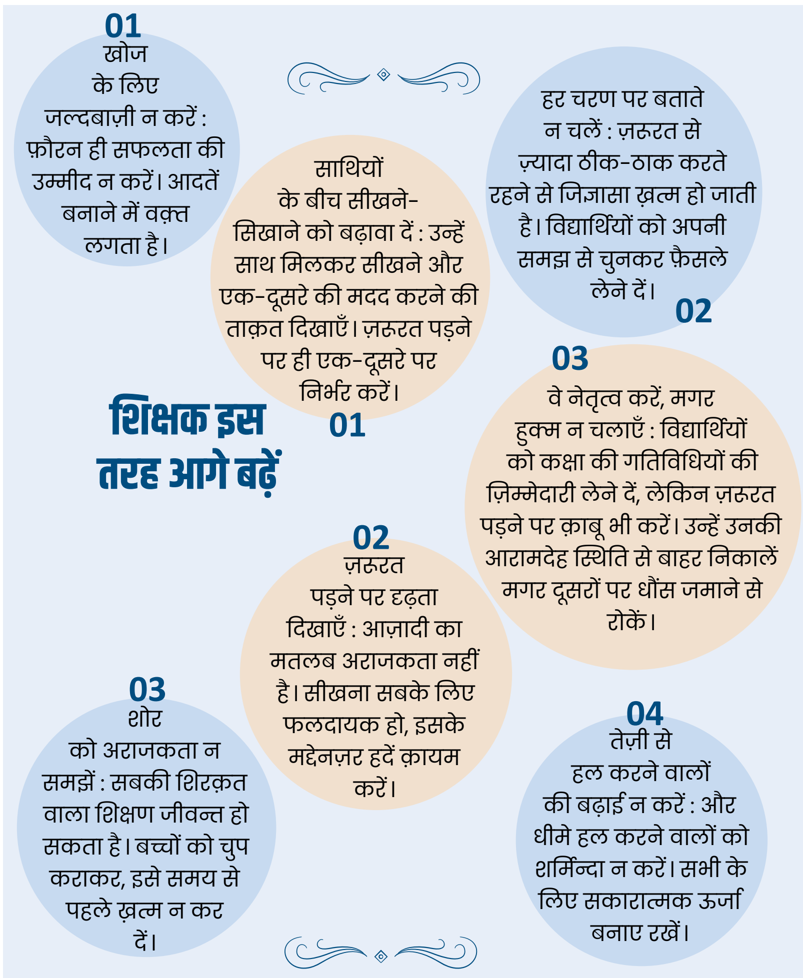
क) 000101 ख) 001001 ग) 010000 घ) 010101 च) 011000

चित्र-7 : 2023 AMC 8 Problems/Problem 8

इसके साथ ही यह समझना ज़रूरी है कि ऐसे सवाल लेना बेहतर होगा जिनसे किसी तरह का पैटर्न बनता हो, या ऐसे सवाल जिनके एक से ज़्यादा जवाब हों। उदाहरण के लिए, विद्यार्थियों को n के बहुत छोटे मानों के लिए प्रश्न दें; उन्हें पहली n क्रमागत विषम संख्याओं को जोड़ने के लिए कहें। उन्हें जवाब में पैटर्न देखने के लिए प्रोत्साहित करें। जब वे यह समझ जाएँ कि सभी योग वर्ग संख्याएँ हैं, तो धीरे-धीरे उन्हें शतरंज के बोर्ड या 'फ़ोर इन ए रो बोर्ड' या ऐसा ही कोई खेल जो उपलब्ध हो, खिलाकर उनका मार्गदर्शन करें। इसमें उन्हें वक़्त तो लगेगा, लेकिन आपसे कुछ इशारे मिलते रहें तो वे ज्यामितीय रूप में पेश करने के इस अनुभव को जीवन भर याद रखेंगे। इस तरह के काफ़ी सवाल उपलब्ध हैं। आप शुरुआत के लिए, *'एट राइट एंगल्स'* के मार्च 2025 अंक के 'पुलआउट' से, पद्मप्रिया शिराली के बहुत समृद्ध लेख 'पैटर्न्स और पूर्व-बीजगणित' से ऐसे सवाल ले सकते हैं।



चित्र-8



चित्र-9

आख़िरी मशविरा

ख़ुद से खोज करते हुए सीखने-सिखाने की शुरुआत धीमी रहती है, लेकिन यह तेज़ से तेज़तर होती जा सकती है। इस सवाल के हल के सिलसिले में मैंने जो क़िस्सा साझा किया है, वह भी अप्रैल की छुट्टियों में एक महीने से ज़्यादा समय तक चली कक्षाओं और गर्मी की छुट्टियों के बाद स्कूल खुलने के कुछ दिनों बाद सामने आया था। उस समय हम बच्चों के साथ पूरी तरह से भाषा और सामाजिक अध्ययन पर काम कर रहे थे, ताकि गणित शुरू करने से पहले उनके सोचने-समझने के तौर-तरीक़े तैयार हो सकें। हमारा मक़सद विद्यार्थियों को सीखने का तरीक़ा सिखाना है : इंटरनेट का इस्तेमाल कैसे करें, यू-ट्यूब की उपयोगी प्लेलिस्ट कैसे ढूँढ़ें और वीडियो से नोट्स कैसे लें। कौन जाने कि कक्षा-8 तक पहुँचते-पहुँचते वे आपको ऐसा लेख लिखकर दें जिसे वे *'एट राइट एंगल्स'* जैसी किसी गणित पत्रिका में छपवाने के लिए भेजना चाहते हों। अन्त में, सीमोर पेपर्ट के शब्दों में :

> **"शिक्षक की भूमिका तैयार ज्ञान प्रदान करने के बजाय, कुछ नया बनाने के लिए परिस्थितियाँ बनाने की है।"**

मेरे साथ भी ऐसा ही हुआ। मेरे पिता भौतिकविज्ञानी हैं। उन्होंने मुझे इंटरनेट को बुद्धिमानी से इस्तेमाल करने के लिए प्रोत्साहित किया, मुझे शरलॉक होम्स की कहानियाँ सुनाईं और मेरे साथ *'बायसिकल थीव्ज़'* जैसी फ़िल्में देखीं। जैसे-जैसे

वक़्त बीता, मैं कूट-लेखन [cryptography] और कूट-संकेतों [codes] पर छोटी-छोटी जासूसी कहानियाँ लिखने लगा और उन्हें *'स्टोन सूप'* जैसी पत्रिकाओं को भेजने लगा। मेरी रचनाएँ कभी छपी नहीं, लेकिन मुड़कर देखता हूँ तो यह मेरी सबसे मासूम और समृद्ध स्मृतियों में से एक है। असली काम बच्चों को गम्भीरता से लेना है, उन्हें परोसी गई जानकारियाँ जस-की-तस ग्रहण करने वाले शिक्षार्थियों के रूप में न देखकर, अपने ज्ञान के सक्रिय निर्माताओं के रूप में देखना है। बड़ा काम सिर्फ़ पढ़ाना नहीं है, बल्कि उन्हें रफ़्ता-रफ़्ता ख़ुद को पढ़ाना सिखाना है।

Reference

1. Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas.* Basic Books.
2. LOGO Programming Language Wikipedia Page https://bit.ly/3J72v3f
3. Weir, P. (Director). (1989). Dead Poets Society [Film]. Touchstone Pictures.
4. Mahapatra, C. K. ଦିନକୁ ଖଣ୍ଡିଏ ଅଙ୍କ [One Problem A Day]. The Book Point.
5. Art of Problem Solving: Sum the Numbers from 1 to 100. https://bit.ly/3Jgp2L1
6. Pre-Algebra Playlist. Art of Problem Solving. https://bit.ly/4hjkyQa
7. https://bit.ly/4hmPaAg
8. Lenchner, George. Mathematical Olympiad contest problems for children. https://bit.ly/4nj8D6v
9. Shirali, P. (2025, March). *Patterns and Pre-Algebra.* At Right Angles https://bit.ly/48BkEAy

स्मृति स्मारक पाण्डा ओडिशा प्रौद्योगिकी एवं अनुसन्धान विश्वविद्यालय से इलेक्ट्रिकल इंजीनियरिंग में 2024 के स्नातक हैं। गेट-2025 (ईई) में अखिल भारतीय रैंक 539 हासिल करने के बाद, वे पीएसयू साक्षात्कारों की तैयारी में जुटे हुए हैं। इसके साथ ही वे वंचित समुदायों के प्राथमिक और माध्यमिक विद्यालयों के विद्यार्थियों के लिए सहजकर्ता के रूप में स्वैच्छिक सेवाएँ देते हैं। उन्होंने भुवनेश्वर के आनन्द मार्ग प्राथमिक विद्यालय में अतिथि शिक्षक के रूप में कार्य किया है; यहीं उन्होंने अपनी प्राथमिक शिक्षा हासिल की थी। उनसे snktsmrk@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : हिमालय तहसीन **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

एट राइट एंगल्स के जुलाई, 2025 अंक में पेज-7 पर दी गई 'संख्याओं में कला' पहेली की व्याख्या

इस पहेली का यह हल अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन, पुदुचेरी जिला संस्थान के रिसोर्स पर्सन **कार्तिकेयन एस.एस.** ने भेजा है।

प्रश्न-1 : क्या आप इन संख्याओं को जोड़ने वाला कोई पैटर्न ढूँढ़ सकते हैं?

3 × 2	3 × 3	3 × 4
3 × 9	3 × 10	3 × 11
3 × 16	3 × 17	3 × 18
3 × 23	3 × 24	3 × 25

सामान्य अवलोकन :

असल में, यह 3 की गुणा तालिका है जिसे एक ग्रिड में व्यवस्थित किया गया है।

प्रश्न-2 : क्या आप संख्याओं के किसी दूसरे सेट में ऐसे पैटर्न ढूँढ़ सकते हैं?

$2n$	$3n$	$4n$
$9n$	$10n$	$11n$
$16n$	$17n$	$18n$
$23n$	$24n$	$25n$

जहाँ n एक प्राकृत संख्या है।

उदाहरण :

$$\frac{(3n + 9n + 11n + 17n)}{4} = 10n$$

इस ग्रिड में डायमंड पैटर्न और रेक्टेंगल पैटर्न दोनों ही काम करते हैं।

विभाज्यता : बचपन की कुछ छोटी-छोटी गणितीय खोजें

ज़ीनत रहमान

_एट राइट एंगल्स_ के मार्च, 2020 के अंक में प्रकाशित 7 से विभाज्यता की चिका की जाँच के पीछे की कहानी से प्रेरित होकर, मैं भी एक ऐसी ही कहानी साझा करना चाहती हूँ, जो सिर्फ़ 7 से विभाज्यता की जाँच के तरीक़े खोजने पर ही नहीं रुकती, बल्कि किसी भी संख्या से विभाज्यता की जाँच के तरीक़े खोजने तक जाती है। मुझे उम्मीद है कि यह कहानी विद्यार्थियों और यहाँ तक कि बड़ों को भी ऐसी छोटी-छोटी खोजें करते रहने और दूसरों के साथ उस ख़ुशी को साझा करने के लिए प्रेरित करेगी।

एनसीईआरटी (2017) [1] द्वारा कक्षा-6 के लिए सुझाई गई शैक्षणिक प्रक्रियाओं (पेज-67) में 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 और 11 से विभाज्यता के पैटर्नों का अवलोकन करने का सुझाव दिया गया है। ऊपर वर्णित लेख में कही गई यह बात बिलकुल सही है, कि ऐसी संख्याओं से विभाज्यता की जाँच स्कूली विद्यार्थियों के बीच लोकप्रिय है। इस बात का ध्यान रखा जाना चाहिए कि विद्यार्थी मात्र निर्धारित नियमों के रूप में इनका अभ्यास करने की बजाय, इन दिलचस्प संख्या पैटर्नों की स्वयं खोज करें और उन्हें समझें। 7 से विभाज्यता के लिए चिका की जाँच यह थी कि दी गई संख्या के इकाई अंक को 5 से गुणा किया जाए और इसे संख्या के शेष (इकाई-रहित) भाग में जोड़ दिया जाए। मूल संख्या उस स्थिति में, सिर्फ़ उस स्थिति में, 7 का गुणज होगी जब परिणामी संख्या 7 का गुणज हो। हालाँकि, इस लेख में, हम एक ऐसी जाँच के बारे में जानेंगे जो हमें 7 और अन्य भाजकों, उदाहरण के लिए 13, 17, 19, 23 आदि के लिए कई सरल विभाज्यता जाँच के तरीक़े बनाने में सक्षम करेगी। जाँचने के यह तरीक़े व्यापक रूप से ज्ञात नहीं हैं।

विद्यार्थियों को इन विभाज्यता जाँचों पर ध्यान देने के लिए प्रोत्साहित करने से संख्याओं के प्रति उनका दृष्टिकोण बेहतर होगा और उनकी संख्याओं की समझ विकसित होगी। इससे विद्यार्थी संख्याओं से जुड़े दिलचस्प पैटर्नों की खोज करने और बाद में उनके पीछे के तर्क को समझने में सक्षम होंगे, जो उनकी गणितीय सोच को और बढ़ाने में योगदान दे सकता है। इस लेख और चिका की कहानी के बीच एक और समान पहलू है। वह है संख्याओं और संक्रियाओं के बीच सम्बन्धों को देखते हुए दिलचस्प पैटर्नों को खोजने में गणितीय सूझ-बूझ (intuition) की भूमिका।

हम एक छोटी लड़की माया की कहानी से शुरू करते हैं, जिसका पसन्दीदा शौक़ था किसी भी संख्या के लिए नए विभाज्यता जाँच के तरीक़े खोजना। एक बार जब हम उसकी सरल तरकीबों को समझ लेंगे, तो हम किसी जटिल गणित या किसी नियम को याद किए बग़ैर किसी भी संख्या के लिए विभाज्यता की जाँच के लिए अपने सामान्य नियम बना पाएँगे। यह मज़ेदार होगा न? लेकिन इस तरकीब को जानने के लिए, आपको माया की कार्यप्रणाली जाननी होगी। सुविधा के लिए, हम कुछ पूर्व-निर्धारित प्रतीकों को परिभाषित और उपयोग करेंगे। हम दी गई संख्या के इकाई अंक को U और इकाई अंक हटाने के बाद की शेष संख्या को T से दर्शाएँगे। उदाहरण के लिए, यदि संख्या 5382 है, तो U, 2 होगा और T, 538 होगा, और यदि संख्या 394 है, तो U, 4 होगा और T, 39 होगा आदि।

_की-वर्ड :_ _विभाज्यता, पैटर्न, अन्वेषण, सत्यापन_

सबसे पहले, 7 से विभाज्यता की जाँच करने के लिए, माया 7 के गुणजों को लिखेगी, यानी 7, 14, 21, 28 आदि। फिर वह 7 के गुणजों के अंकों के बीच एक संक्रिया के बारे में सोचेगी जिससे परिणाम 0 या 7 आए। इस प्रकार, 7 के दूसरे और चौथे गुणज (यानी 14, 28) से सुराग़ लेते हुए, दहाई अंक को 4 से गुणा किया जाए और प्राप्त गुणनफल और इकाई अंक के बीच का अन्तर ज्ञात किया जाए ताकि परिणामी मान 0 या 7 हो (**तालिका-1**)।

तालिका-1 : तरकीब-1 : (T × 4) – U (U = इकाई अंक, T = शेष संख्या)

गुणज 14 और 28 ने माया को यह नियम बनाने में मदद की।		
तब तक दोहराएँ जब तक परिणाम 0 या 7 न हो जाए।		
दो-अंकीय संख्या 84 (U = 4, T = 8) के लिए तरकीब का सत्यापन	तीन-अंकीय संख्या 959 (U = 9, T = 95) के लिए तरकीब का सत्यापन	चार-अंकीय संख्या 9261 (U = 1, T = 926) के लिए तरकीब का सत्यापन
8 × 4 – 4 = 28 दोहराएँ 28 के लिए U = 8, T = 2 2 × 4 – 8 = 0	95 × 4 – 9 = 371 दोहराएँ 371 के लिए (U = 1, T = 37) 37 × 4 – 1 = 147 दोहराएँ 147 के लिए (U = 7, T =14) 14 × 4 – 7 = 49 दोहराएँ 49 के लिए (U = 9, T = 4) 4 × 4 – 9 = 7	926 × 4 – 1 = 3703 3703 के लिए (U = 3, T = 370) 370 × 4 – 3 = 1477 1477 के लिए (U = 7, T = 147) 147 × 4 – 7 = 581 581 के लिए (U = 1, T = 58) 58 × 4 – 1 = 231 231 के लिए (U = 1, T = 23) 23 × 4 – 1 = 91 91 के लिए (U = 1, T = 9) 9 × 4 – 1 = 35 35 के लिए (U=5, T = 3) 3 × 4 – 5 = 7

इस तरकीब की सबसे अद्भुत बात यह है कि इसका उपयोग 7 के किसी भी गुणज के लिए 7 से विभाज्यता की जाँच के रूप में किया जा सकता है। इस तरकीब को बीजगणित या मॉड्यूलो अंकगणित का उपयोग करके सिद्ध किया जा सकता है। चूँकि यह प्रारम्भिक स्कूली गणित के दायरे से बाहर है, इसलिए इस लेख में इसके प्रमाण पर चर्चा नहीं की गई है।

हालाँकि संक्रियाओं को तब तक दोहराया गया है जब तक कि परिणाम 0 या 7 न आ जाए, फिर भी जब परिणाम 7 का कोई पहचाने जाने योग्य गुणज हो, तो प्रक्रिया को रोका जा सकता है और वही निष्कर्ष निकाला जा सकता है। उदाहरण के लिए, **तालिका-1** के कॉलम-2 और 3 में, क्रमशः 147 और 1477 पर पहुँचने पर प्रक्रिया को रोका जा सकता है।

क्या होगा यदि कोई ऐसी अधिक कारगर तरकीब हो, जो हर अगले चरण के साथ संख्या में अंकों को कम कर सके? माया ने एक नई तरकीब सोची, जो 7 के एक विशिष्ट गुणज यानी 21 के अंकों से प्रेरित थी।

तरकीब-2 यह थी कि इकाई अंक को 2 से गुणा किया जाए और इस गुणनफल तथा शेष संख्या के बीच का अन्तर, यानी T – (2 x U) निकाला जाए, ताकि परिणामी संख्या 0 या 7 प्राप्त हो (जैसा कि तालिका-2 में दिखाया गया है)। पहले की तरह, इस तरकीब को 7 के सभी गुणजों के लिए सत्य सिद्ध किया जा सकता है।

तालिका-2 : तरकीब-2 : T – (2 × U) (U = इकाई अंक, T = शेष संख्या)

गुणज 21 और 42 ने माया को यह नियम बनाने में मदद की।		
तब तक दोहराएँ जब तक परिणाम 0 या 7 या 7 का कोई ज्ञात गुणज न हो जाए।		
दो-अंकीय संख्या 84 (U = 4, T = 8) के लिए तरकीब का सत्यापन	तीन-अंकीय संख्या 959 (U = 9, T = 95) के लिए तरकीब का सत्यापन	चार-अंकीय संख्या 9261 (U = 1, T = 926) के लिए तरकीब का सत्यापन
8 – (2 × 4) = 0	95 – (2 × 9) = 77	926 – (2 × 1) = 924 924 के लिए (U = 4, T = 92) 92 – (2 × 4) = 84 84 के लिए (U = 4, T = 8) 8 – (2 × 4) = 0

यह देखना दिलचस्प है कि तरकीब-2, तरकीब-1 की तुलना में अधिक कारगर है क्योंकि तरकीब-2 सीधे एक चार-अंकीय संख्या को तीन-अंकीय और फिर तीन-अंकीय को दो-अंकीय संख्या में घटा देती है, जिससे यह जल्दी तय किया जा सकता है कि दी गई संख्या 7 से विभाज्य है या नहीं।

इन तरकीबों को खोजने का सुराग़, इकाई के अंक और दहाई के अंक के बीच कुछ ऐसी संक्रियाएँ करने से मिलता है, जिससे परिणाम 0 या 7 का गुणज प्राप्त हो, जैसा कि 7 के दो-अंकीय गुणजों में देखा जाता है। 7 के गुणजों जैसे 42 या 35 का उपयोग करते हुए चिका की जाँच को T + (5 x U) के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है। इसके अलावा, यह जाँचना दिलचस्प होगा कि क्या उपरोक्त तरकीबें चिका की जाँच से अधिक कारगर होंगी, लेकिन यह कार्य मैं पाठकों पर छोड़ती हूँ। सावधानी के तौर पर, यदि विद्यार्थियों का परिचय अभी ऋणात्मक संख्याओं से नहीं हुआ है, तो शिक्षक उन्हें इस तरकीब का उपयोग करते समय केवल संख्याओं के बीच का अन्तर खोजने (चिह्न पर ध्यान न देते हुए) के लिए प्रोत्साहित कर सकते हैं।

आइए अब 13 के लिए विभाज्यता की तरकीब की खोज करें। यहाँ फिर से, हम 13 के गुणजों, यानी 13, 26, 39, 52 आदि को लिखने से शुरुआत करेंगे। और इस मामले में भी, हमारा तरीक़ा यह है कि अंकों के बीच कुछ ऐसी संक्रियाओं को खोजा जाए जिससे परिणाम 0 प्राप्त हो। ऊपर दिए गए 13 के गुणजों के मामले में, यह स्पष्ट होगा कि उसके दहाई अंक को 3 से गुणा करने और उसके तथा इकाई अंक के बीच का अन्तर निकालने पर 0 प्राप्त होगा।

तालिका-3 : तरकीब-3 : T x 3 – U (U = इकाई अंक, T = शेष संख्या)

13 और 26 के गुणजों ने इस नियम को प्रेरित किया	
तब तक दोहराएँ जब तक परिणाम 0 या 13 या 13 का कोई पहचाने जाने योग्य गुणज न हो जाए।	
तीन-अंकीय संख्या जैसे 741 (U = 1, T = 74) के लिए तरकीबों का सत्यापन	चार-अंकीय संख्या जैसे 3003(U=3,T = 300) के लिए तरकीबों का सत्यापन
74 × 3 – 1 = 221 221 के लिए (U = 1, T = 22) 22 × 3 – 1 = 65 65 के लिए (U = 5, T = 6) 6 × 3 – 5 = 13	300 × 3 – 3 = 897 897 के लिए (U = 7, T = 89) 89 × 3 – 7 = 260

यहाँ एक सवाल है : क्या T + 4 × U (जो 13, 91 और 52 से प्रेरित है) 13 के गुणजों की पहचान करने के लिए काम करता है? इन दोनों तरकीबों में से आपको कौन-सी ज़्यादा प्रभावी लगती है, जो हर चरण में आपको छोटी संख्याएँ देती है?

इसी प्रकार, 17 से विभाज्यता की जाँच का तरीक़ा भी पहले इसके गुणजों, यानी 17, 34 और 51 को लिखकर और किसी पैटर्न का पता लगाने के लिए उनके अंकों की जाँच करके खोजा जा सकता है। उदाहरण के लिए, (7 x T) – U (17 से प्रेरित) और T - (5 x U) (51 से प्रेरित) विभाज्यता की ऐसी तरकीबें हैं जो 17 के गुणजों की पहचान करने में मदद करती हैं।

यह दर्शाता है कि किसी संख्या के लिए विभाज्यता का कोई एक अकेला जाँच का तरीक़ा नहीं होता है और इन जाँचों को इन सरल नियमों का पालन करके बनाया जा सकता है। इस लेख में, उदाहरणों को मुख्य रूप से अभाज्य भाजकों के साथ आज़माया गया, अर्थात वे भाजक ऐसी संख्याएँ थीं जिनका 1 और स्वयं के अतिरिक्त कोई अन्य गुणनखण्ड नहीं होता। पाठकों से अनुरोध है कि वे अभाज्य संख्याओं की सूची : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 आदि से अन्य अभाज्य संख्याओं के लिए और अधिक तरकीबें खोजने का प्रयास करें।

इसके अलावा, ये नियम भाज्य संख्याओं के लिए भी बनाए जा सकते हैं। और मैं चाहती हूँ कि आप अपनी पसन्द की किसी भी अन्य दो-अंकीय संख्या के लिए विभाज्यता जाँच का तरीक़ा खोजने का प्रयास करें।

इस लेख से यह ध्यान देने योग्य बात सामने आती है कि किसी निश्चित संख्या के गुणजों के अंकों के बीच अलग-अलग प्रकार के पैटर्न होते हैं जो विभाज्यता के नियमों तक पहुँचाते हैं। और यह कि ये सभी पैटर्न उस संख्या के सभी गुणजों के लिए काम करते हैं, जैसा कि लेख में दिए गए उदाहरणों में देखा गया है।

हालाँकि उपयोग किए गए सभी उदाहरण लिए गए भाजक के गुणज रहे हैं, फिर भी विद्यार्थियों के लिए यह सत्यापित करना उपयोगी होगा कि ये नियम उन संख्याओं पर पूरी तरह से लागू नहीं होते जो उस संख्या के गुणज नहीं हैं। इस तरह की खोज संख्या संक्रियाओं के अभ्यास को दिलचस्प बनाने का एक सूक्ष्म अवसर है। जब गणित की कक्षा उन्हें ऐसे अवसर प्रदान करती है, तो विद्यार्थी स्वयं को खोजकर्ता और अन्वेषक की तरह महसूस करते हैं। मुझे आशा है कि यह लेख गणित में रुचि रखने वाले विद्यार्थियों के बीच ऐसी सहज खोजों को पुनर्जीवित करेगा।

आभार : लेखिका लेख के प्रारम्भिक मसौदे की समीक्षा के लिए आलोका कान्हेरे और रॉसी डिसूज़ा का आभार व्यक्त करती हैं।

Reference

1. National Council of Educational Research and Training. (2017). Mathematics learning outcomes for Class VI. In *Learning outcomes at the elementary stage* (p. 67). NCERT. https://bit.ly/4o2okAb

ज़ीनत रहमान अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी, भोपाल में गणित शिक्षण की पाठ्यचर्या और शिक्षाशास्त्र के पाठ्यक्रम पढ़ाती हैं। उनकी शैक्षणिक पृष्ठभूमि और अनुभव गणित शिक्षण और संज्ञान के क्षेत्र में हैं। उन्होंने पहले डिजिटल और भौतिक शिक्षण संसाधनों को विकसित करने के लिए विभिन्न टीमों के साथ काम किया है। उन्हें विविध सन्दर्भों के शिक्षकों और शिक्षाविदों के साथ काम करने का अनुभव है। उनकी रुचि शिक्षा और संज्ञान पर तकनीक के प्रभाव का अध्ययन करने में भी है। उनसे jeenath.rahaman@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : भरत त्रिपाठी **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

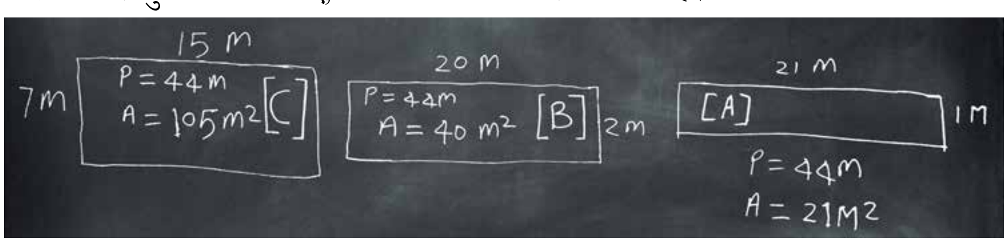
प्रयोग के ज़रिए क्षेत्रफल और परिमाप की खोज : कक्षा और क्लस्टर के अनुभव

करण सिंह

प्राथमिक विद्यालयों में गणित की पढ़ाई-लिखाई को अकसर संख्याओं, नियमों और सूत्रों तक सीमित मान लिया जाता है। लेकिन जब हम सीखे हुए गणित को असल ज़िन्दगी में अपनाते हैं, तो खोज का एक नया संसार खुलने लगता है। यह आलेख इसी खोज-यात्रा का वर्णन करता है, जिसमें शिक्षकों के साथ मिलकर *क्षेत्रफल और परिमाप* जैसी अवधारणाओं को गहराई से समझने का प्रयास किया गया है। यहाँ मुख्य उद्देश्य *परिमाप को स्थिर रखकर क्षेत्रफल में होने वाले बदलावों को परखना* और उनके रोचक परिणामों को समझना था। इस प्रयोग में कक्षाओं में की गई चर्चाएँ, ग़लतियाँ व शिक्षकों का आत्मचिन्तन शामिल है। यह आलेख उत्तराखण्ड स्थित रुद्रप्रयाग ज़िले के चार सरकारी प्राथमिक विद्यालयों व शिक्षकों की क्लस्टर-स्तरीय कार्यशालाओं के अनुभवों पर आधारित है।

विभिन्न आकार-आकृति वाले ज़मीन के टुकड़ों का मापन

इसकी शुरुआत रुद्रप्रयाग ज़िले में प्राथमिक विद्यालयीन शिक्षकों की एक क्लस्टर बैठक में चर्चा से हुई थी। हम कक्षा-5 की एनसीईआरटी की पाठ्यपुस्तक के अध्याय-11 (क्षेत्रफल और घेरा) पर बात-चीत कर रहे थे। मैंने बोर्ड पर 44 मीटर के स्थिर परिमाप वाले कुछ आयत बनाए, जैसा कि **चित्र-1** में दिखाया गया है।



चित्र-1

इन आयतों ने तुरन्त सभी का ध्यान खींचा। शिक्षक अलग-अलग भुजाओं वाले आयत बनाने लगे, जैसे 11 गुणा 11, 12 गुणा 10, 14 गुणा 8 आदि। इसके बाद हमने गणनाएँ शुरू कीं :

- **11m × 11m (वर्ग)** ⟶ क्षेत्रफल = 121 वर्गमीटर
- **12m × 10m** ⟶ क्षेत्रफल = 120 वर्गमीटर
- **14m × 8m** ⟶ क्षेत्रफल = 112 वर्गमीटर

मैंने जो आयत बनाए, उन सभी का **परिमाप** समान था : **2 × (लम्बाई + चौड़ाई) = 44** मीटर, लेकिन उनके क्षेत्रफल अलग-अलग आए।

फिर हमने चर्चा की कि अगर आयत की चौड़ाई x मीटर घटा दी जाए और लम्बाई उसी अनुपात में x मीटर इस तरह बढ़ा दी जाए कि आयत की परिमाप वही रहे, तो ऐसी स्थिति में क्षेत्रफल पर क्या असर पड़ेगा।

की-वर्ड : प्रासंगिक गणित, बात-चीत, खोज, क्षेत्रफल, परिधि

हमारा अवलोकन : सबसे अधिक क्षेत्रफल तब मिला, जब ज़मीन को वर्गाकार कर दिया गया।

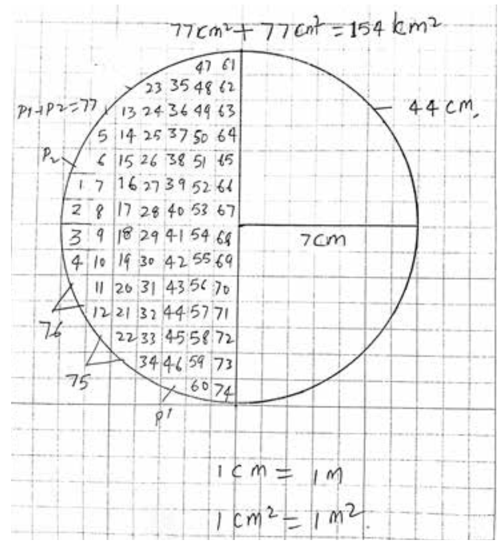
वृत्त का प्रयोग : इसने और भी चौंकाया

अगली क्लस्टर-मीटिंग में एक शिक्षक ने पूछा :

“समान परिमाप वाले आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल सबसे अधिक होता है। यदि हम उसी परिमाप (44 मीटर) की लम्बाई वाली रस्सी से एक वृत्त बनाएँ, तो इसका नतीजा क्या निकलेगा?”

इससे अगला सवाल यह सामने आया :

यदि किसी वृत्त की परिधि (परिमाप) 44 मीटर है, तो उसकी त्रिज्या और क्षेत्रफल क्या होगा?



चित्र-2

इसका अनुमान दिखाने के लिए हमने ग्राफ़ पेपर (**चित्र-2**) का इस्तेमाल किया। इसमें मीटर की जगह सेंटीमीटर कर दिया। सूत्र का उपयोग करके हम इस निष्कर्ष पर पहुँचे :

$$C = 2\pi r$$
$$44 = 2 \times \pi \times r$$
$$r = \frac{44}{2 \times 3.14} \approx 7 \text{ metres}$$

अब प्राप्त r (त्रिज्या) के मान का उपयोग करके वृत्त का क्षेत्रफल (A) निकालते हैं :

$$A = \pi r^2 = 3.14 \times (\frac{44}{2 \times 3.14})^2 \approx 3.14 \times 49 \approx 153.86 \text{ m}^2$$

इस तरह वृत्त का क्षेत्रफल लगभग 154 मी^{2} आया, जो वर्ग के क्षेत्रफल (121 मी^{2}) से भी ज़्यादा है।

यह निष्कर्ष सचमुच आँखें खोलने वाला था। आयतों की तुलना में उसी परिमाप से बनाए गए वृत्त का क्षेत्रफल अधिक निकला।

शिक्षकों का आत्मचिन्तन : क्या वृत्त सबसे प्रभावी आकार होता है?

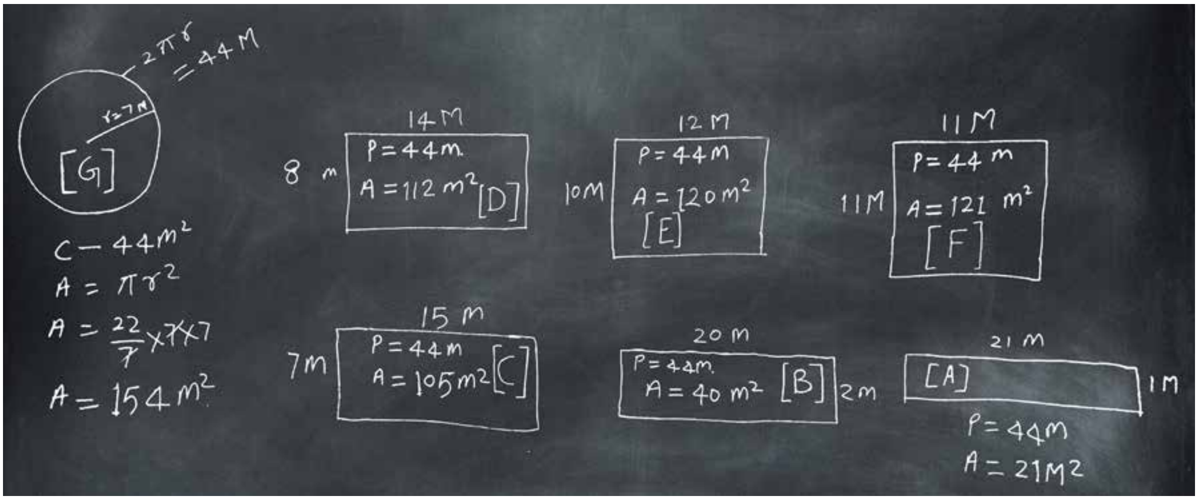
अब हमारे सामने विचार करने के लिए एक नया नज़रिया खुल चुका था। समान लम्बाई की सीमाओं से घिरे सभी प्रकार के आकारों में सबसे अधिक क्षेत्रफल वाली आकृति वृत्त होती है। शिक्षकों ने इन दो बातों पर विचार किया :

- क्या यही वजह है कि पानी की टंकियाँ, प्लेटें और पॉट्स अकसर गोल बनाए जाते हैं? समान ऊँचाई के बावजूद गोलाकार चीज़ों में ज़्यादा जगह होती है, जबकि उनके निर्माण में कम सामग्री का इस्तेमाल करना पड़ता है।
- क्या प्रकृति भी वृत्त के इस गुण का उपयोग करती है? पक्षियों के घोंसले, फल, ग्रह, ये सब अधिकतर गोल क्यों होते हैं? शायद इसलिए कि गोल आकार सबसे अधिक दक्ष होता है।

तालिका-1 : सार

आकार	आयाम (मीटर)	क्षेत्रफल (मी^{2})
आयत	21 × 1	21
आयत	20 × 2	40
आयत	15 × 7	105
आयत	14 × 8	112
आयत	11 × 11 (वर्ग)	121
वृत्त (r = 7m)	C = 44	154

यहाँ अलग-अलग आकृतियों के विज़ुअल डायग्राम दिए गए हैं (इन सभी का परिमाप 44 मीटर है), जिनकी चर्चा इस आलेख में की गई है। इन डायग्राम का इस्तेमाल शिक्षकों के प्रशिक्षण-सत्रों या कक्षाओं में प्रदर्शन के लिए किया जा सकता है।



चित्र-3

इसने कक्षा में कई रोचक चर्चाओं को जन्म दिया। जैसे कृषि भूमि की सुरक्षा व बग़ीचे की घेराबन्दी कैसे की जाए, घर बनाते समय किन बातों का ध्यान रखा जाए और डिज़ाइन एवं आर्किटेक्चर में वास्तविक जीवन के गणितीय सिद्धान्तों का उपयोग कैसे किया जाए।

हम इस विचार को कक्षा में लेकर गए

चर्चा से प्रेरित होकर हमने कक्षा-5 के विद्यार्थियों के लिए एक गतिविधि तैयार की। हमने विद्यार्थियों को 44 सेमी लम्बी रस्सियाँ (धागा या सुतली) दीं और उनसे ग्राफ़ पेपर पर विभिन्न आयताकार आकृतियाँ बनाने को कहा।

विद्यार्थी बड़े उत्साहित हुए। उन्हें ऐसा लग रहा था, मानो वे पहेलियाँ हल कर रहे हों। परिणाम वही आए, जो इससे पहले शिक्षकों ने निकाले थे।

एक समूह ने 11 गुणा 11 का वर्ग बनाया, तो दूसरे समूह ने 14 गुणा 8 का आयत। कुछ विद्यार्थियों ने 20 गुणा 2 या 21 गुणा 1 जैसी चरम आयामों वाली आकृतियाँ भी बनाईं।

फिर उन्होंने हर आकृति का क्षेत्रफल निकाला। उन्हें यह जानकर आश्चर्य हुआ कि सभी आकृतियों का परिमाप समान होने के बावजूद वर्ग का क्षेत्रफल सबसे अधिक निकला। एक विद्यार्थी ने कहा :

“सर, जब चारों तरफ़ बराबर हो, तो ज़मीन ज़्यादा मिलती है!”

उस एक वाक्य ने एक गणितीय सत्य को उजागर कर दिया।

एक अन्य कक्षा में एक विद्यार्थी ने कहा, “अगर पेरीमीटर फ़िक्स है, तो सबसे ज़्यादा एरिया गोल शेप देता है!”

रटन्त प्रणाली से तार्किकता की ओर : शिक्षण के तरीक़ों में बदलाव

इस गतिविधि ने उस परम्परागत तरीक़े को चुनौती दी, जिसके ज़रिए परिमाप और क्षेत्रफल के बारे में पढ़ाया जाता है। विद्यार्थी आमतौर पर ये सूत्र याद कर लेते हैं :

- क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई
- परिमाप = 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)

लेकिन जब परिमाप को स्थिर रखकर क्षेत्रफल में बदलाव किया गया, जिसमें वृत्त भी शामिल था, तो विद्यार्थी सोचने, परखने और पैटर्नों का अवलोकन करने को विवश हो गए।

शिक्षकों ने ग़ौर किया कि पहले जो विद्यार्थी सूत्र-आधारित पढ़ाई के दौरान सीखने में कठिनाई महसूस करते थे, उन्हें जब सामग्री के इस्तेमाल के साथ तर्क और खोज करने की अनुमति मिली, तो उन्होंने गतिविधियों में सक्रियता से भाग लिया।

इसे नियमित शिक्षण के साथ कैसे जोड़ें?

इस अवधारणा को कक्षा-4 की 'गणित का जादू' पाठ्यपुस्तक के अध्याय-13 'खेत और बाड़' और कक्षा-5 की 'गणित का जादू' पाठ्यपुस्तक के अध्याय-3 'कितने वर्ग' व अध्याय-11 'क्षेत्रफल और घेरा' के साथ व्यावहारिक और रचनात्मक तरीक़ों से जोड़ा जा सकता है।

1. **कहानी का सन्दर्भ :** एक किसान के पास बाड़ लगाने के लिए 44 मीटर लम्बी सामग्री है। अधिकतम क्षेत्रफल प्राप्त करने के लिए उसे कौन-सा आकार बनाना चाहिए?
2. **इस्तेमाल में आने वाली सामग्री :** रस्सी, धागा/सुतली, काग़ज़ की पट्टियाँ, माचिस की तीलियाँ।
3. **बनाएँ और मापें :** विद्यार्थियों को अलग-अलग आकृतियाँ बनाने व उनका क्षेत्रफल निकालने दें और उनकी तुलना करवाएँ।
4. **चर्चा करें :** विद्यार्थियों से इस तरह के खुले (मुक्त उत्तर वाले) सवाल पूछें :
   - आयत के आकार में बदलाव होने पर क्या बदल जाता है?
   - क्या स्थिर रहता है?
   - किस आकार में सबसे ज़्यादा क्षेत्रफल मिलता है?
5. **विस्तार गतिविधि :** चर्चा में वृत्त को भी शामिल करें। इसे ग्राफ़ पेपर पर धागे वाले परकार से बनवाएँ।

निष्कर्ष

गणित केवल फटाफट करने और एकदम सटीकता से करने का विषय नहीं है। यह **समझ विकसित करने की प्रक्रिया** है। क्षेत्रफल और परिमाप को लेकर शिक्षकों एवं विद्यार्थियों द्वारा की गई इस गतिविधि ने हमें दिखाया कि जब **सीखने की प्रक्रिया खोज-बीन, जिज्ञासा और वास्तविक जीवन के अनुभवों से जुड़ती है, तो गहरी समझ अपने-आप विकसित होती है।**

आयतों से शुरू होकर वर्ग और फिर वृत्त तक की यात्रा ने एक महत्त्वपूर्ण विचार को स्पष्ट किया :

किसी भी निश्चित परिमाप के साथ सबसे बड़ा क्षेत्रफल वृत्त से मिलता है।

यह केवल एक गणितीय तथ्य भर नहीं है। यह आलोचनात्मक सोच को विकसित करने और प्रकृति की संरचनाओं की सराहना करने का एक शानदार माध्यम भी है। इसी तरह अन्य आकृतियों पर भी प्रयोग किए जा सकते हैं और विद्यार्थी अपने अवलोकन नोट करके इन पर चर्चा कर सकते हैं।

करण सिंह अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन, रुद्रप्रयाग में 11 वर्ष से कार्यरत हैं। वे शासकीय स्कूलों में शिक्षकों के साथ कार्य करते हुए कक्षाओं में शिक्षण-अभ्यास को बेहतर बनाने में सक्रिय हैं।
उनसे karan.singh@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : जयजीत अकलेचा **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

"कैसे पता करूँ कि उन्होंने समझ लिया है ?"

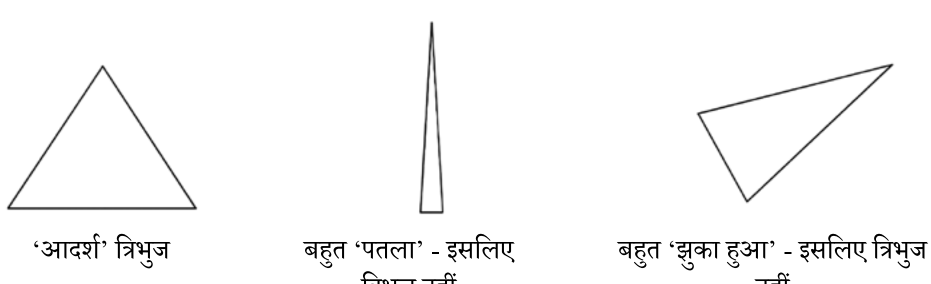
गणितीय समझ को परखने वाले प्रश्न

क्षमा चक्रवर्ती

क्या आपको कभी ऐसा लगा कि जो पाठ आपने पढ़ाया है वह सफल रहा, लेकिन बाद में पता चला कि विद्यार्थियों ने उतने अच्छे-से नहीं समझा, जितना आप सोच रहे थे? क्या कभी ऐसा हुआ कि आपके हिसाब से तो कक्षा बहुत अच्छी चली, लेकिन आख़िर में किसी विद्यार्थी ने इतना बुनियादी सवाल पूछ लिया कि आपको लगा कि शायद उन्होंने इस पूरे सत्र में कुछ समझा ही नहीं? हम सब इस स्थिति से गुज़रे हैं, और ऐसा कई कारणों से होता है। मसलन, संवाद में कमी रह जाना, हर विद्यार्थी का अलग तरह से सीखना, या फिर ध्यान भटक जाने के छोटे-छोटे पल जिनके कारण विद्यार्थी कई ख़ास बातों को नहीं समझ पाते, चाहे हम कक्षा में कितनी भी मेहनत क्यों न करें।

जब हम किसी नई अवधारणा से परिचय कराते हैं तो हम जो उदाहरण (और ग़ैर-उदाहरण) इस्तेमाल करते हैं, वे विद्यार्थी की अवधारणा की समझ में बहुत अहम भूमिका निभाते हैं। उदाहरण के लिए, अगर हम हर बार त्रिभुज को केवल एक सीधे खड़े समबाहु त्रिभुज के रूप में दिखाएँ तो विद्यार्थी यह सोच सकते हैं कि त्रिभुज हमेशा ऐसा ही दिखना चाहिए। उन्हें लग सकता है कि किसी और दिशा में बना हुआ या अलग आकार का कोई भी त्रिभुज, त्रिभुज ही नहीं होता (**चित्र-1**)। अगर हम अलग-अलग तरह के त्रिभुजों के उदाहरण दें और कुछ ग़ैर-उदाहरण भी दिखाएँ (मसलन, लहरिया रेखाएँ, खुली आकृतियाँ) तो त्रिभुज की सही समझ बनाने में मदद मिल सकती है।

इसी तरह, जब हम किसी संख्या का विस्तारित रूप (expanded form) लिखना सिखाते हैं, तो हम अकसर संख्या को बाएँ से दाएँ उसी क्रम में तोड़ते हैं, जिस क्रम में अंक आते हैं। मसलन 3409 को हम लिखते हैं 3 हज़ार + 4 सैकड़े + 0 दहाई + 9 इकाई। कई विद्यार्थी स्थान के नाम या स्थानीय मान (place value) पर ध्यान नहीं देते। वे सिर्फ़ अंकों के क्रम 0 ,4 ,3 और 9 को देखते हैं। और जब आप स्थानों को अलग क्रम में बोलते हैं तो वे ग़लती कर देते हैं। उदाहरण के लिए, 3 दहाई + 2 इकाई + 8 सैकड़े को ऐसे विद्यार्थी ज़्यादातर 328 लिखेंगे, जबकि सही उत्तर 832 होना चाहिए। ऐसे मामलों में पढ़ाते समय संख्या के विस्तारित रूप के क्रम को बदल-बदलकर अभ्यास कराना काफ़ी मददगार हो सकता है। शिक्षक अपने अनुभव और समझ के आधार पर बेशक यह तय कर सकते हैं कि सीखने की प्रक्रिया के किस चरण पर उन्हें ये अतिरिक्त बिन्दु शामिल करने चाहिए।



चित्र-1

की-वर्ड : *पाठ योजना, विद्यार्थी की समझ, आकलन, सुधारात्मक शिक्षण, प्रश्न, शिक्षण विधियाँ*

कुछ और उदाहरण देखें

जब हम पूर्ण संख्याओं (whole numbers) में घटाव सिखाते हैं तो हम कहते हैं कि छोटी संख्या में से बड़ी संख्या को नहीं घटाया जा सकता। लेकिन जैसे ही हम पूर्णांक (integers) पर पहुँचते हैं, हम उन्हें यही काम करना सिखाते हैं! इसी तरह, हम कहते हैं कि शून्य का कोई मान नहीं होता, और फिर भी 10 और 100 अलग-अलग संख्याएँ हैं, और 1.02 और 1.2 भी अलग-अलग हैं। (कई विद्यार्थी दशमलव संख्याओं की तुलना करते समय कहते हैं कि 1.02 और 1.2 का एक ही मतलब है क्योंकि 'शून्य का कोई मान नहीं होता'।)

हालाँकि त्रिभुज और विस्तारित रूप वाले उदाहरणों में तो ग़लत धारणाएँ इसलिए बनती हैं क्योंकि हमने सभी स्थितियाँ नहीं देखी होतीं। लेकिन बाक़ी उदाहरणों में, जो बातें हम विद्यार्थियों को बताते हैं और सच मानने को कहते हैं, वे आगे चलकर दूसरे विषयों या उच्च स्तर के पाठों में सच नहीं रह जातीं। इससे उनके मन में एक मानसिक टकराव (cognitive conflict) पैदा होता है, और कुछ विद्यार्थियों को इससे बाहर आने में समय लगता है। यदि हम इस बात के प्रति सजग रहें और जानें कि विद्यार्थी किस तरह सोच सकते हैं तो हम सही समय पर हस्तक्षेप कर सकते हैं, या फिर ग़लत धारणाएँ बनने से ही रोक सकते हैं।

इन ज़रूरी बिन्दुओं को अपने शिक्षण की प्रक्रिया में शामिल कर लेने के बाद यह समझना महत्त्वपूर्ण होता है कि विद्यार्थियों ने अवधारणा को पूरी तरह सीखा है या नहीं। इसे जाँचने का एक अच्छा तरीक़ा है – सही प्रश्नों का निर्माण करना। ऐसे प्रश्न जो उनकी समझ को सचमुच परखें। अच्छे-से बनाए गए बहु-विकल्पीय प्रश्न (MCQs), जिनमें वास्तविक और तार्किक दिखने वाले भ्रामक विकल्प (distractors) हों, विद्यार्थियों की ग़लत धारणाओं को पहचानने में मदद करते हैं। ग़लत विकल्पों में अकसर वही सामान्य ग़लतियाँ छिपी होती हैं जो विद्यार्थी करते हैं। जब कोई विद्यार्थी किसी भ्रामक विकल्प को चुनता है तो इससे हमें पता चलता है कि वह किस ख़ास हिस्से में उलझ रहा है (सिर्फ़ अनुमान लगाने के बजाय)। इससे शिक्षक सही दिशा में प्रतिक्रिया और मार्गदर्शन दे पाते हैं। यह उपयोगी है क्योंकि इससे शिक्षक :

- केवल याददाश्त जाँचने के बजाय **ग़लत धारणाओं की पहचान कर पाते हैं।**
- **आंशिक समझ और पूरी तरह से ग़लत समझने में अन्तर कर पाते हैं।**
- **शिक्षण को अधिक प्रभावी बना पाते हैं,** क्योंकि ग़लत उत्तर विद्यार्थियों की सोच के पैटर्न को दिखाते हैं।

नीचे एक बहु-विकल्पीय प्रश्न का उदाहरण दिया गया है, जिसमें प्रश्न का मुख्य भाग और विकल्प शामिल हैं। इन विकल्पों को भटकाने वाले या भ्रामक विकल्प भी कहा जाता है।

जोड़ें और सही उत्तर का चुनाव करें :

$$\begin{array}{r} 374 \\ +826 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

(a) 11910
(b) 1200*
(c) 1191
(d) 1190

प्रश्न / प्रश्न का मुख्य भाग : यह विद्यार्थी तक प्रश्न को पहुँचाता है।

विकल्प / भ्रामक विकल्प :

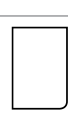
विद्यार्थी इनमें से किसी एक को चुनता है। हर भ्रामक विकल्प के पीछे एक वजह होती है। क्या आप उसे समझ सकते हैं?

* सही उत्तर

यहाँ कुछ नमूना प्रश्न दिए गए हैं जिन्हें आप कक्षा में आज़मा सकते हैं और देख सकते हैं कि क्या अपेक्षित ग़लत धारणाएँ सामने आती हैं। ये प्रश्न इस तरह बनाए गए हैं कि वे दुनिया भर के विद्यार्थियों की समझ की जाँच कर सकें, चाहे उनकी सामाजिक-आर्थिक पृष्ठभूमि, जेंडर, या शिक्षक का अनुभव और विशेषज्ञता कुछ भी हो। हरेक विकल्प को चुनने की सम्भावित वजह भी दी गई है। यह आपको एक शिक्षक के रूप में यह समझने में मदद करती है कि किस प्रकार की सुधारात्मक शिक्षण (remediation) योजना बनाई जाए। इन प्रश्नों को एनसीईआरटी दस्तावेज़ों में दिए गए अधिगम के प्रतिफलों (*Learning Outcomes at the Elementary Stage, NCERT, 2017* कक्षा-3 के लिए, और *Learning*

Outcomes at the Foundational Stage, NCERT, 2025 कक्षा-2 के लिए) से जोड़कर रखा गया है। इससे यह पता चलता है कि पूछे गए प्रश्नों से अधिगम के कौन-से प्रतिफल को परखा जा सकता है – सीधे या फिर धीरे-धीरे उस दिशा में पहुँचकर।

बहु-विकल्पीय प्रश्न-1		
विषय : हासिल के साथ दो अंक वाली संख्याओं का योग	**कक्षा :** 3	**अधिगम का प्रतिफल :** हासिल और बिना हासिल के तीन अंक वाली संख्याओं के जोड़-घटाव का इस्तेमाल करके दैनिक जीवन की समस्याएँ हल करते हैं (योग 999 से अधिक नहीं)।
जाँच का उद्देश्य	जोड़ की प्रक्रिया की पूरी समझ की जाँच करना। ख़ासकर, गुमशुदा अंक को ढूँढ़ने के लिए, जिसमें घटाव का उपयोग करना ज़रूरी होता है।	
प्रश्न	जोड़ के इस प्रश्न में रिक्त स्थान वाले अंक का पता लगाएँ। 7 6 + □ 9 1 2 5	
	भ्रामक विकल्प	**इस विकल्प को चुनने का सम्भावित कारण**
भ्रामक विकल्प-1	20	इकाई की जगह पर 6 और 9 को जोड़कर 15 मिला, फिर 15 से आया हुआ 1 दहाई लेकर 7 और उत्तर में दिख रहे 12 को जोड़ दिया, जिससे 20 मिला।
भ्रामक विकल्प-2	19	दहाई की जगह पर 'दिख' रहे 7 और 12 को जोड़कर 19 लिख दिया।
भ्रामक विकल्प-3	5	7 + ___ = 12 इस हिस्से को अलग से हल किया और उत्तर 5 मिला।
भ्रामक विकल्प-4	4	सही उत्तर। (76 + 49 = 125)

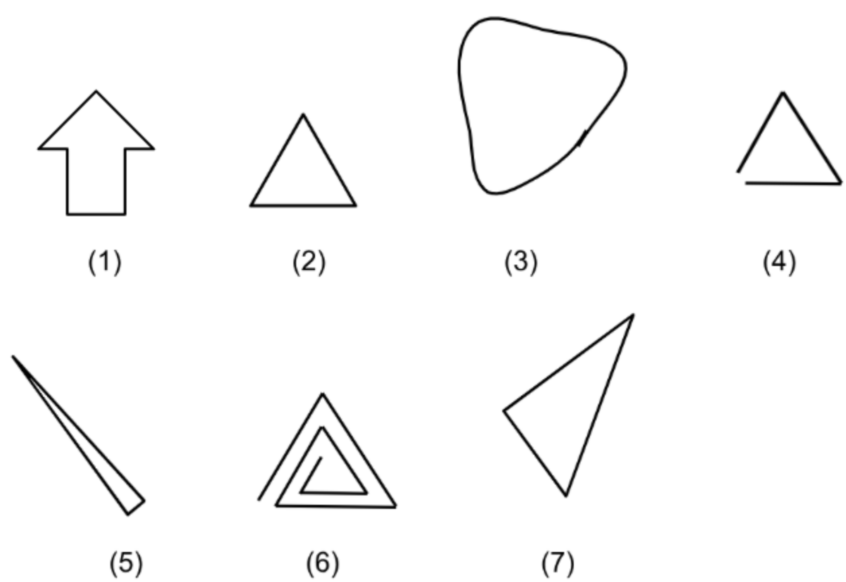
बहु-विकल्पीय प्रश्न-2		
विषय : द्विआयामी (2D) आकारों की पहचान करना (ख़ासतौर पर आयत की)	**कक्षा :** 2,3	**अधिगम के प्रतिफल :** • द्विआयामी आकारों को उनके नाम से पहचानते हैं (मसलन वर्ग, आयत, त्रिभुज और वृत्त) और उनकी दिखाई देने वाली विशेषताओं का वर्णन करते हैं। (मसलन पुस्तक के पन्ने आयताकार होते हैं और उनकी 4 भुजाएँ तथा 4 कोने होते हैं।) (कक्षा-2) • द्विआयामी आकारों का वर्णन उनकी भुजाओं, कोनों और विकर्णों की संख्या के आधार पर करते हैं। (कक्षा-3)
जाँच का उद्देश्य	आयत की पहचान करना	
प्रश्न	सभी आयतों को चुनें।	
	भ्रामक विकल्प	**इस विकल्प को चुनने का सम्भावित कारण**
भ्रामक विकल्प-1		'देखने' में आयत जैसा लगता है। यह नहीं देख पाते कि आकृति खुली हुई है, या शायद यह नहीं जानते कि आयत एक बन्द आकृति होती है।
भ्रामक विकल्प-2		वक्रता (curves) को नहीं देख पाते, या यह नहीं समझते कि आयत के 4 कोने होते हैं और वह 4 सरल रेखाओं से बनता है।
भ्रामक विकल्प-3		सही उत्तर। (इसे न चुनने का कारण यह हो सकता है कि यह देखने में बहुत 'पतला' लगता है, इसलिए आयत जैसा नहीं लगता।)
भ्रामक विकल्प-4		आकृति का आकार और दिशा आयत जैसी लगती है, इसलिए उसे सही मान लेते हैं। वक्रता को देख नहीं पाते या नज़रअन्दाज़ कर देते हैं।

टिप्पणी	विद्यार्थी अकसर उन आकृतियों को आयत मान लेते हैं जो आयत जैसी 'दिखती' हैं, और कभी-कभी उन ख़ासियतों को नज़रअन्दाज़ कर देते हैं जो किसी आकृति को (गणितीय अर्थ में) आयत बनाती हैं। सम्भव है कि हम भी अनजाने में हमेशा एक ही तरह के आयत दिखाते रहे हों, जिससे उन्हें यह लगने लगता है कि दिशा बदलने पर या बहुत 'पतला' दिखने पर आकृति आयत नहीं होती।

बहु-विकल्पीय प्रश्न-3

विषय : द्विआयामी आकृतियों की पहचान करना (ख़ासतौर पर त्रिभुज की)	**कक्षा :** 2, 3	**अधिगम के प्रतिफल :** • द्विआयामी आकारों को उनके नाम से पहचानते हैं (मसलन वर्ग, आयत, त्रिभुज और वृत्त) और उनकी दिखाई देने वाली विशेषताओं का वर्णन करते हैं। (मसलन पुस्तक के पन्ने आयताकार होते हैं और उनकी 4 भुजाएँ तथा 4 कोने होते हैं।) (कक्षा-2) • द्विआयामी आकारों का वर्णन उनकी भुजाओं, कोनों और विकर्णों की संख्या के आधार पर करते हैं। (कक्षा-3)

जाँच का उद्देश्य	त्रिभुज की पहचान करना
प्रश्न	इनमें से कौन-कौन-से त्रिभुज हैं?



	भ्रामक विकल्प	**इस विकल्प को चुनने का सम्भावित कारण**
भ्रामक विकल्प-1	(2), (4), (6)	ये देखने में सीधे खड़े समबाहु त्रिभुज जैसे लगते हैं।
भ्रामक विकल्प-2	(2), (5), (7)	सही उत्तर। [इन्हें न चुनने का कारण यह हो सकता है कि (5) बहुत 'पतला' लगता है, इसलिए त्रिभुज नहीं लगता, और / या (7) सही दिशा में नहीं है।]
भ्रामक विकल्प-3	(2), (3), (4), (7)	इनकी 3 'भुजाएँ' दिखती हैं। (यह बात छूट जाती है कि त्रिभुज की 3 सीधी भुजाएँ होती हैं और वह एक बन्द आकृति होता है।)
भ्रामक विकल्प-4	(1), (2), (4), (6)	ये देखने में त्रिभुज जैसे लगते हैं, चाहे भुजाओं की संख्या 3 से ज़्यादा हो, या आकृति खुली हुई हो।

बहु-विकल्पीय प्रश्न-4		
विषय : दो-अंकीय संख्या का मानक विस्तारित रूप	**कक्षा :** 2, 3	**अधिगम के प्रतिफल :** संख्याओं के स्थानीय मान को समझते हुए उन्हें समूह में रखना और पहचानना।

जाँच का उद्देश्य	दो-अंकीय संख्या के विस्तारित रूप की समझ की जाँच करना	
प्रश्न	3 इकाई + 5 दहाई = ______	
	भ्रामक विकल्प	**इस विकल्प को चुनने का सम्भावित कारण**
भ्रामक विकल्प-1	35	अंकों को उसी क्रम में लिख देना जिसमें वे बोले जाते हैं।
भ्रामक विकल्प-2	53	सही उत्तर।
भ्रामक विकल्प-3	350	3 इकाई = 3 और 5 दहाई = 50। इन्हें इसी क्रम में लिख देने पर 350 बन जाता है (तीन और पचास)।
भ्रामक विकल्प-4	503	3 इकाई = 3 और 5 दहाई = 50। दहाई को पहले लिखने पर 503 बन जाता है (पचास और तीन)।
टिप्पणी	हम अकसर विस्तारित रूप लिखते समय सबसे बड़े स्थान (मसलन सैकड़ा, फिर दहाई, फिर इकाई) से शुरू करते हैं और बाएँ से दाएँ लिखते हैं। कुछ विद्यार्थी इस बात से एक नियम बना लेते हैं और संख्या बनाते समय सिर्फ़ बाएँ से दाएँ उसी क्रम में अंक लिख देते हैं, बिना यह समझे कि हर अंक का स्थानीय मान क्या है।	

बहु-विकल्पीय प्रश्न-5		
विषय : हासिल (regrouping) के साथ घटाव	**कक्षा :** 2	**अधिगम के प्रतिफल :** दो-अंक वाली संख्याओं के घटाव पर आधारित दैनिक जीवन की स्थितियों को हल करते हैं।

जाँच का उद्देश्य	यह जाँचना कि विद्यार्थी हासिल के साथ घटाव कर पाता है या नहीं	
प्रश्न	हल करें। 83 – 67 ____	
	भ्रामक विकल्प	**इस विकल्प को चुनने का सम्भावित कारण**
भ्रामक विकल्प-1	26	13 में से 7 घटाकर 6 मिला, और उधार ली गई दहाई को ध्यान में रखे बिना 8 में से 6 घटाकर 2 लिख दिया।
भ्रामक विकल्प-2	24	इकाई वाली जगह पर 7 – 3 और दहाई वाली जगह पर 8 – 6 कर दिया।
भ्रामक विकल्प-3	20	इकाई वाली जगह पर बड़ा अंक छोटे अंक से घट नहीं सकता, इसलिए 0 लिख दिया और दहाई वाली जगह पर 8 – 6 = 2 किया।
भ्रामक विकल्प-4	16	सही उत्तर।
टिप्पणी	जो विद्यार्थी भ्रामक विकल्प-2 चुनते हैं, वे दो अलग-अलग गणनाएँ कर रहे होते हैं और अंकों के क्रम को महत्त्व नहीं देते ('हमेशा छोटे अंक को बड़े अंक से ही घटाना है' जैसी सोच)। जो विद्यार्थी विकल्प-3 चुनते हैं, वे मानते हैं कि इकाई स्थान पर छोटे अंक में से बड़ा अंक नहीं घटाया जा सकता, इसलिए वहाँ 0 लिख देते हैं और फिर दहाई स्थान पर 8 – 6 करके 2 लिख देते हैं।	

बहु-विकल्पीय प्रश्न-6		
विषय : तीन-अंक वाली संख्या का विस्तारित रूप	**कक्षा :** 2	**अधिगम के प्रतिफल :** स्थानीय मान का उपयोग करते हुए 999 तक की संख्याओं को पढ़ते और लिखते हैं।
जाँच का उद्देश्य	यह जाँचना कि विद्यार्थी तीन-अंक वाली संख्या का विस्तारित रूप पहचान पाता है या नहीं	
प्रश्न	461 का विस्तारित रूप क्या है?	
	भ्रामक विकल्प	**इस विकल्प को चुनने का सम्भावित कारण**
भ्रामक विकल्प-1	4 + 60 + 1	अंकों के क्रम (4, 6 और 1) पर ध्यान देना, स्थानीय मान पर नहीं। या फिर संख्या को ‘फ़ोर सिक्स्टी-वन’ (four sixty-one) की तरह पढ़ लेना।
भ्रामक विकल्प-2	40 + 6 + 1	461 को ‘फ़ोर्टी, सिक्स और वन’ की तरह समझ लेना।
भ्रामक विकल्प-3	60 + 1 + 400	सही उत्तर।
भ्रामक विकल्प-4	4 + 1 + 6	461 को केवल 4, 6 और 1 के रूप में देख लेना।
टिप्पणी	यह तीन-अंक वाली संख्या के मानक विस्तारित रूप की समझ जाँचने वाला एक सरल प्रश्न है। इसमें स्थानीय मान, दिखने वाले अंकित मान और स्थान-नाम की अन्तर्निहित समझ शामिल होती है।	

सही प्रकार के प्रश्न पूछकर शिक्षक केवल रटने की आदत जाँचने से आगे बढ़ सकते हैं और विद्यार्थियों में गणितीय अवधारणाओं की गहरी समझ विकसित कर सकते हैं। लेकिन जब हम खुले प्रश्न (ग़ैर-बहु-विकल्पीय प्रश्न [non-MCQs], जिनमें विद्यार्थी अपने शब्दों में उत्तर देते हैं) और सोच-समझकर बनाए गए भ्रामक विकल्पों वाले बहु-विकल्पीय प्रश्न, दोनों को शामिल करते हैं, तो हमें विद्यार्थियों की सोच प्रक्रिया के बारे में अहम जानकारी मिलती है। इससे हम उनकी ग़लत धारणाओं को पहचान सकते हैं और अपनी शिक्षण पद्धति को उनकी अलग-अलग ज़रूरतों के अनुसार बदल सकते हैं। यहाँ हमने ख़ासतौर पर बहु-विकल्पीय प्रश्नों पर चर्चा की है। ऐसे तरीक़ों से शिक्षक सिखाने का एक ज़्यादा सहायक और प्रभावी माहौल बना पाते हैं। इसमें विद्यार्थी गणित की मज़बूत नींव विकसित कर पाते हैं और समस्याओं को हल करने की अपनी क्षमता पर उनका आत्मविश्वास बढ़ता है।

जो शिक्षक अपनी कक्षा में इनमें से किसी भी प्रश्न को आज़माना चाहते हैं, वे दिए गए क्यूआर कोड को स्कैन करके या उस पर क्लिक करके एक छोटे-से फ़ॉर्म को भर सकते हैं। इससे हम आपको अगले चरणों के बारे में बता सकेंगे, यानी आप इन्हें अपनी कक्षा में कैसे शामिल कर सकते हैं। साथ ही सम्भावित सुधारात्मक शिक्षण गतिविधियों (remediations) के लिए सुझाव भी प्रदान किए जाएँगे।

क्षमा चक्रवर्ती एक एजुकेटर हैं। उन्होंने आईआईटी मद्रास से गणित में स्नातकोत्तर उपाधि और अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी से शिक्षा में स्नातकोत्तर उपाधि प्राप्त की है। गणित शिक्षा के क्षेत्र में 15 से ज़्यादा वर्षों के अनुभव के साथ, उन्होंने विषय-वस्तु निर्माण, शिक्षण, शिक्षक प्रशिक्षण, विद्यार्थी साक्षात्कार लेने और आकलन तैयार करने जैसे क्षेत्रों में काम किया है। नन्हे बच्चों के साथ समय बिताना और प्रकृति का आनन्द लेना उन्हें बेहद पसन्द है। उनसे kshamagc@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : अमेय कान्त **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अतुल अग्रवाल

फ़ैक्ट फ़ैमिली

स्वाती सरकार

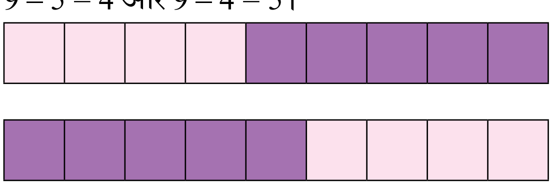
एक फ़ैक्ट फ़ैमिली (Fact Family) असल में तीन प्राकृत संख्याओं का एक समूह होता है, जिसमें से दो संख्याओं का जोड़ तीसरी संख्या होता है। उदाहरण के लिए {2, 3, 5} एक फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाते हैं क्योंकि 2 + 3 = 5 होता है। लेकिन {7, 4, 2} एक फ़ैक्ट फ़ैमिली नहीं बनाते हैं। फ़ैक्ट फ़ैमिली में संख्याओं का क्रम मायने नहीं रखता। यदि किसी फ़ैक्ट फ़ैमिली में दो संख्याएँ एक समान हों, तो तीसरी संख्या या तो शून्य होगी या फिर उस संख्या का दोगुना होगी।

उदाहरण : यदि किसी समूह में 5 और 5 हैं, तो {5, 0, 5} और {5, 5, 10} दोनों फ़ैक्ट फ़ैमिली हो सकती हैं। क्या यह मुमकिन है कि किसी फ़ैक्ट फ़ैमिली की तीनों संख्याएँ एक समान हों? हाँ – बशर्ते तब तीनों संख्याओं का मान 0 होना चाहिए!

यह लेख मेरे द्वारा एक कक्षा के लगातार दो दिन तक किए गए अवलोकन और अनुभव पर आधारित है। ये कक्षाएँ अज़ीम प्रेमजी स्कूल, यादगीर में कक्षा-2 की शिक्षिका आक़ेफ़ा बसरी द्वारा ली गई थीं। उन्हें यह ख़ास आइडिया https://bit.ly/4qlk2FF से मिला था।

पहले दिन कक्षा में, शिक्षिका ने बच्चों से 'फ़ैमिली' यानी माता, पिता और बच्चे पर बात-चीत शुरू की। इसके बाद उन्होंने तीन संख्याओं की एक फ़ैमिली : 4, 5 और 9 पेश की। उन्होंने बच्चों से पूछा कि क्या वे बता सकते हैं कि ये संख्याएँ जोड़ और घटा के माध्यम से कैसे आपस में जुड़ी हुई हैं। बच्चों ने जोड़ के तथ्य इस प्रकार बताए : 4 + 5 = 9 और 5 + 4 = 9। जब कुछ बच्चों ने 2 + 7 = 9 शामिल करना चाहा, तो शिक्षिका ने याद दिलाया कि इस फ़ैमिली में केवल 4, 5 और 9 ही सदस्य हैं।

उन्होंने इसे काउंटर की मदद से भी दिखाया, जैसा कि **चित्र-1** में दिखाया गया है। इसके बाद उन्होंने इन्हीं संख्याओं से घटा के तथ्य पूछे और जवाब मिले : 9 – 5 = 4 और 9 – 4 = 5।



चित्र-1

शिक्षिका ने अब बच्चों को अपनी मनचाही संख्या चुनकर फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाने को कहा। शुरुआत में संख्याएँ चुनी गईं {6, 3, 10}, जाँच करने के बाद वे {6, 3, 9} हो गईं। शिक्षिका ने जब कहा कि फ़ैमिली में कोई संख्या दोहराई नहीं जानी चाहिए, तो {4, 4, 8} को बदलकर {3, 5, 8} कर दिया गया। ग्रुप गतिविधियों से बनी फ़ैक्ट फ़ैमिली थीं : {12, 8, 20}, {54, 31, 23} और {20, 4, 16}।

दूसरे दिन आक़ेफ़ा बच्चों को खेल के मैदान में ले गईं और उन्हें एक मिनट में जितने हो सकें उतने कंकड़ इकट्ठा करने को कहा। इसके बाद बच्चों ने अपने-अपने कंकड़ों की गिनती की। हर किसी के पास अलग-अलग संख्या थी। अब शिक्षिका ने प्रत्येक बच्चे से कहा कि वे अपने इकट्ठा किए हुए कंकड़ों को दो भागों में बाँटें, ताकि एक फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाई जा सके। एक बच्ची के पास 43 कंकड़ थे। उसने उन्हें 42 और 1 में बाँटा। उसकी फ़ैक्ट फ़ैमिली थी : {1, 42, 43} और उसने ये तथ्य लिखे : 1 + 42 = 43, 42 + 1 = 43, 43 – 1 = 42 और 43 – 42 = 1।

एक विद्यार्थी ने जब {20, 30, 50} की फ़ैमिली बनाई

की-वर्ड : संख्याएँ, जोड़, घटाव, अवलोकन, मैनिप्यूलेटिव्स

तो इससे चर्चा आगे बढ़कर 50 को सबसे बड़ी संख्या रखते हुए दूसरी फ़ैक्ट फ़ैमिली तक पहुँची, जैसे : {10, 40, 50} और {50, 0, 50}। उन्होंने देखा कि 50 कंकड़ों को कई तरीक़ों से दो भागों में बाँटा जा सकता है। इसके बाद बच्चों ने जोड़ की बजाय 50 के लिए घटा की फ़ैक्ट संख्याएँ खोजना शुरू कर दीं।

कुछ बच्चों ने और आगे जाकर ऐसी फ़ैक्ट फ़ैमिली भी बनाईं जिनमें 50 सबसे बड़ी संख्या नहीं थी, जैसे 60 – 10 = 50। यह दिखाता है कि गणित मूर्त (concrete) से शुरू होकर धीरे-धीरे अमूर्त (abstract) बन जाता है। बच्चे एक अंकीय संख्याओं के साथ-साथ दो अंकीय संख्याओं से भी फ़ैक्ट फ़ैमिली बना पा रहे थे। लेकिन मज़ेदार बात यह थी कि वे ऐसे जोड़ या घटा से बच रहे थे जिनमें हासिल लेना या देना पड़ता है, जैसे : 37 + 25 = 62 या 51 – 24 = 27। बच्चों को ऐसे जोड़ या घटा वाले सवाल पसन्द थे जिनमें सिर्फ़ प्रत्येक अंक को सीधे जोड़ना या घटाना होता है। जैसे : 23 + 14 = 37 या 45 – 13 = 32।

किसी भी फ़ैक्ट फ़ैमिली में, विशेषकर जब तीन संख्याएँ अलग-अलग हों, तो जोड़ के दो फ़ैक्ट्स बनते हैं, जैसे : 2 + 3 = 5 और 3 + 2 = 5। यह जोड़ के क्रम-विनिमय गुणधर्म को (commutative property) दिखाता है। इसी प्रकार घटा के दो फ़ैक्ट बनते हैं, जैसे 5 – 2 = 3 और 5 – 3 = 2। इससे यह समझ आता है कि एक जोड़ का फ़ैक्ट दो घटा के फ़ैक्ट के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है।

यह सम्बन्ध आगे चलकर इबारती सवालों को समझने में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है। इसके अलावा, यह बच्चों को यह समझने का मौक़ा भी देता है कि सबसे बड़ी संख्या बाक़ी दो संख्याओं का जोड़ होती है।

मतलब यदि हमारे पास सबसे बड़ी संख्या को दर्शाने वाली वस्तुओं का समूह है, तो उसे दो हिस्सों में बाँटा जा सकता है। हर हिस्सा बाक़ी दो संख्याओं में से एक को दर्शाता है। दूसरे दिन की कंकड़ इकट्ठा करने वाली गतिविधि इसी विचार को मज़बूत करती है।

अवलोकन

1. गणित को सिखाने के लिए ठोस चीज़ों से अमूर्त सोच की ओर बढ़ना बेहतर है, बजाय इसके उलटा करने के। बच्चों से कहा जा सकता था कि वे कक्षा में लाए गए कंकड़ों की थैली से अपनी मुट्ठी भरें और उसी से फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाएँ। ज़रूरी बात यह है कि बच्चे कंकड़ ख़ुद लें न कि उन्हें दिए जाएँ। इससे बच्चों की भागीदारी बढ़ती है और प्रत्येक को एक अलग संख्या मिलती है, ऐसी संख्या जो किसी ने पहले से तय नहीं की होती है।
2. यह गतिविधि कक्षा-2 में कराई गई थी, जहाँ दो-अंकीय संख्याएँ शामिल थीं। लेकिन इसे कक्षा-1 में भी शुरू किया जा सकता है, जब बच्चे 20 तक की संख्याएँ सीख लेते हैं और केवल एक-अंकीय जोड़-घटा का अभ्यास करते हैं। इससे बच्चों को एक-अंकीय जोड़ और उससे जुड़े घटा अपने-आप (देखें **[1]**) करने की आदत बनती है, जो किसी भी जोड़-घटा को फटाफट करने की दक्षता लाने के लिए बहुत महत्त्वपूर्ण है। ऐसी गतिविधियाँ बच्चों के मन गणित को तेज़ करती हैं और उन्हें संख्याओं के साथ खेलना सिखाती हैं जो गणित को पसन्द करने में बहुत मदद करता है।
3. शिक्षक इन तरह-तरह की गतिविधियों को आज़मा सकते हैं :
   - सभी सम्भावित फ़ैक्ट फ़ैमिली ढूँढ़ें जिनमें सबसे बड़ी संख्या (मान लें) 20 हो। 20 को सबसे बड़ी संख्या मानकर कितनी फ़ैक्ट फ़ैमिली सम्भव हैं?
   - सभी सम्भावित फ़ैक्ट फ़ैमिली ढूँढ़ें जिनमें सबसे छोटी संख्या (मान लें) 3 हो। 3 को सबसे छोटी संख्या मानकर कितनी फ़ैक्ट फ़ैमिली सम्भव हैं?
   - ऐसी फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाएँ जिसमें दो संख्याएँ एक ही पहाड़े से हों, जैसे 15 और 35। तीसरी संख्या क्या होगी? क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है?
4. गुणा फ़ैक्ट फ़ैमिली भी बनाई जा सकती है, जैसे गुणन-भाग से {2, 3, 6} फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाई जा सकती हैं, यह बच्चों को अलग-अलग तरीक़ों से गुणा सीखने में मदद करते हैं।

   आगे इन बातों को भी आज़माया जा सकता है :

   (क) सभी सम्भावित फ़ैक्ट फ़ैमिली ढूँढ़ें जिनमें सबसे बड़ी संख्या (मान लें) 20 हो। 20 को सबसे बड़ी संख्या मानकर कितनी फ़ैक्ट फ़ैमिली सम्भव हैं?

   (ख) अगर किसी फ़ैक्ट फ़ैमिली में 1 हो तो क्या होता है? और अगर 0 हो तो क्या होता है?

   (ग) जोड़ फ़ैक्ट फ़ैमिली पर आधारित एक वर्ग-संख्या पहेली इसी अंक में दी गई है।

इस लेख में व्यक्त किए गए विचारों पर आधारित

फ़ैक्ट फ़ैमिली वर्कशीट (जोड़-घटाव)

फ़ैक्ट फ़ैमिली 3 संख्याओं का समूह {a, b, c} है, जहाँ $a + b = c$

कक्षा-1

1. प्रत्येक फ़ैक्ट फ़ैमिली के लिए जोड़ और घटाव के फ़ैक्टस लिखें :

   a. {13, 9, 4} b. {6, 9, 15}

2. नीचे दिए गए कौन-से तीन संख्याओं वाले समूह फ़ैक्ट फ़ैमिली हैं?

   a. {3, 5, 8} b. {7, 2, 4} c. {9, 4, 1} d. {6, 2, 8}

   e. {11, 4, 7} f. {7, 9, 2} g. {1, 4, 7} h. {5, 12, 6}

3. अपनी ख़ुद की फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाएँ :

   क. जोड़ 13 हो ख. सबसे छोटी संख्या 5 हो

   ग. दोनों छोटी संख्याएँ 7 से छोटी हों घ. सबसे बड़ी संख्या 8 से बड़ी हो

4. कितनी फ़ैक्ट फ़ैमिली बन सकती हैं, अगर :

   क. सबसे बड़ी संख्या 7 हो

   ख. सबसे बड़ी संख्या 10 हो

कक्षा-2

1. ऐसी फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाएँ जिनमें :

   क. सबसे बड़ी संख्या 50 से छोटी और सबसे छोटी 20 से बड़ी हो

   ख. सबसे बड़ी संख्या 40 से बड़ी और सबसे छोटी 15 से छोटी हो

2. कितनी फ़ैक्ट फ़ैमिली सम्भव हैं अगर सबसे बड़ी संख्या हो :

   क. 7 ख. 8 ग. 10 घ. 13 ड. 19 च. 22

   छ. क्या आप अन्दाज़ा लगा सकते हैं कि अगर सबसे बड़ा नम्बर 37 हो तो कितनी फ़ैक्ट फ़ैमिली बनेंगी?

3. सबसे छोटी संख्या 6 होने पर कितनी फ़ैक्ट फ़ैमिली बनेंगी? दो उदाहरण भी दें।

4. कितनी फ़ैक्ट फ़ैमिली बन सकती हैं अगर बीच की संख्या (न सबसे छोटी, न सबसे बड़ी) हो :

   क. 5 ख. 8

   ग. 11 घ. अनुमान लगाएँ कि यदि यह 73 हो तो कितनी फ़ैमिली होंगी?

5. क्या 0 किसी फ़ैमिली में हो सकता है? उदाहरण दें।

I. यह अभ्यास बच्चों को किसी संख्या के सभी गुणकों यानी किन-किन संख्याओं को गुणा करने से वह संख्या बनती है, यह ढूँढ़ना सिखाता है। यह आगे चलकर मध्य पद गुणनखण्डन जैसी प्रक्रियाओं में उपयोग होता है, जो द्विघात समीकरणों को हल करने में बहुत काम आता है।

II. दूसरी ओर, 1 और 0 वाले सवाल बच्चों को यह समझाने में मदद करते हैं कि गुणा और भाग में इन दोनों संख्याओं की विशेष भूमिका होती है, 1 संख्या को नहीं बदलता और 0 किसी भी संख्या को गुणा करने पर 0 बना देता है। इससे इनकी अलग-अलग ख़ासियत साफ़ समझ में आती है।

Reference

1. Addition pullout: https://bit.ly/4o5Q5YC
2. Subtraction pullout: https://bit.ly/48BAHON
3. Commutative property of addition: https://bit.ly/4nXcTcZ
4. Word problems: https://bit.ly/4odUfxq
5. Word problem Worksheet: https://bit.ly/49lXhuW

स्वाती सरकार अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी के स्कूल ऑफ़ कंटीन्यूइंग एजुकेशन और यूनिवर्सिटी रिसोर्स सेंटर में सहायक प्राध्यापक हैं। गणित उनके जीवन का दूसरा प्यार है (पहला प्यार ड्राइंग है)। उन्होंने इंडियन स्टैटिस्टिकल इंस्टीट्यूट से बी स्टेट-एम स्टेट और यूनिवर्सिटी ऑफ़ वाशिंगटन, सिऐटल से गणित में एमएस किया है। वे एक दशक से अधिक समय से बच्चों और शिक्षकों के साथ गणित विषय पर काम कर रही हैं। विशेष रूप से ओरिगामी आधारित किसी भी चीज़ में उनकी गहरी रुचि है। उनसे swati.sircar@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : रोशन ख़ान **पुनरीक्षण** : प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर** : अनुज उपाध्याय

भागीदारी के लिए आमंत्रित हैं

गणित स्वभाव से संचयी (cumulative) और पदानुक्रमित (hierarchical) है। इसलिए, एक शिक्षक के दृष्टिकोण से, यह सुनिश्चित करना महत्त्वपूर्ण है कि शिक्षार्थियों के पूर्व अपेक्षित (prerequisite) ज्ञान में कोई कमी न हो। कुछ मामलों में, इसके लिए पिछली कक्षाओं में पढ़ाई गई अवधारणाओं के स्मरण (recall) या पुनरीक्षण (revision) की आवश्यकता हो सकती है।

हम एट राइट एंगल्स में ऐसे लेख प्रकाशित करने पर विचार कर रहे हैं जो शिक्षकों द्वारा नए टॉपिकों को शुरू करने में अपनाई गई रणनीतियों पर चर्चा करते हैं। हम पूर्व अपेक्षाओं के साथ-साथ, उन विशिष्ट चुनौतियों को ध्यान में रखेंगे जिनका सामना उन्हें तब करना पड़ सकता है जब कक्षा के कुछ बच्चों द्वारा पूर्व अपेक्षित ज्ञान प्राप्त नहीं किया गया हो। हम इस बात पर भी चर्चा करेंगे कि वे ऐसी चुनौतियों से कैसे निपट सकते हैं।

उदाहरण के लिए, 'भिन्न' विषय अब कक्षा-3 में शुरू किया गया है, जो कक्षा-4 और 5 में जारी रहता है। कक्षा-3 में भिन्नों पर अध्याय के लिए निम्नलिखित पूर्व अपेक्षाएँ पहचानी जा सकती हैं :

व्यापक रूप से : संख्या बोध, प्राकृत संख्याओं के जोड़ और 2 से गुणा की संक्रियाएँ।

व्यापक रूप से : क्षेत्रफल की सहज समझ - यह निष्कर्ष निकालने के लिए उनकी तुलना करना कि कौन-सा अधिक है, कौन-सा कम है, और कौन-सा बराबर है।

विशेष रूप से : प्राकृत संख्याओं की तुलना करना (कम-से-कम छोटी संख्याओं की)।

शिक्षक को किसी टॉपिक के लिए आवश्यक अवधारणाओं, कौशलों, सोच (गुणात्मक सोच/योगात्मक सोच), गणनाओं और कभी-कभी सहज समझ के सन्दर्भ में पूर्व अपेक्षाओं पर ध्यान देना होगा।

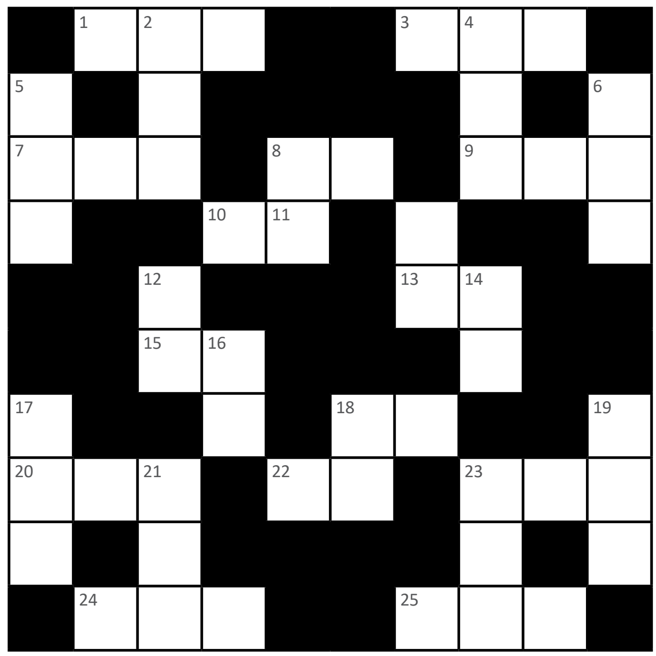
हम अपने पाठकों, विशेष रूप से कक्षा-3, 4 और 5 के विद्यार्थियों को पढ़ाने वाले शिक्षकों, से अनुरोध करते हैं कि वे नए टॉपिकों की योजना बनाने और उन्हें पढ़ाने के दौरान इन प्रक्रियाओं को कैसे पूरा किया गया है, यह समझने में हमारी मदद करने के लिए यहाँ दिए गए QR कोड या लिंक https://bit.ly/49dSbkn पर दिए गए फार्म को भरने के लिए थोड़ा समय निकालें।

वर्ग-संख्या पहेली

स्वाती सरकार

यह वर्ग-संख्या पहेली इसी अंक में फ़ैक्ट फ़ैमिली पर प्रकाशित लेख का फॉलोअप है। जोड़ फ़ैक्ट फ़ैमिली दरअसल तीन प्राकृत संख्याओं का एक समुच्चय है, जिसमें कि दो संख्याओं का जोड़ तीसरी संख्या के बराबर होता है। उदाहरण के लिए, {2, 3, 5} एक फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाते हैं क्योंकि 2 + 3 = 5 होता है। लेकिन समुच्चय {6, 4, 1} जोड़ फ़ैक्ट फ़ैमिली नहीं बनाते हैं।

नोट : चूँकि फ़ैक्ट फ़ैमिली एक समुच्चय है, इसलिए संख्याओं का क्रम मायने नहीं रखता।



वर्ग-संख्या पहेली हल करें

संकेत : बाएँ से दाएँ

1 : 307 और 50 के जोड़ वाली फ़ैक्ट फ़ैमिली में सबसे बड़ी सम्भावित संख्या

3 : यह संख्या 200 और 14 के साथ जोड़ फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाती है।

7 : 250 और 126 संख्याओं वाली जोड़ फ़ैक्ट फ़ैमिली में सबसे छोटी संख्या

8 : 14 और 42 संख्याओं वाली फ़ैक्ट फ़ैमिली में सबसे बड़ी सम्भावित संख्या

9 : यह संख्या 170 और 600 संख्याओं के साथ फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाती है।

10 : 36 और 68 संख्याओं वाली फ़ैक्ट फ़ैमिली की सबसे छोटी संख्या

13 : यह संख्या 25 और 100 संख्याओं के साथ फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाती है।

15 : यह संख्या {7, 11} के साथ-साथ {3, 15} के साथ फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाती है।

18 : यह संख्या (37, 3} के साथ-साथ {40, 6} के साथ फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाती है।

20 : 300 और 202 संख्याओं वाली फ़ैक्ट फ़ैमिली में सबसे बड़ी सम्भावित संख्या

22 : यह संख्या 39 और 100 संख्याओं के साथ फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाती है।

23 : 700 और 396 संख्याओं वाली फ़ैक्ट फ़ैमिली में सबसे छोटी संख्या

24 : यह संख्या 500 और 40 के साथ-साथ 300 और 160 के साथ भी फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाती है।

25 : यह संख्या 300 और 200 के साथ-साथ 900 और 400 के साथ भी फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाती है।

की-वर्ड : फ़ैक्ट फ़ैमिली, जोड़, घटा, पहेली, वर्ग-पहेली

संकेत : ऊपर से नीचे

2 : इस संख्या में ऐसे अंक हैं जो ऐसी फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाते हैं जिसमें हर संख्या 6 से कम है।

4 : 520 और 304 संख्याओं वाली फ़ैक्ट फ़ैमिली में सबसे बड़ी सम्भावित संख्या

5 : यह संख्या 209 और 210 संख्याओं के साथ एक फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाती है।

6 : यह संख्या 331 और 471 संख्याओं के साथ एक फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाती है।

8 : यह संख्या 60 और 8 संख्याओं के साथ एक फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाती है।

11 : यह संख्या 70 और 23 संख्याओं के साथ एक फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाती है।

12 : यह संख्या 100 और 29 संख्याओं के साथ एक फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाती है।

14 : यह संख्या 27 और 26 संख्याओं के साथ एक फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाती है।

16 : यह संख्या 101 और 17 संख्याओं के साथ एक फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाती है।

17 : 425 और 525 संख्याओं वाली फ़ैक्ट फ़ैमिली में सबसे बड़ी सम्भावित संख्या

18 : यह संख्या 15 और 16 संख्याओं के साथ एक फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाती है।

19 : 687 और 153 संख्याओं वाली फ़ैक्ट फ़ैमिली में सबसे बड़ी संख्या

21 : इस संख्या में ऐसे अंक हैं जो ऐसी फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाते हैं जिसमें हर संख्या 7 से कम है।

23 : यह संख्या 444 और बाएँ से दाएँ के संकेत क्रमांक 7 में आई संख्याओं के साथ एक फ़ैक्ट फ़ैमिली बनाती है।

इस वर्ग-संख्या पहेली का हल पेज 46 पर दिया गया है।

अनुवाद : सीमा **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

चार अंकों वाली कोई संख्या ‘abcd’ सोचें। अब, इस संख्या के पहले अंक ‘a’ को संख्या के आख़िर में ले जाएँ ताकि वह अंक संख्या का आख़िरी अंक बन जाए जो ‘bcda’ होगा। अब, नई संख्या को पुरानी (सोची गई) संख्या में से घटाएँ।

उदाहरण के लिए, पहले सोची गई संख्या ‘abcd’ यदि 3568 थी, तो अगली संख्या ‘bcda’ 5683 बनी होगी।

मार्च, 2025 के अंक में, हमने एक सम्बन्ध देखा था। अगर हमें इन दो संख्याओं से जुड़ी कुछ जानकारी दी जाती है तो हमें सोची गई संख्या का अन्दाज़ा लगाने में मदद मिलती है। इस अंक में भी हम यही दावा कर रहे हैं। अगर दोनों संख्याओं के बीच का अन्तर और मूल सोची गई संख्या का पहला अंक पता हो, तो बताया जा सकता है कि सोची गई संख्या कौन-सी थी। (दिए गए उदाहरण में, यदि मुझे पता है कि अन्तर 2115 है और पहला अंक 3 है, तो मैं बता सकता हूँ कि सोची गई संख्या 3568 थी।)

क्या आप अन्दाज़ा लगा सकते हैं कि मैं यह कैसे करता हूँ? कुछ अन्य चार अंकों वाली संख्याओं के साथ ऐसा करने की कोशिश करें। अब इस ट्रिक को n-अंकों वाली संख्या के लिए सामान्यीकरण करने की कोशिश करें! और अपने जवाब AtRightAngles.editor@apu.edu.in पर भेजें।

रचनाकार : यतिराज शर्मा

परिमाप और क्षेत्रफल को वर्गाकार टाइल्स की मदद से समझना

मोहन आर.

परिमाप और क्षेत्रफल के बीच के सम्बन्ध को समझना कक्षा-3 से 7 तक के बच्चों के लिए एक मज़ेदार और खोजपूर्ण गतिविधि हो सकती है। वर्गाकार टाइल्स इसके लिए बहुत उपयोगी साधन हैं। क्योंकि वर्गाकार टाइल्स के साथ कार्य करके बच्चे अपने सहज ज्ञान से इन अवधारणाओं के सम्बन्ध में खोज-बीन और कल्पना कर पाते हैं। इस लेख में हम कुछ ऐसी गतिविधियाँ साझा कर रहे हैं जो बच्चों को आकार, क्षेत्रफल और परिमाप के बीच के सम्बन्ध को समझने में मदद करती हैं। इन गतिविधियों से बच्चे यह भी सीखते हैं कि कैसे किसी आकार का परिमाप कम किया जा सकता है या क्षेत्रफल को अधिकतम किया जा सकता है।

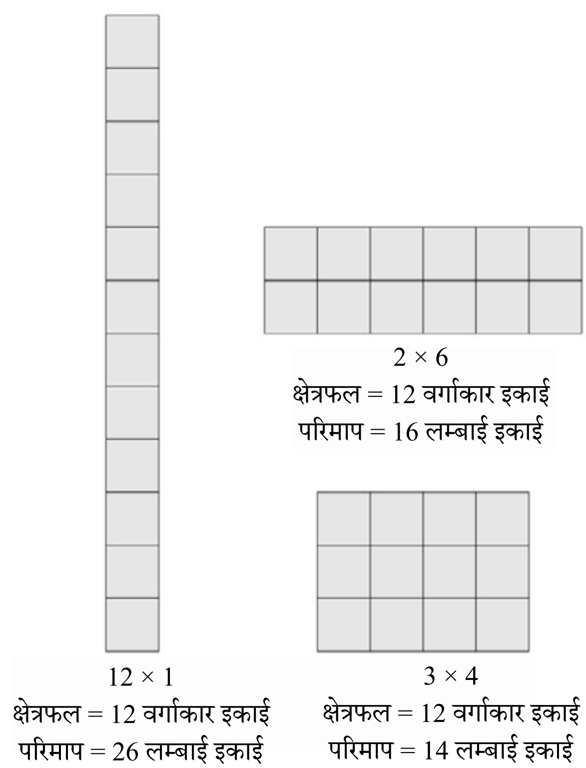
ज़रूरी सामग्री

- मोटे चार्ट पेपर की 5 × 5 सेंटीमीटर की वर्गाकार टाइल्स
- पेंसिल और काग़ज़
- ग्रिड या ग्राफ़ पेपर (आकृतियाँ बनाने और रफ़ कार्य के लिए)

गतिविधि-1 : छोटे से शुरू करें (कक्षा 3–5)

नई एनसीईआरटी किताबों में क्षेत्रफल को वर्ग इकाइयों के माध्यम से कक्षा-3 में और लम्बाई को कक्षा-4 में परिचित कराया गया है।

शिक्षक गतिविधि की शुरुआत बच्चों को क्षेत्रफल और परिमाप का संक्षिप्त परिचय देकर या रिवीज़न से कर सकते हैं। और यह चर्चा कर सकते हैं कि टाइल्स की मदद से इन्हें कैसे मापा जाता है (**चित्र-1** देखें)। इसके बाद बच्चों को दो-दो की जोड़ियों में बाँटा जाता है। हर बच्चे को 12 वर्गाकार टाइल्स दी जाती हैं। हर बच्चे से सभी 12 टाइल्स का उपयोग करके आयत बनाने को कहा जाता है, आयत की दिशा मायने नहीं रखती। हर जोड़ी आपस में चर्चा करके आयत बनाने के लिए टाइल्स की अलग-अलग व्यवस्था खोजती है। फिर ग्रिड पेपर पर इन व्यवस्थाओं को सावधानीपूर्वक चित्रित करती है। फिर बच्चों से कहा जाता है कि वे इन आयतों का परिमाप (जो बदलता रहता है) और क्षेत्रफल (जो हमेशा 12 वर्ग इकाई रहेगा) की गणना करके रिकॉर्ड करें।



चित्र-1 : 12 टाइल्स से बने कुछ आयत

की-वर्ड : क्षेत्रफल, परिमाप, वर्गाकार टाइल्स, पॉलीओमिनोज़, फ़्लोर प्लान

चित्र-2 : टाइल्स से खेलते बच्चे (Created with GPT)

गतिविधि 2 : फ़र्श को घेरना (कक्षा 4–6)

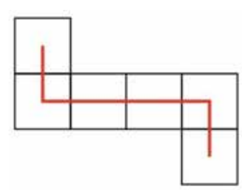
जब बच्चे वर्गाकार टाइल्स की किसी छोटी संख्या से आयत बनाना सीख जाते हैं, तो शिक्षक इस गतिविधि को आगे बढ़ाते हुए उन्हें ऐसे अन्य आकार बनाने के लिए कह सकते हैं जो ज़रूरी नहीं कि आयत ही हों। स्पष्टता के लिए, इन नए आकारों को 'फ़्लोर प्लान' (floor plans) कहा जा सकता है। फ़्लोर प्लान के लिए सिर्फ़ एक शर्त है : आकार सतत होना चाहिए। यानी, किसी भी टाइल से दूसरी किसी भी टाइल तक साझा किनारों से होकर पहुँचना सम्भव होना चाहिए। (**चित्र-3** और **4** देखें)

(क) ऐसा फ़्लोर प्लान जिसमें L-आकार की दोनों टाइलें किसी साझा किनारे से नहीं जुड़ी हैं।

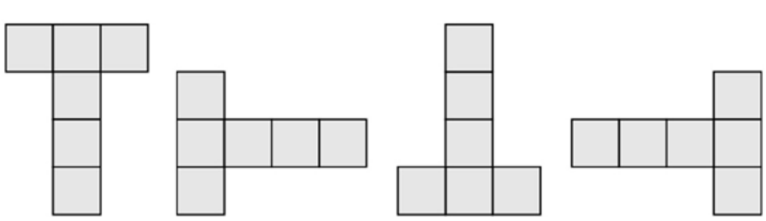
(ख) ऐसा फ़्लोर प्लान जिसमें दो अलग-अलग हिस्से हैं – यानी पूरा आकार एक यूनिट नहीं है।

चित्र-3 : दो ऐसे फ़्लोर प्लान जो आपस में किनारे साझा करते हुए नहीं जुड़े हैं। लाल रेखा पर चलते हुए हम किनारों के ज़रिए पूरे आकार को पार नहीं कर सकते।

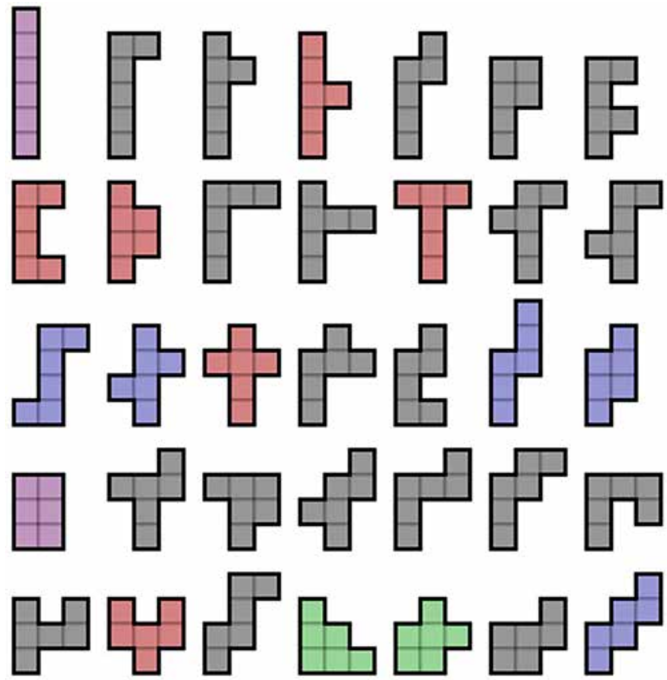
इस गतिविधि का मुख्य उद्देश्य यह पता लगाना है कि किस फ़्लोर प्लान का परिमाप सबसे कम है। व्यावहारिक रूप से इसका मतलब है कि कौन-सी ऐसी टाइल व्यवस्था होगी जिससे चारों तरफ़ कम-से-कम बाड़ लगेगी यानी जिसकी लागत सबसे कम होगी। इस गतिविधि के लिए शिक्षक हर बच्चे को 6 वर्गाकार टाइल्स देते हैं। बच्चों से कहा जाता है कि वे इन टाइल्स से अधिकतम सम्भव फ़्लोर प्लान बनाएँ और उन्हें ग्रिड पेपर पर चित्रित करें। ऐसा करते हुए वे ध्यान दें कि आकार को पलटकर बनाने या घुमाने से कोई फ़र्क़ नहीं पड़ता, क्योंकि इससे परिमाप और क्षेत्रफल नहीं बदलता (**चित्र-5**)। सभी फ़्लोर प्लान बनाने के बाद बच्चे हर आकार के परिमाप की गणना करके दर्ज करते हैं।



चित्र-4 : यहाँ लाल रेखा पर चलते हुए हम प्रत्येक टाइल तक पहुँच सकते हैं, क्योंकि हरेक टाइल किसी-न-किसी दूसरी टाइल के किनारे से जुड़ी हुई है।



चित्र-5 : फ़्लोर प्लान को घुमाने या पलटने से परिमाप या क्षेत्रफल नहीं बदलता।

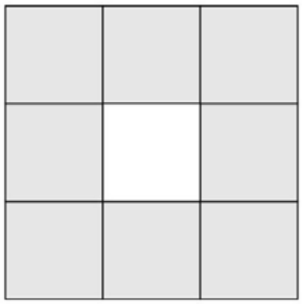


चित्र-6 : 6 टाइल्स से बनने वाले सभी जुड़े हुए फ़्लोर प्लान। Credits: By R. A. Nonenmacher - Own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4773113

नोट : कभी-कभी फ़्लोर प्लान के अन्दर रिक्त भाग हो सकता है (जैसे **चित्र-7** में है)। इस स्थिति में परिमाप बाहरी सीमा और अन्दरूनी सीमा का योग होगा।

शिक्षक इन सवालों पर बच्चों के साथ चर्चा करें और बच्चे *तर्क* दें कि क्यों उनके जवाब सही हैं :

1. किस व्यवस्था में परिमाप सबसे अधिक है? सबसे कम है?
2. व्यवस्था बदलने पर परिमाप बदलता है पर क्षेत्रफल वही क्यों रहता है?
3. 12 टाइल्स से आयत बनाते समय, क्या आपने आयत की भुजाओं की माप और 12 के गुणजों के बीच कोई सम्बन्ध देखा?
4. यदि 12 की जगह 13 टाइल्स लें तो क्या होगा?
5. यदि 24 टाइल्स लें तो क्या होगा?
6. क्या परिमाप हमेशा सम संख्या (even) होगा?
7. यदि 12 की बजाय n टाइल्स ली जाएँ तो क्या होगा (बड़ी कक्षा के बच्चों के लिए)?



क्षेत्रफल = 8 इकाई
परिमाप = बाहरी सीमा और अन्दरूनी सीमा की लम्बाई।
तो परिमाप = 12 + 4 = 16 इकाई

चित्र-7 : 8 वर्गाकार टाइल्स वाला एक फ़्लोर प्लान।

गतिविधि-3 : बाड़ लगाना (कक्षा 5–7)

इस शृंखला की अन्तिम गतिविधि एक सम्बन्धित लेकिन उलटे प्रश्न पर आधारित है : यदि परिमाप तय हो, तो कौन-सा आयत सबसे बड़ा क्षेत्रफल देता है? इसे एक वास्तविक स्थिति के रूप में भी समझाया जा सकता है : कल्पना करें कि आप वर्गाकार टाइल्स से बनी ज़मीन का अधिक-से-अधिक हिस्सा घेरना चाहते हैं। आपके पास बाड़ लगाने के लिए केवल तय लम्बाई (परिमाप) की सामग्री है। आप अपनी बाड़ को किस तरह व्यवस्थित करेंगे कि उससे घेरे जाने वाली ज़मीन का क्षेत्रफल अधिकतम हो?

शुरुआत में शिक्षक परिमाप के लिए 24 इकाई तय करते हैं। फिर बच्चे इस निश्चित परिमाप के साथ जितने भी सम्भव आयत बन सकते हैं, बनाते हैं। हर आयत बनाकर वे उसका क्षेत्रफल निकालते हैं और तुलना करते हैं कि किस आयत का क्षेत्रफल सबसे अधिक है। इस चरण पर शिक्षक बच्चों को धीरे-धीरे बीजगणित, तालिका बनाना और व्यवस्थित तर्क की भाषा से परिचित करा सकते हैं, ताकि बच्चे अपनी खोजों को बेहतर ढंग से व्यवस्थित कर सकें और सोच सकें। जब बच्चे आयतों में निपुण हो जाते हैं, तो उन्हें एक और चुनौती दी जा सकती है : नियत परिमाप के लिए ग़ैर-आयताकार फ़्लोर प्लान बनाकर देखो, कौन-सा आकार सबसे बड़ा क्षेत्रफल देता है?

निष्कर्ष

इन इंटरैक्टिव और खोजी गतिविधियों के माध्यम से बच्चे परिमाप और क्षेत्रफल से जुड़े महत्त्वपूर्ण गणितीय विचारों को सहज रूप से समझते हैं। वे विभिन्न पैटर्न खोजते हैं, व्यवस्थित तर्क व सोच विकसित करते हैं और महसूस करते हैं कि गणितीय अवधारणाएँ व्यावहारिक परिदृश्यों से कैसे जुड़ती हैं। साधारण वर्ग टाइलों का उपयोग करके, ये गतिविधियाँ बुनियादी कौशलों का निर्माण करती हैं और गणित के रचनात्मक तथा व्यावहारिक होने के बारे में गहरी समझ विकसित करती हैं।

इस टॉपिक पर कुछ अन्य विचार

1. *एट राइट एंगल* के कुछ पुराने लेखों में भी ऐसे ही विचारों पर चर्चा की गई है। उदाहरण के लिए यह लिंक देखें https://bit.ly/3L0uH8u जिसमें वर्गाकार ग्रिड पर कई ऐसी ही खोजें शामिल हैं।
2. n = 3 के छोटे फ़्लोर प्लान बनाकर निम्न प्रकार की जोड़ी ढूँढ़ी जा सकती है : (क) क्षेत्रफल और परिमाप दोनों समान (ख) क्षेत्रफल समान, परिमाप अलग (ग) परिमाप समान, क्षेत्रफल अलग।
3. L आकार का कोना काटना (इसे L-ing कहते हैं), जिसमें परिमाप वही रहता है लेकिन क्षेत्रफल घटता है। दूसरा है, किसी भुजा पर U आकार का कट लगाना (U-ing), जिसमें क्षेत्रफल घटता है लेकिन परिमाप बढ़ जाता है। यह पॉलीओमिनोज़ के साथ किया जा सकता है। टास्क-4 और 5 देखें : https://bit.ly/47i5jCt। पॉलीओमिनोज़ उन आकृतियों को कहते हैं जो एक समान वर्गों को किनारों से जोड़कर बनाई जाती हैं।
4. हेक्सोमिनो पर भी एक और टियरआउट उपलब्ध है : https://bit.ly/49fKkmu

मोहन आर. अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी, बेंगलूरु में गणित पढ़ाते हैं। वे एक बीजगणितज्ञ के रूप में प्रशिक्षित हैं और गणित शिक्षा व गणित संचार में भी रुचि रखते हैं। वे कर्नाटक क्षेत्र के लिए मैथमेटिक्स ओलंपियाड के रीजनल कोऑर्डिनेटर भी हैं। उनसे mohan.r@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : गणेश मादुलकर **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

प्लेटो के बच्चे : एक गणितीय रोलप्ले

पद्मप्रिया शिराली

पिछले कई वर्षों से मैं गणित पर आधारित कहानियों को छोटी नाटिकाओं में बदलने के तरीक़े खोजती रही हूँ जो विद्यार्थियों के लिए मनोरंजक साबित हुए हैं। यह गतिविधि गणित को अधिक सुलभ और रोमांचक बनाती है, कलाकारों के साथ-साथ दर्शकों के लिए भी।

गणितीय नाटक विभिन्न क्षमताओं वाले शिक्षार्थियों की मदद कर सकते हैं, साथ ही सहयोग और रचनात्मकता को बढ़ावा दे सकते हैं। इनमें एक सकारात्मक दृष्टिकोण बनाने, पेन-पेपर से सवाल-जवाब की नीरसता को दूर करने और विषय के बारे में विद्यार्थी की धारणा में बदलाव लाने की क्षमता होती है। यह गणित के प्रति डर को भी कम कर सकता है।

यह स्क्रिप्ट एक बड़ी स्क्रिप्ट का हिस्सा है जिस पर मैंने नॉर्टन जस्टर की कहानी की किताब 'द फैंटम टोलबूथ' को रूपान्तरित करते समय काम किया था। इस कहानी में मुख्य पात्र विभिन्न काल्पनिक स्थानों की यात्रा करता है। यहाँ दिया गया दृश्य डिजिटोपोलिस (Digitopolis) नामक स्थान की यात्रा का है। मैंने पात्रों को बदल दिया है और कहानी में नए तत्वों को शामिल किया है।

चिन्नू के लिए पाँच शानदार दोस्त!

चिन्नू आकृतियों की भूमि में घूम रही है और एक द्वादशफलक (dodecahedron) से मिलती है। इस अजीबोग़रीब आकृति के कई फलक हैं और हर फलक पर एक अलग अभिव्यक्ति है।

चिन्नू

वाह! तुम्हारे तो बहुत सारे चेहरे हैं। तुम कौन हो?

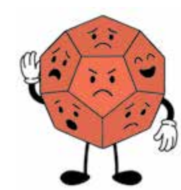
(गोल घूमते हुए) मैं एक द्वादशफलक हूँ –
एक ऐसी आकृति जिसके **बारह फलक** होते हैं
(फिर से गोल घूमना शुरू कर देता है)।

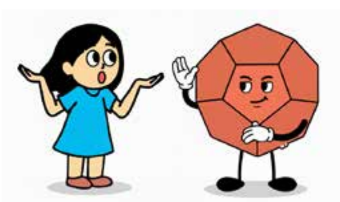
द्वादशफलक

की-वर्ड : *प्लेटोनिक ठोस, शिक्षण पद्धति, समावेशी शिक्षा, रोल-प्ले, टीम-वर्क*

अरे! तुम्हें गोल-गोल घूमता देखकर मुझे चक्कर आ रहे हैं।
रुक जाओ, प्लीज़!
(दर्शकों से) इसके कितने सारे चेहरे हैं!
तुम्हें बारह चेहरों की क्या ज़रूरत है?

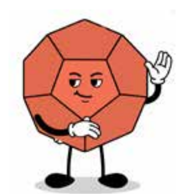
तुम्हारा मतलब है जहाँ से तुम आई हो,
वहाँ तुम जैसे लोगों का केवल एक ही चेहरा होता है?
छिः छिः छिः... *(चिन्नू पर दया दिखाते हुए)* अलग-अलग भावों के लिए
एक ही चेहरे का उपयोग करके तुम उसे घिस डालोगे।
मुझे देखो, मेरे पास मुस्कराने के लिए एक, दाँत निकालने के लिए एक,
रोने के लिए एक, त्यौरी चढ़ाने के लिए एक ...





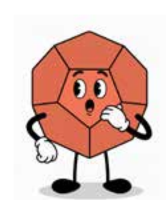
और तुम्हारे हर एक चेहरे पर 5 किनारे हैं!

(अहंकार से) मेरा हर फलक एक उत्तम **पंचभुज** (pentagon)
के आकार का है।



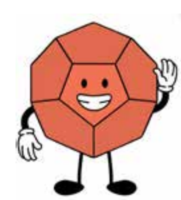
ओह। यह एक पंचभुज है। मैं हमेशा
सोचती थी कि यह क्या होता है...

(चिन्नू को सुधारते हुए) यह एक **सम-पंचभुज** (regular
pentagon) है; मेरी सभी भुजाएँ और कोने बराबर हैं।



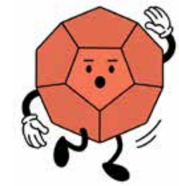
हम्म। *(समानता को देखते हुए)* क्या तुम लुढ़क सकते हो?
(द्वादशफलक को हल्का-सा धकेलती है)

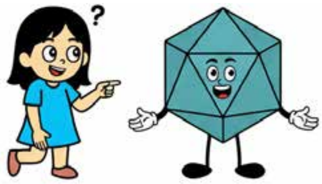
केवल तभी जब कोई मुझे बहुत तेज़ी से लुढ़काए!
लेकिन ज़्यादातर, मुझे चुपचाप बैठना और अपने सभी चेहरे दिखाना पसन्द है।
(मुस्कराता हुआ चेहरा दर्शकों की ओर करता है)



क्या तुम्हारे परिवार के अन्य सदस्य भी
तुम्हारे जैसे ही हैं?

कुछ मायनों में हाँ, और कुछ मायनों में नहीं। यह रहा मेरा छोटा भाई, **विंशतिफलक** (Icosahedron)। *(विंशतिफलक अन्दर आता है)*





ओहो ! तुम भी उतने ही दिलचस्प हो और तुम्हारे तो और भी ज़्यादा चेहरे हैं *(गिनने की कोशिश करती है)*।

हाँ। हम सबमें, मैं सबसे ज़्यादा **'फलक'** वाला हूँ, मेरे 20 त्रिकोणीय चेहरे हैं।

विंशतिफलक

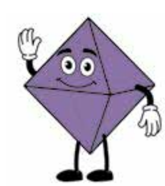
मैं सोच रही हूँ कि तुम दोनों में से कौन सबसे अच्छी तरह लुढ़क सकता है!

मैं सबसे अच्छी तरह से लुढ़क सकता हूँ! अपने 20 चेहरों के साथ, मैं एक **सुपर-फैंसी पासे** की तरह लुढ़कता हूँ।

मैं भी लुढ़कता हूँ, लेकिन विंशतिफलक जितनी दूर या ज़ोर से नहीं!

(अष्टफलक (Octahedron) प्रवेश करता है)

अरे, दोस्तो! यहाँ क्या चल रहा है? यह अजीब एक-चेहरे वाला साथी कौन है?

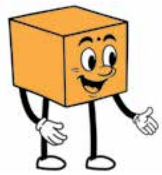


अष्टफलक

चतुष्फलक (Tetrahedron) *और* ***घन (Cube)*** *भी प्रवेश करते हैं, और वे सब उत्सुकता से घूरते हैं (अपने सहानुभूतिपूर्ण चेहरे चिन्नू की ओर करते हुए)। चिन्नू थोड़ी सिकुड़ जाती है और उसे अपने एक ही चेहरे के प्रति शर्म महसूस होने लगती है।*

यह मेरा दूसरा भाई है, एक अष्टफलक। और ये मेरी दो बहनें हैं।

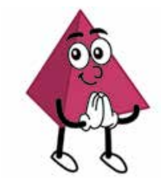
(दर्शकों से) कितने मुश्किल नाम हैं!



घन

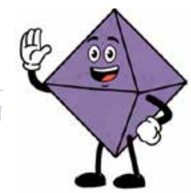
(घन हाथ मिलाते हुए) नमस्ते! मैं एक **घन** हूँ – डिब्बे जैसा। मेरे 6 वर्गाकार फलक हैं।

(ख़ुद से बात करते हुए) यह उन फैंसी ब्लॉकों जैसा दिखता है जिनसे मैं खेलती थी!

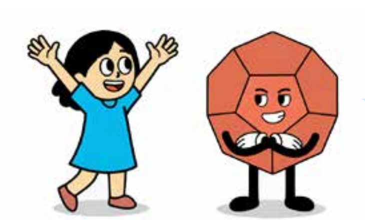


चतुष्फलक

(चतुष्फलक नमस्ते करते हुए) मैं एक **चतुष्फलक** हूँ। मेरे 4 फलक हैं और वे सभी त्रिकोणीय हैं। लेकिन, मैं नुकीला और थोड़ा रहस्यमय हूँ! *(ज़ोर देते हुए)*

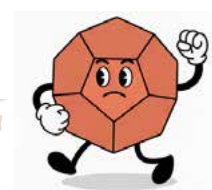


मुझे मत भूलो! मैं एक **अष्टफलक** हूँ। मेरे 8 त्रिकोणीय फलक हैं *(घूमते हुए)*।



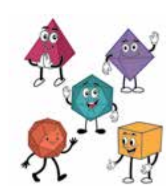
(दर्शकों से) यह कुछ-कुछ दो पिरामिडों को एक साथ चिपकाए जाने जैसा दिखता है।

(द्वादशफलक से) क्या तुम्हारे परिवार में और भी लोग हैं?



नहीं। हम सब **विशेष प्लेटोनिक ठोस** (Platonic solids) परिवार से सम्बन्धित हैं। हमारे रिश्तेदार ज़रूर हैं जो अपने-अपने तरीक़े से दिलचस्प हैं।

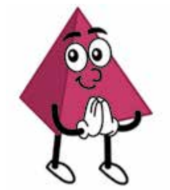
आप सभी से मिलकर मुझे बहुत ख़ुशी हुई।



हमें भी आपसे मिलकर ख़ुशी हुई।
हमने कभी सोचा ही नहीं था कि एक चेहरा इतने सारे भाव दिखा सकता है!

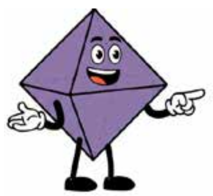
पर एक बात मेरी समझ में नहीं आई। आपको **'प्लेटोनिक ठोस'** क्यों कहा जाता है?

जी! हमें 'प्लेटोनिक' इसलिए कहा जाता है क्योंकि बहुत समय पहले **प्लेटो** नाम के एक **बुद्धिमान व्यक्ति** ने हमारा अध्ययन किया था।
उनका मानना था कि हम दुनिया को बनाने वाली विशेष आकृतियाँ हैं।



हममें बहुत कुछ समान है। हमारे सभी फलक एक ही आकार और नाप के हैं, और हमारे कोने और किनारे सभी बराबर हैं।

आप किस चीज़ से बने हैं?

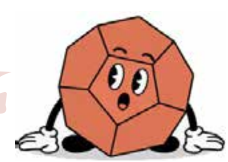


हम किसी भी चीज़ से बन सकते हैं – लकड़ी, प्लास्टिक, यहाँ तक कि **जेली** से भी – अगर आप हमारे फलकों को एक जैसा बनाते हैं!

बस यह ध्यान रखना कि हमें बनाने के बाद अपना गणित का होमवर्क मत खा लेना! *(सभी हँसते हैं)*

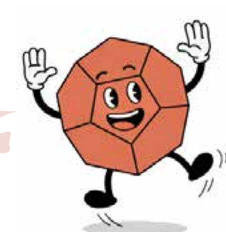
अगर मैं तुम्हें काग़ज़ से बनाऊँ, तो क्या तुम मज़बूत रहोगे?

अगर तुम काग़ज़ को ध्यान से मोड़ोगे, तो मैं आश्चर्यजनक रूप से **कठोर** बनूँगा! मुझे रंगीन होना भी बहुत पसन्द है।



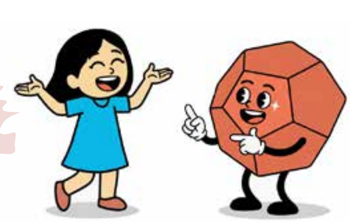
क्या मैं हर चेहरे को अलग रंग से रंग सकती हूँ?

यह मुझे बहुत अच्छा लगेगा! लेकिन उसके लिए तुम्हें इन्द्रधनुष में जितने रंग हैं, उससे भी ज़्यादा रंगों की ज़रूरत होगी! चलो देखते हैं कि तुम कितनी रचनात्मक हो।



(कुछ क्रेयॉन के साथ काम करना शुरू करती है)
तुम अब तक की सबसे शानदार आकृति हो जिससे मैं मिली हूँ!

धन्यवाद! हम सब तुम्हारे ज्यामितीय मित्र बनकर बहुत ख़ुश हैं।



कक्षा के अनुभवों का उपयोग और रोलप्ले का महत्व

शिक्षक अकसर विद्यार्थियों को गणितीय विचारों से जोड़ने में मदद करने के लिए विभिन्न कक्षा अनुभवों का उपयोग करते हैं। **रोलप्ले** भी एक ऐसा ही तरीक़ा है, हालाँकि यह गणित की कक्षाओं में आम नहीं है। यह एक **तैयार नाटिका** है जिसे पाठक अपने शिक्षार्थियों के लिए अपने हिसाब से बदलकर उपयोग कर सकते हैं। इसका उपयोग शब्दावली विकसित करने, अवलोकन को प्रेरित करने, तर्क को प्रोत्साहित करने और भागीदारी को बढ़ावा देने के लिए कर सकते हैं।

रोलप्ले कई आवाज़ों को मौक़ा देता है, गणित के प्रति भय कम करता है, और विद्यार्थियों को सन्दर्भ के अनुसार गणितीय भाषा को 'बोलने' की अनुमति देता है। हम पाठकों को निम्नलिखित प्रश्नों पर विचार करने के लिए आमंत्रित करते हैं :

- नाटिका के किन दृश्यों या उसके किन तत्वों को आप अपनी कक्षा के लिए रखेंगे या बदलेंगे?
- आप समावेशिता और साझा भागीदारी कैसे सुनिश्चित करेंगे?
- शब्दावली, तर्क, या दृश्यीकरण (visualization) को मज़बूत करने के लिए क्या परिवर्तन किए जा सकते हैं?
- आप अपने विद्यार्थियों के लिए कहानी को कैसे आगे बढ़ा सकते हैं?

रोलप्ले गणित को जीवन्त बनाता है : विद्यार्थी आकृतियों की भाषा बोलते हैं, संरचना और गुणों को नोटिस करते हैं, और एक आनन्दमय माहौल में सटीक शब्दावली का अभ्यास करते हैं। इसके छोटे दृश्य संवादों को अनुकूलित करने, व्यापक भागीदारी के लिए भागों को पुनर्वितरित करने, सामग्री (props) या गति जोड़ने और नेट बनाने (जैसे कि प्लेटोनिक ठोसों के नेट) जैसे फॉलो-अप से जुड़ने के लिए एक आधार है। इस सबसे ऊपर, शिक्षार्थियों को कहानी का सह-लेखक बनने दें। जब विद्यार्थी फलक (faces), किनारे (edges) और शीर्षों (vertices) जैसे विचारों को अभिनय से अभिव्यक्त करते हैं, तो समझ साझा और गहरी होती जाती है।

Reference

1. Juster, N. (2005). The phantom tollbooth (Illustrated by J. Feiffer). Yearling. (Original work published 1961).

पद्मप्रिया शिराली वैली स्कूल (बेंगलूरु) और ऋषि वैली (आन्ध्र प्रदेश) स्थित कम्युनिटी मैथ सेंटर से जुड़ी हैं। वे यहाँ 1983 से काम कर रही हैं और इस दौरान उन्होंने गणित, कम्प्यूटर एप्लीकेशन, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन व तेलुगु जैसे कई विषय पढ़ाए हैं। 1990 के दशक में उन्होंने विख्यात गणितज्ञ श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ काम किया है। वे उस टीम का हिस्सा भी रहीं, जिसने ऋषि वैली रूरल सेंटर के मल्टीग्रेड एलिमेंट्री लर्निंग प्रोग्राम, जिसे 'स्कूल इन ए बॉक्स' के नाम से जाना जाता है, को तैयार किया था। वर्तमान में वे एनसीईआरटी की पाठ्यपुस्तक विकास टीम का हिस्सा हैं। उनसे padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

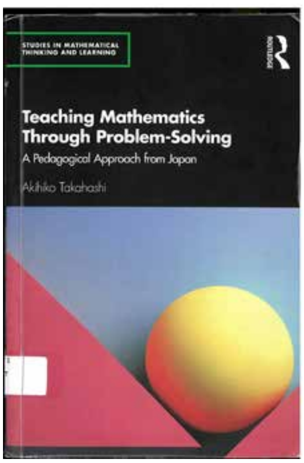
पेज 35 पर दी गई

वर्ग-संख्या पहेली का हल

■	(1) 3	(2) 5	7	■	■	(3) 1	(4) 8	6	■
(5) 4	■	1	■	■	■	■	2	■	(6) 8
(7) 1	2	4	■	(8) 5	6	■	(9) 4	3	0
9	■	■	(10) 3	2	■	(11) 4	■	■	2
■	■	(12) 7	■	■	■	(13) 7	(14) 5	■	■
■	■	(15) 1	(16) 8	■	■	■	3	■	■
(17) 9	■	■	4	■	(18) 3	4	■	■	(19) 8
(20) 5	0	(21) 2	■	(22) 6	1	■	(23) 3	0	4
0	■	4	■	■	■	■	2	■	0
■	(24) 4	6	0	■	■	(25) 5	0	0	■

समस्या-समाधान के माध्यम से गणित शिक्षण : जापान से एक शिक्षण तकनीक

लेखक : अकिहिको ताकाहाशी
समीक्षक : अनुषा टी.



चित्र-1

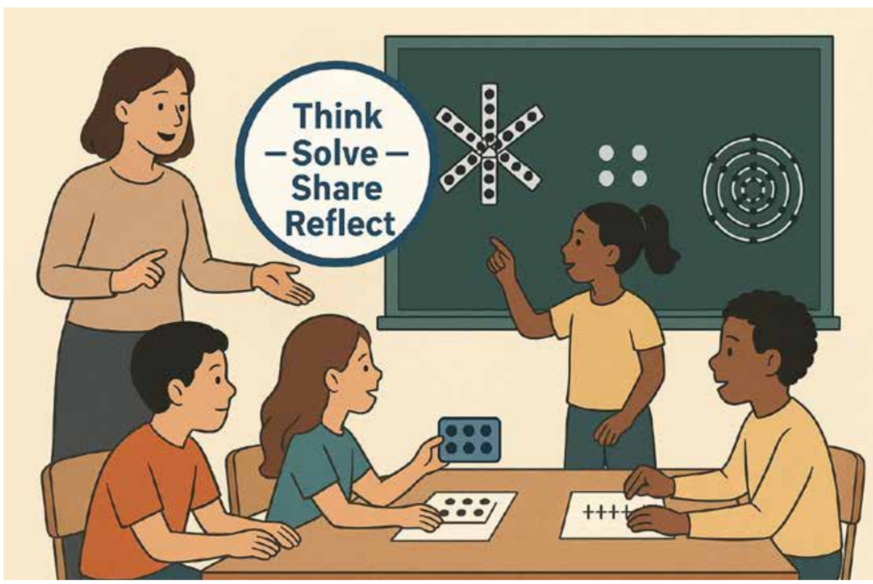
यह अकिहिको ताकाहाशी द्वारा लिखित पुस्तक 'Teaching Mathematics Through Problem Solving : A Pedagogical Approach from Japan' की समीक्षा है। यह पुस्तक 2021 में रूटलेज, टेलर एंड फ्रांसिस ग्रुप द्वारा प्रकाशित की गई थी। लेखक अकिहिको ताकाहाशी वर्तमान में शिकागो, इलिनॉय स्थित डीपॉल विश्वविद्यालय में एमेरिटस प्रोफ़ेसर के रूप में जुड़े हैं। उन्होंने अपने कॅरियर की शुरुआत जापान में गणित शिक्षक के रूप में की थी और बाद में डीपॉल विश्वविद्यालय में एसोसिएट प्रोफ़ेसर के रूप में काम किया। पाठ अध्ययन (लेसन स्टडी) में दो दशकों से अधिक के अनुभव के साथ, उन्होंने शोध और कक्षा अभ्यास के बीच कड़ी बनाने में विशिष्ट योगदान दिया है। उन्होंने जन शोध पाठों का संचालन किया, गणित के सन्दर्भ में समस्या-समाधान और चिन्तनशील जर्नलों पर विस्तृत लेखन किया, और नवाचारी शिक्षण विधियों को बढ़ावा दिया। इन योगदानों के कारण उन्हें पाठ अध्ययन शोध और व्यवहार के क्षेत्र में एक अग्रणी विशेषज्ञ के रूप में अन्तर्राष्ट्रीय स्तर पर मान्यता मिली है।

यह पुस्तक गणित शिक्षा के साहित्य में एक महत्त्वपूर्ण योगदान है। यह जापानी कक्षा अभ्यासों और वर्षों से चले आ रहे शोध को एक साथ समेटकर इस प्रकार प्रस्तुत करती है कि शिक्षक और शोधकर्ता, दोनों आसानी से समझ सकें। इसकी एक बड़ी ख़ूबी यह है कि यह Teaching Through Problem-Solving (TTP) नामक शिक्षण-पद्धति की विस्तृत और स्पष्ट व्याख्या प्रदान करती है। मैं इस बात से बहुत प्रभावित हूँ कि यह पुस्तक शैक्षणिक सिद्धान्त को कक्षा में वास्तव में होने वाली प्रक्रियाओं से बेहद प्रभावी तरीक़े से जोड़ती है। अकसर शैक्षिक अवधारणाएँ शोध-पत्रों तक सीमित रह जाती हैं और शिक्षकों तक नहीं पहुँच पातीं, लेकिन यह पुस्तक उन विचारों को व्यवहार में उतारने योग्य और कक्षाओं में प्रयोग करने लायक़ बनाती है। लेखक वास्तविक पाठों के उदाहरण, कक्षाओं की कहानियाँ और व्यावहारिक शिक्षण रणनीतियाँ देकर सिद्धान्त और व्यवहार के बीच मौजूदा दूरी को कम करते हैं। उनका लेखन केवल शोधकर्ताओं के लिए नहीं है, यह शिक्षकों और सामग्री तैयार करने वालों को भी कई ठोस विचार देता है जिन्हें वे आज़मा सकते हैं।

कई वर्षों से जापानी विद्यार्थी TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) और PISA[1] (Programme for International Student Assessment) जैसे अन्तर्राष्ट्रीय टेस्ट में गणित में लगातार उत्कृष्ट प्रदर्शन करते आए हैं। लेकिन अकसर इस महत्त्वपूर्ण पहलू की ओर ध्यान नहीं दिया जाता कि वास्तव में उन्हें गणित किस प्रकार पढ़ाया जाता है।

1. Ikeda Y, Kita Y, Takagi R, Suzuki K, Mammarella IC, Caviola S, Lanfranchi S, Pulina F, Giofrè D. The Abbreviated Math Anxiety Scale (AMAS): Applicability and Utility in a Sample of Japanese Elementary School Children. Int J Psychol. 2025 Apr;60(2):e70015. doi: https://doi.org/10.1002/ijop.70015PMID: 39933572; PMCID: PMC11813552.

कई भारतीय कक्षाओं में समस्या-समाधान को प्रायः मुख्य पाठ के बाद ख़ुद से करने के अभ्यास की तरह देखा जाता है, यानी जब अवधारणाएँ पढ़ा दी जाती हैं और सूत्र समझा दिए जाते हैं, तभी विद्यार्थी सवाल हल करते हैं। लेकिन जापान में यह क्रम बिल्कुल उलटा है : वहाँ सवाल ही पाठ होते हैं। विद्यार्थियों को एक सोच-समझकर चुना गया सवाल दिया जाता है, और उसी पर काम करते हुए वे नई अवधारणाएँ और तरीक़े स्वयं खोजते हैं। यह पुस्तक इस शिक्षण पद्धति का एक बहुत स्पष्ट और व्यापक चित्र प्रस्तुत करती है। इसमें बताया गया है कि जापानी शिक्षक ऐसे पाठों की रूपरेखा कैसे बनाते हैं, कक्षा में किस प्रकार की चर्चाएँ होती हैं {इन चर्चाओं को नेरिएगे (Neriage) कहा जाता है}, और विद्यार्थियों की सोच किस तरह क्रमबद्ध रूप से विकसित होती है। गणित शिक्षा से जुड़े सभी लोगों के लिए यह दृष्टिकोण इसलिए महत्त्वपूर्ण है क्योंकि यह कई देशों में प्रचलित व्याख्यान और अभ्यास आधारित मॉडल का एक सार्थक विकल्प प्रस्तुत करता है। यह दिखाता है कि गणित को इस प्रकार भी पढ़ाया जा सकता है कि वह विद्यार्थियों के लिए चुनौतीपूर्ण होने के साथ-साथ आनन्ददायक भी बने।



चित्र-2 (चैटजीपीटी द्वारा निर्मित)

अन्त में, यह पुस्तक शिक्षकों के आपसी सहयोग की भूमिका को विशेष रूप से रेखांकित करती है। यदि शिक्षक अलग-अलग काम करते हैं तो समस्या-समाधान के माध्यम से शिक्षण प्रभावी ढंग से सफल नहीं हो सकता। *ज्यूग्यो केनक्यू* (पाठ अध्ययन) की जापानी व्यवस्था यह दर्शाती है कि शिक्षक किस प्रकार मिलकर पाठों की रूपरेखा तैयार कर सकते हैं, उनका अवलोकन कर सकते हैं तथा उन्हें और बेहतर बना सकते हैं। इस प्रकार, यह पुस्तक न केवल गणित पढ़ाने के लिए, बल्कि यह सोचने के लिए भी महत्त्वपूर्ण है कि शिक्षक पेशेवर रूप से कैसे विकसित हो सकते हैं।

पुस्तक का सिंहावलोकन

पहले अध्याय 'जापानी ''समस्या-समाधान के माध्यम से शिक्षण'' (TTP) का विकास और प्रमुख अवधारणाएँ' में लेखक बताते हैं कि जापानी शिक्षक और विद्यालय किस प्रकार मिलकर TTP को एक प्रभावशाली शिक्षण तकनीक के रूप में विकसित और प्रसारित करने में सफल हुए। वे TTP पाठों के तीन प्रकारों और *नेरिएगे* के चार रूपों की रूपरेखा बहुत स्पष्टता से प्रस्तुत करते हैं, जो इन पाठों की संरचना का आधार बनते हैं। यह अध्याय पाठक को यह समझने के लिए एक ठोस वैचारिक आधार प्रदान करता है कि TTP को कैसे सोच-समझकर तैयार किया जा सकता है और किस प्रकार प्रभावी रूप से कक्षा में लागू किया जा सकता है।

की-वर्ड : *समस्या-समाधान के माध्यम से शिक्षण (TTP), पाठ अध्ययन, सहयोगात्मक पाठ शोध (CLR), नेरिएगे (कक्षा चर्चा) और नेरिएगे मानचित्र, गणित शिक्षा, शिक्षण-पद्धति, अभ्यास, समस्या-समाधान*

अध्याय-2, ‘TTP पाठ जिनका आप इस्तेमाल कर सकते हैं’ विशेष रूप से रोचक है क्योंकि इसमें कक्षा में सीधे इस्तेमाल किए जा सकने वाले TTP पाठों की एक व्यापक शृंखला प्रस्तुत की गई है। इसमें अलग-अलग प्रकार के पाठों के लिए कई उदाहरण शामिल हैं। इस अध्याय को विशिष्ट बनाने वाली बात यह है कि यह सिद्धान्त और व्यवहार के बीच सन्तुलन बनाता है जिससे शिक्षक तुरन्त देख सकते हैं कि TTP के अमूर्त विचार वास्तविक कक्षा के परिवेश में कैसे आकार लेते हैं।

अध्याय-3, ‘अपना TTP पाठ तैयार करें’ उन शिक्षकों के लिए एक व्यावहारिक मार्गदर्शिका का काम करता है जो अब अगला क़दम उठाने के लिए तैयार हैं। इस अध्याय के सबसे दिलचस्प विचारों में से एक है नेरिएगे मानचित्रों का परिचय; सरल, किन्तु अत्यन्त प्रभावी रेखाचित्र, जो पूरी कक्षा में होने वाली चर्चाओं के प्रवाह को दर्शाने में मदद करते हैं। ये मानचित्र न केवल पाठ योजना की कल्पना करने में मदद करते हैं, बल्कि शिक्षकों को सार्थक गणितीय संवाद को प्रोत्साहित करने के लिए एक ठोस और उपयोगी उपकरण भी प्रदान करते हैं।

अध्याय-4, ‘TTP और सहयोगात्मक पाठ शोध (Collaborative Lesson Research–CLR) आपके विद्यालय को कैसे बदल सकते हैं’ मेरे लिए विशेष रूप से उल्लेखनीय रहा क्योंकि यह मात्र एक कक्षा की प्रक्रियाओं तक सीमित नहीं रहता; यह इस बात पर विचार करता है कि जब शिक्षक मिलकर काम करते हैं और एक-दूसरे से सीखते हैं तो कैसे पूरा विद्यालय विकसित हो सकता है। लेखक TTP को जापानी पाठ अध्ययन की परम्परा के सन्दर्भ में रखते हैं और दिखाते हैं कि जापान में शिक्षक किस तरह व्यवस्थित अवलोकन और चर्चा के माध्यम से अपने पाठों को सहयोगात्मक रूप से परिष्कृत करते हैं। मुझे जो सबसे मूल्यवान लगा, वह है उनका सहयोगात्मक पाठ शोध का परिचय, जो जापान के बाहर के शिक्षकों के लिए डिज़ाइन किया गया एक रूपान्तरण है। CLR को एक व्यावहारिक मॉडल के रूप में प्रस्तुत करते हुए, यह अध्याय रेखांकित करता है कि दुनिया भर के विद्यालय किस प्रकार सामूहिक शोध की संस्कृति विकसित कर सकते हैं, जिससे TTP केवल एक शिक्षण रणनीति न रहकर विद्यालय-स्तरीय सुधार का एक महत्त्वपूर्ण चालक बन जाता है।

पुस्तक में मुझे क्या पसन्द आया

मुझे अध्याय-2 में प्रस्तुत सामग्री विशेष रूप से पसन्द आई, क्योंकि यह समस्या-समाधान को, हर कक्षा और हर पाठ के एक अभिन्न हिस्से के रूप में स्थापित करती है, और ऐसा केवल सैद्धान्तिक स्तर पर नहीं बल्कि कुछ सोच-समझकर चुने गए उदाहरणों के ज़रिए करती है। जो बात मुझे सबसे अधिक प्रभावित करती है, वह यह है कि पुस्तक में दिए गए TTP पाठ सामान्य उदाहरण नहीं हैं। ये पाठ वास्तविक जापानी कक्षाओं से लिए गए हैं और दिखाते हैं कि किस प्रकार TTP का उपयोग नई अवधारणाओं को प्रस्तुत करने, समझ को व्यापक बनाने और कई सही उत्तरों वाले खुले सवालों के माध्यम से गणितीय सोच को प्रोत्साहित करने के लिए किया जा सकता है। यह अध्याय शिक्षकों को विद्यार्थियों के पूर्व ज्ञान और कक्षा की आवश्यकताओं के आधार पर पाठों में संशोधन करने की गुंजाइश भी देता है, जिससे यह विविध भारतीय सन्दर्भों में अत्यन्त उपयोगी हो जाता है। विभिन्न अनुभागों में दिए गए पाठ विद्यार्थियों को जूझने, पड़ताल करने और अपनी सोच को व्यक्त करने का अवसर देते हैं, जो गहरे और सार्थक अधिगम की ओर ले जा सकता है।

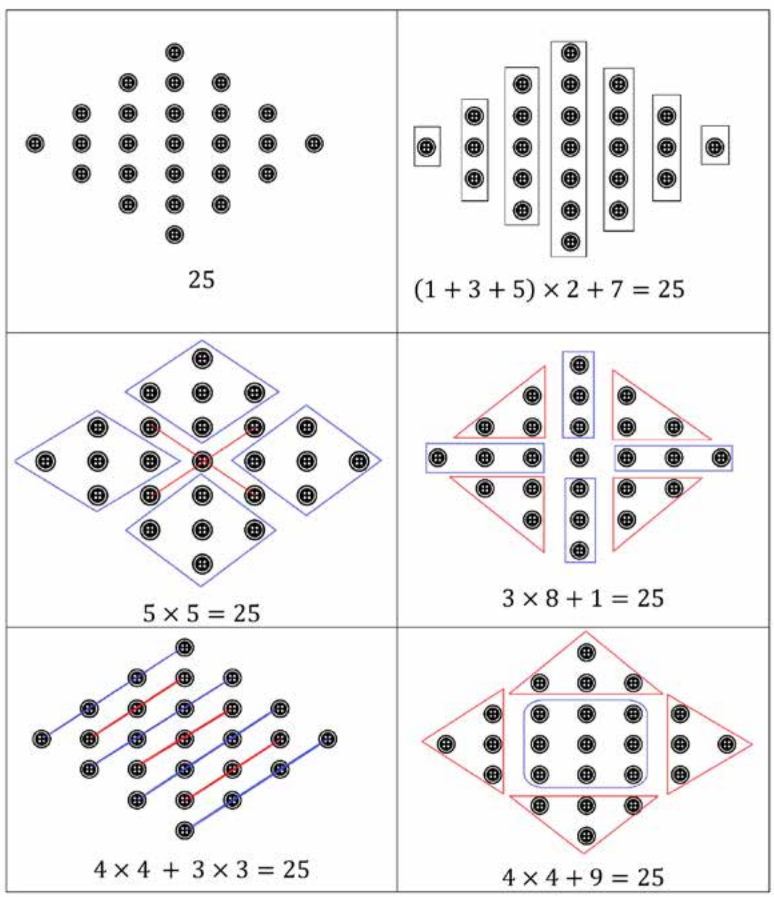
जापानी विद्यालय प्रणाली में छह वर्ष की प्रारम्भिक शिक्षा (6-12 वर्ष) और तीन वर्ष की निम्न माध्यमिक शिक्षा (12-15 वर्ष) शामिल होती है। इसके बाद तीन वर्ष की उच्च माध्यमिक शिक्षा (15-18 वर्ष) होती है। लेखक विद्यालयी शिक्षा के विभिन्न चरणों में TTP पाठों के अनेक उदाहरण प्रस्तुत करते हैं। लेखक अध्याय-2 को तीन खण्डों में विभाजित करते हैं; खण्ड-2.1 में वे पाँच TTP पाठ देते हैं जहाँ प्रत्येक इकाई में 3-4 क्रमिक पाठ शामिल हैं। खण्ड-2.2 और 2.3 में, लेखक स्पॉटलाइट पाठों (विषय-केन्द्रित) को प्रस्तुत करते हैं। नीचे इन तीनों खण्डों की चर्चा कुछ उदाहरणों सहित की गई है।

खण्ड-2.1 : वैचारिक और प्रक्रियात्मक समझ विकसित करने के लिए पाठ

इस खण्ड में, लेखक *‘क्या आप इन संख्याओं को एक-एक करके बिना गिने जोड़ सकते हैं’*, *‘भीड़भाड़ और गति को मापने के विचार’*, *‘समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल सूत्र निकालना’*, *‘भिन्नों का परिचय’* और *‘अंकगणित से बीजगणित तक सेतु निर्माण’* जैसी इकाइयों पर चर्चा करते हैं। सभी इकाइयाँ रोचक हैं, लेकिन मैं विशेष रूप से *‘अंकगणित से बीजगणित तक सेतु निर्माण’* इकाई पर चर्चा करना चाहूँगी। इन पाठों में लेखक बीजगणित सीखने की अत्यन्त महत्त्वपूर्ण नींव स्थापित करते हैं। TTP पाठ सुव्यवस्थित हैं और क्रमिक रूप से आगे बढ़ते हैं, जो विद्यार्थियों को रटन्त पद्धति पर निर्भर रहने के

बजाय गहराई से सोचने को प्रोत्साहित करते हैं। बिन्दुओं को व्यवस्थित करने और छड़ियों की व्यवस्था वाले कार्य जैसे सवालों के माध्यम से विद्यार्थी पैटर्न का सामान्यीकरण करना, गणितीय व्यंजकों का निर्माण और परीक्षण करना, तथा बिना प्रत्यक्ष गिनती के तर्क करना सीखते हैं। वे अर्ध-चर (quasi-variable) जैसी अवधारणाओं के माध्यम से बीजगणितीय सोच की पड़ताल भी करते हैं और कोष्ठकों तथा संक्रियाओं के क्रम जैसे अंकगणितीय नियमों पर चर्चा करते हैं। तर्क, अभिव्यक्ति और सत्यापन पर ध्यान देना, विद्यार्थियों में गणितीय चिन्तन की मज़बूत आधारशिला विकसित करता है। इससे यह खण्ड शिक्षकों के लिए एक मूल्यवान संसाधन बन जाता है।

उदाहरण के लिए, TTP पाठ *'आइए, बिन्दुओं की संख्या गिनने के तरीक़ों के बारे में सोचें'* बिन्दुओं को गिनने के विभिन्न तरीक़ों और उन्हें गणितीय व्यंजकों के माध्यम से व्यक्त करने पर चर्चा करता है। यह पाठ इस उद्देश्य से तैयार किया गया है कि विद्यार्थी गणितीय व्यंजकों की सामान्यीकरण क्षमता को समझें और प्रतीकात्मक व्यंजकों को ठोस निरूपणों से जोड़ सकें। **चित्र-3** उन विभिन्न रणनीतियों को दर्शाता है जिनका उपयोग विद्यार्थियों ने बिन्दुओं को गिनने में किया, और उन गणितीय व्यंजकों को भी, जो इन रणनीतियों से उत्पन्न हुए। इनके बारे में लेखक ने पुस्तक में विस्तार से चर्चा की है।



चित्र-3 : बटनों के समूह बनाना और गणितीय व्यंजकों के माध्यम से गिनती के तरीक़ों का चित्रण।

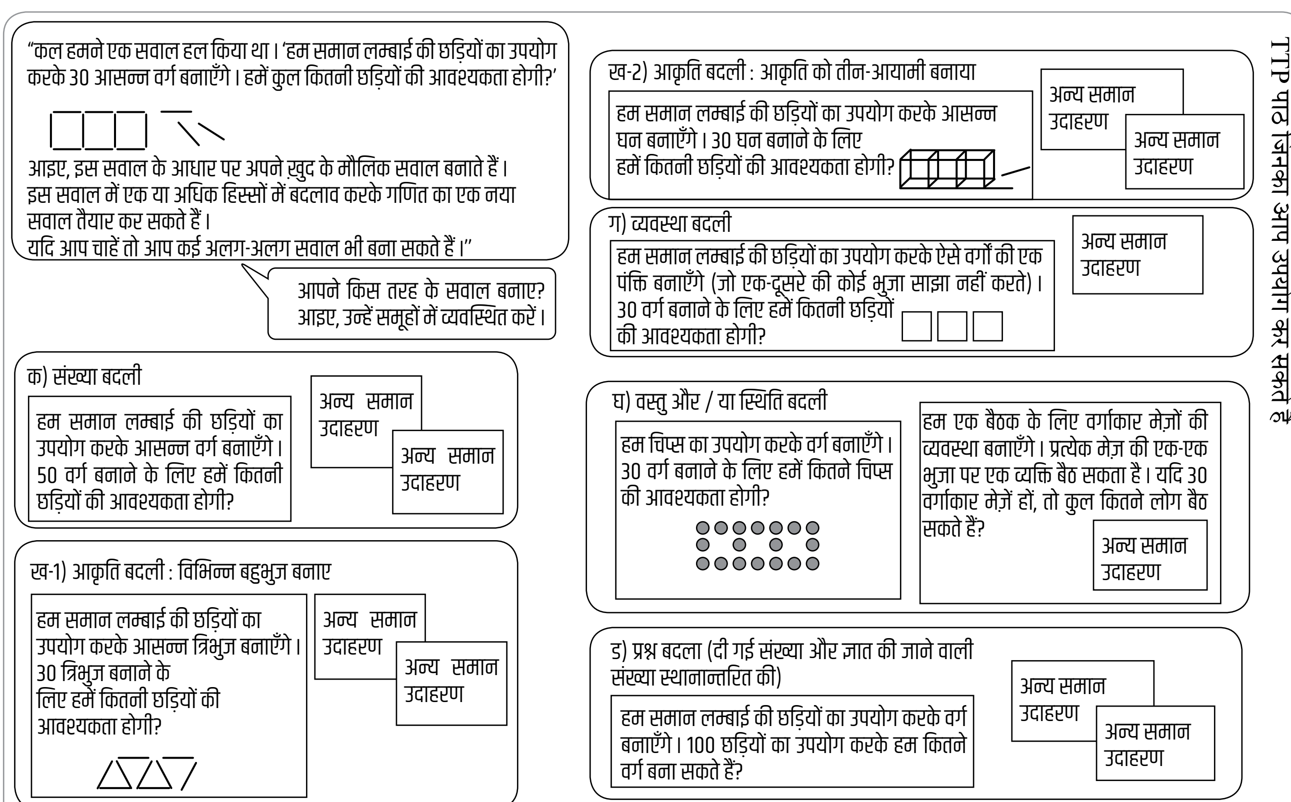
खण्ड-2.2 : समझ बढ़ाने वाले पाठ

इस खण्ड में, लेखक विद्यार्थियों की गणितीय सोच और समस्या-समाधान क्षमता को चुनौती देने के लिए अपने-आप में परिपूर्ण स्वतंत्र पाठ (stand-alone lessons) प्रस्तुत करते हैं। वे इन्हें 'स्पॉटलाइट पाठ' कहते हैं ताकि यह स्पष्ट हो कि इन्हें मौजूदा पाठ्यचर्या में किसी भी स्थान पर जोड़ा जा सकता है। स्पॉटलाइट पाठों में शामिल हैं – *'जिज्ञासु घटाव'*, *'पैटर्न ब्लॉक का उपयोग करके क्षेत्रफलों की तुलना'*, *'चलो, एक कैलेंडर बनाते हैं'*, *'समान्तर चतुर्भुज के भीतर त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करना'*, और *'सर्वांगसम त्रिभुज बनाने के तरीक़े विकसित करना'*। सभी पाठ अपने-आप में रोचक हैं, लेकिन इस खण्ड के पाठों की प्रकृति को समझने के लिए मैं *'चलो, एक कैलेंडर बनाते हैं'* पाठ पर चर्चा करूँगी। इस पाठ

में बच्चों से अपेक्षा की जाती है कि वे स्थानीय मान और संक्रियाओं के गुणधर्मों की अपनी समझ का उपयोग करते हुए बहु-अंकीय गणनाएँ करें। 1 से 31 तक की संख्याएँ बनाने के लिए आवश्यक न्यूनतम कार्डों की संख्या ज्ञात करने की जो शिक्षण प्रक्रिया अपनाई गई है, और इस प्रक्रिया में उभरने वाला सार्थक नेरिएगे, जो विचारों की तार्किक प्रगति को विकसित करता है, दोनों ही अत्यन्त प्रभावशाली हैं। यह पाठ दस-आधारीय स्थानीय मान प्रणाली की गहन समझ विकसित करने के साथ-साथ ज्यामिति के आयामों को भी विस्तार देता है।

खण्ड-2.3 : अनेक सही उत्तरों वाले सवालों के पाठ

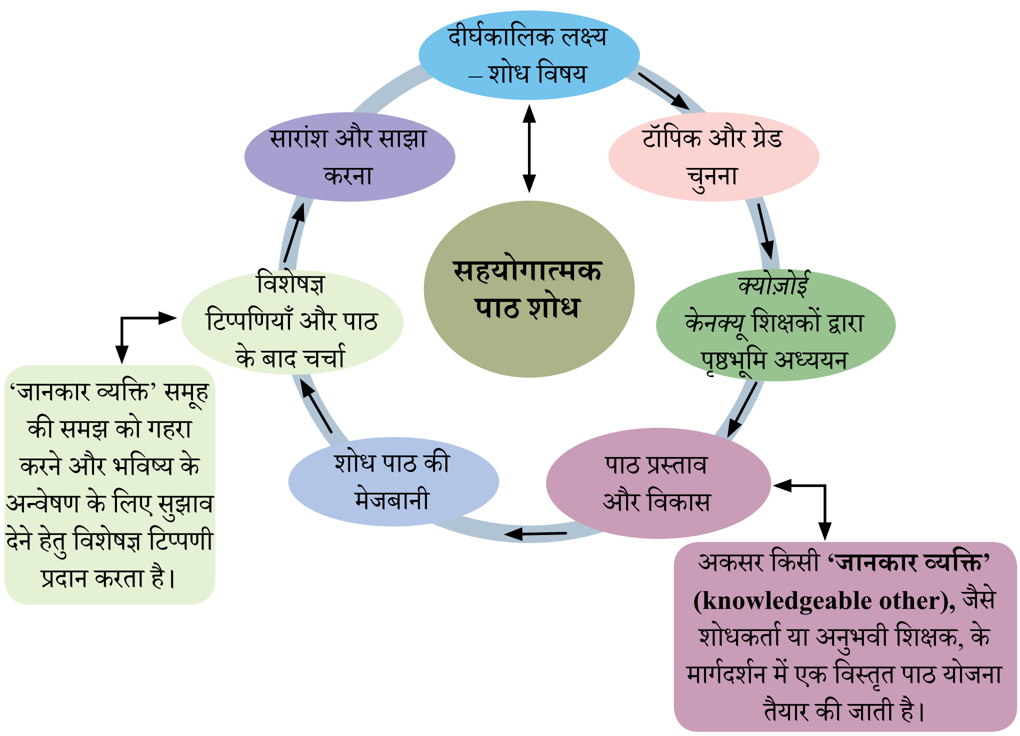
इस खण्ड में, लेखक कई प्रमुख स्पॉटलाइट पाठों पर चर्चा करते हैं : *'एक घन को खोलना', 'आप एक जियोबोर्ड पर कितने अलग-अलग वर्ग बना सकते हैं?', 'जियोबोर्ड पर बनाए जा सकने वाले सभी समद्विबाहु त्रिभुज ज्ञात कीजिए',* और *'आइए, गणित का एक नया सवाल बनाएँ! (पुस्तक* Mondai kara Mondai e *से एक पाठ)'*। ये सभी पाठ खुले (open-ended) सवाल प्रस्तुत करते हैं जिनके कई सही हल सम्भव हैं, और इस प्रकार वे विद्यार्थियों को उच्च-स्तरीय चिन्तन कौशल विकसित करने के लिए प्रेरित करते हैं (Becker & Shimada, 1997)। *'आइए, गणित का एक नया सवाल बनाएँ!'* पाठ सभी कक्षा स्तरों के लिए डिज़ाइन किया गया है। इसे जापानी शोधकर्ताओं और शिक्षकों द्वारा विकसित किया गया था। यह लोकप्रिय जापानी पुस्तक *Mondai kara Mondai e* (Takeuchi & Sawada, 1984) से लिया गया है। यह पाठ विद्यार्थियों को नए सवाल बनाकर पिछले खण्डों में वर्णित 'छड़ी के सवाल' का विस्तार करने का अवसर प्रदान करता है। उदाहरण के लिए, मूल सवाल में केवल एक छोटा-सा परिवर्तन करने से नए और चुनौतीपूर्ण सवाल उत्पन्न हो सकते हैं, जैसे : 'यदि हम समान लम्बाई की छड़ियों से 50 आसन्न वर्ग बनाते हैं, तो कुल कितनी छड़ियों की आवश्यकता होगी?' या फिर इस विचार को आगे बढ़ाते हुए, 'यदि हम आसन्न घन (adjacent cubes) बनाएँ, तो यह पैटर्न कैसे बदलेगा?' *'आइए, गणित का एक नया सवाल बनाएँ!'* पाठ का नेरिएगे मानचित्र चित्र-4 में देखा जा सकता है।



चित्र 2.3.4.02 "आइए, गणित का एक नया सवाल बनाएँ! Mondai kara Mondai e से एक पाठ" [From Problem to Problem] का नेरिएगे मानचित्र

चित्र-4 : *"आइए, गणित का एक नया सवाल बनाएँ!* Mondai kara Mondai e से एक पाठ" का नेरिएगे मानचित्र।

पुस्तक के अध्याय-4 में, लेखक शोध को व्यवहार से जोड़ते हैं और दर्शाते हैं कि किस प्रकार CLR पूरे विद्यालय में शिक्षण पद्धतियों को रूपान्तरित कर सकता है। **चित्र-5** में प्रस्तुत CLR की प्रक्रिया एक उदाहरण है कि शोध कैसे वास्तविक कक्षा अभ्यास बन जाता है। शिक्षक ऐसी शिक्षण रणनीतियों का उपयोग करते हैं – मसलन, विद्यार्थियों की सोच का पूर्वानुमान लगाना, विद्यार्थी-केन्द्रित गणितीय संवादों को प्रोत्साहित करना, और संज्ञानात्मक रूप से चुनौती देने वाले कार्यों को अमूर्त विचारों की तरह नहीं, बल्कि पाठ रचना और पाठ चिन्तन के ठोस उपकरण के रूप में प्रयोग करना। CLR व्यावसायिक विकास को अलग-थलग कार्यशालाओं की जगह अन्तर्निहित, सहयोग-आधारित अन्वेषण में बदल देता है। शिक्षक एक-दूसरे से, विद्यार्थियों से, और विशेषज्ञों से सीखते हैं, जिससे एक सक्रिय और गतिशील फ़ीडबैक लूप बनता है जो शिक्षण की गुणवत्ता में निरन्तर सुधार लाता है। CLR के माध्यम से विद्यालय एक ऐसा स्थाई मॉडल विकसित कर सकते हैं जिसमें शिक्षक सह-शोधकर्ता की भूमिका में सशक्त होते हैं, और विद्यार्थियों का सीखना शिक्षण डिज़ाइन के केन्द्र में रहता है।



चित्र-5 : CLR चक्र के चरण : शोध विषय से लेकर साझा समझ-बोध तक, जो कक्षा अभ्यास और व्यावसायिक शोध को जोड़ते हैं।

भारतीय सन्दर्भ और पाठ्यक्रम सुधारों की प्रासंगिकता

समस्या-समाधान के माध्यम से गणित शिक्षण, विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा (NCF-SE) 2023 में प्रस्तुत क्षमता-आधारित अधिगम के सिद्धान्तों से गहराई से मेल खाता है। यह पुस्तक विद्यार्थी-अगुआई वाली पड़ताल पर बल देती है, जहाँ शिक्षार्थी औपचारिक निर्देश मिलने से पहले अपरिचित सवालों से जुड़ते हैं। यह प्रक्रिया आलोचनात्मक सोच, रचनात्मकता, गहन समझ और आवश्यक कौशलों के विकास को पोषित करती है, जो NCF-SE की उस दृष्टि को प्रतिबिम्बित करती है जिसमें रटने के बजाय क्षमताओं के विकास को केन्द्र में रखा गया है। इसके अलावा, TTP ढाँचे में तर्क, निरूपण और चिन्तनशील संवाद पर दिया गया ज़ोर, NCF की निर्माणात्मक (formative), प्रतिक्रिया-आधारित आकलन की दृष्टि को मज़बूती देता है। दोनों ही विचारधाराएँ विद्यार्थियों को अपने सीखने की ज़िम्मेदारी अपने हाथ में लेने के लिए सशक्त बनाती हैं, साथ ही लचीले सीखने के मार्ग और समग्र विकास को प्रोत्साहित करती हैं। इन दोनों का सम्मिलित प्रभाव भारतीय कक्षाओं में गणित शिक्षा को अधिक रोचक, समतामूलक, और प्रभावी बनाने के लिए एक अत्यन्त सशक्त मॉडल प्रस्तुत करता है।

भारतीय सन्दर्भ में, TTP के क्रियान्वयन के सामने कई सीमाएँ हैं जिनमें बड़ी कक्षाएँ, शिक्षकों के सहयोगी प्रयासों के सीमित अवसर, और ऐसी परीक्षा-चालित प्रणालियाँ जो सतत व्यावसायिक संवाद को बाधित करती हैं, शामिल हैं। CLR का क्रियान्वयन भी चुनौतीपूर्ण हो सकता है; फिर भी, यह ढाँचा उल्लेखनीय सम्भावनाएँ प्रस्तुत करता है। यदि इसे सोच-समझकर अपनाया जाए, तो CLR ऐसे व्यावसायिक शिक्षण समुदायों को विकसित कर सकता है जिनमें शिक्षक एक-दूसरे का सहयोग करते हुए समस्या-समाधान आधारित तरीक़ों को अपनी कक्षाओं में क्रमशः एकीकृत कर सकें।

उपसंहार

यह पुस्तक वर्षों के शोध, कक्षा-आधारित अनुभव और चिन्तन को एक साथ लाती है। मेरे लिए इसे वास्तव में विशेष बनाने वाली बात यह है कि यह गहरे और सार्थक विचारों को बहुत ही स्पष्ट, सहज और व्यावहारिक रूप में प्रस्तुत करती है। यह दिखाती है कि समस्या-समाधान का दृष्टिकोण कैसे विद्यार्थियों को स्वयं सोचने, सहयोग करने और गणित को अधिक गहराई से समझने में मदद करता है। विषय भले ही समृद्ध और जटिल हैं, लेकिन लेखक ने उन्हें ऐसे ढंग से प्रस्तुत किया है कि वे आसानी से समझे और लागू किए जा सकें। यह पुस्तक उन सभी के लिए एक मूल्यवान मार्गदर्शिका है जो गणित शिक्षण को अधिक आकर्षक, विद्यार्थी-केन्द्रित और प्रभावी बनाना चाहते हैं।

मुझे CLR और TTP के लिए निम्नलिखित संसाधन भी उपयोगी लगे। इच्छुक पाठक इन्हें देख सकते हैं :

1. The Lesson Study Group at Mills College https://bit.ly/4hlbRVP
2. The Lesson Study Group at Mills College and Teaching through problem solving https://bit.ly/47eF5Ru
3. Lesson Study Alliance. (2020). Lesson Study Resources. Retrieved from https://www.lsalliance.org/
4. Takahashi, A., & Yoshida, M. (2004). How Can We Start Lesson Study? Ideas for Establishing Lesson Study Communities. *Teaching Children* Mathematics, 10(9), 436-443.
5. Takahashi, A. (2008). Beyond Show and Tell: Neriage for Teaching Through Problem-solving - Ideas from Japanese Problem-solving Approaches for Teaching Mathematics. Paper presented at the 11th International Congress on Mathematics Education in Mexico.

आभार : लेखिका इस लेख में समीक्षित पुस्तक से स्कैन किए गए एक पृष्ठ (चित्र 2.3.4.02) को पुनः प्रस्तुत करने और उसका अनुवाद करने की अनुमति देने के लिए लिए पुस्तक के प्रकाशक रूटलेज, टेलर एंड फ्रांसिस समूह का आभार व्यक्त करती हैं।

अनुषा टी. अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी, बेंगलूरु के स्कूल ऑफ़ कंटीन्यूइंग एजुकेशन और यूनिवर्सिटी रिसोर्स सेंटर (SCE–URC) में संकाय सदस्य हैं। उन्होंने मैसूर विश्वविद्यालय से गणित में पीएचडी की उपाधि प्राप्त की है। उनका शोध शुद्ध गणित और गणित शिक्षा, दोनों क्षेत्रों में विस्तृत है। शुद्ध गणित में, उनका ध्यान मॉड्यूलर समीकरणों, थीटा फलन सर्वसमिकाओं और $1/\pi$ के लिए रामानुजन-प्रकार की श्रेणियों पर केन्द्रित है। गणित शिक्षा में, उनकी रुचि मुख्य रूप से शिक्षण पद्धति, आकलन और पाठ्यचर्या निर्माण से सम्बन्धित है।

अनुवाद : प्रमोद मैथिल **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अतुल अग्रवाल

एट राइट एंगल्स के जुलाई, 2025 अंक में पेज-7 पर दी गई 'संख्याओं में कला' पहेली की व्याख्या

6	9	12	15	18	21
27	30	33	36	39	42
48	51	54	57	60	63
69	72	75	78	81	84
90	93	96	99	102	105
111	114	117	120	123	126

बेतरतीब संख्याओं की एक ग्रिड में, कोने की संख्याओं का औसत निकालने पर मध्य की संख्या प्राप्त नहीं होती। लेकिन चूँकि दी गई ग्रिड एक रैखिक नियम (जैसे कि अंकगणितीय पैटर्न) से बनी है, इसलिए यह सम्बन्ध बनता है। यह न केवल आयतों या वर्गों के लिए, बल्कि अन्य आकृतियों के लिए भी काम करता है जैसा कि दिखाया गया है।

दिखाए गए दोनों ही मामलों में, जब हम एक समान रंग (पीले या आसमानी नीले) वाले खानों की चारों संख्याओं को जोड़ते हैं और उस योग को 4 से भाग देते हैं, तो हमें बहुभुज के केन्द्र (लाल / हरे खाने) वाली संख्या प्राप्त होती है।

मैंने देखा कि किसी संख्या के दाईं ओर का प्रत्येक क़दम उस संख्या में 3 की वृद्धि करता है और नीचे की ओर का प्रत्येक क़दम उस संख्या में 21 जोड़ता है। iवीं पंक्ति और jवें स्तंभ की संख्या को f_{ij} से दर्शाते हुए, मैं इस सामान्य सूत्र तक पहुँच पाया कि $f_{in} = 21i + 3j - 18$. (इस धारणा के साथ शुरुआत करें कि $f_{i,j} = ai + bj + c$, जहाँ a, b और c अचर हैं और ग्रिड में विशिष्ट संख्याओं का उपयोग करके इसे हल करें।)

यह सूत्र ग्रिड की कोई भी संख्या देता है। (जाँच : $f_{(1,2)} = 21 \times 1 + 3 \times 2 - 18 = 21 + 6 - 18 = 9$)

यदि केन्द्र में लाल रंग की संख्या fij है, तो उसके चारों ओर पीले रंग की संख्याएँ $f_{i,j-1}$, f_{i-1},j, $f_{i,j+1}$ और f_{i+1}, हैं। इन संख्याओं में से प्रत्येक के लिए सामान्य सूत्र में मान रखने पर, हमें केन्द्र वाली संख्या $4 \times f_{ij}$ प्राप्त होती है।

हम देखते हैं कि जब तक बाक़ी चार संख्या केन्द्र संख्या के चारों ओर सममित रूप से स्थित होती हैं, उन्हें जोड़ने से हमें केन्द्र संख्या का चार गुणा प्राप्त होगा।

ऊपर दिए गए पैर्टन की तरह हम एक $m \times 9$ किसी और नियम के साथ बना सकते हैं।

18	21	24	27	30	33
23	26	29	32	35	38
28	31	34	37	40	43
33	36	39	42	45	48
38	41	44	47	50	53
43	46	49	52	55	58
48	51	54	57	60	63

पाठको, क्या आप इस ग्रिड में किसी भी संख्या के लिए आसान नियम बता सकते हैं?
क्या किसी संख्या के चारों तरफ़ की संख्याओं में कोई ख़ास सम्बन्ध है?

डॉ. जे.शेखर, स्कूल असिस्टेंट (गणित), ZPHS चावरम्बाकम, आन्ध्र प्रदेश।

अनुवाद : भरत त्रिपाठी **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

लेख आमंत्रित हैं...

एट राइट एंगल्स भारत की सार्वजनिक शिक्षा प्रणाली में गणितीय शिक्षा को समर्पित एक गुणवत्तापूर्ण संसाधन है। इसे विशेषकर बुनियादी, प्राथमिक और माध्यमिक पाठशालाओं के शिक्षक और शिक्षकों के प्रशिक्षकों के लिए तैयार किया गया है।

हम गणित के शिक्षकों, शिक्षाविदों, अभ्यासकर्ताओं (प्रैक्टिसनर्स), अभिभावकों और विद्यार्थियों से लेख आमंत्रित करते हैं। यदि आप एक ऐसा मंच तलाश रहे हैं जो ख़ासतौर से लगभग 6-14 साल के विद्यार्थियों के गणित के सीखने के अनुभव को समृद्ध करता हो और बढ़ाता हो, तो यह पत्रिका आपके लिए है। आपके लेखों का स्वागत है।

विषय एवं थीम के लिए सुझाव

भेजे जाने वाले लेख कक्षा-1 से 8 की पाठ्यक्रम सामग्री पर केन्द्रित होने चाहिए। लेखों से अपेक्षा है कि वे :

- स्कूली शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा, 2023 (NCF-SE-2023) में उल्लेखित विषय और थीम को विस्तारपूर्वक समझा सकें और दर्शा सकें।
- ख़ासकर NCF-SE-2023 में चर्चित चुनौतियों को सम्बोधित करते हों।
- गणितीय इतिहास या गणितीय सोच के इतिहास का प्रमाणित विवरण हों।
- विद्यार्थियों को रिवीजन और अभ्यास में तल्लीन रखने के लिए नवाचारी वर्कशीट या तरीक़ों को शामिल कर सकें।
- बच्चों के सन्दर्भ में प्रासंगिक, गणित के रोज़मर्रा जीवन में उपयोग का वर्णन कर सकें।
- अन्तःविषय गतिविधियों और परियोजनाओं (प्रोजेक्ट) का वर्णन कर सकें।
- पाठ्यक्रम से जुड़ी पहेलियों और खेलों की समीक्षा कर सकें।
- ऑनलाइन रिसोर्स सहित प्रासंगिक सामग्री के चयन पर मार्गदर्शन कर सकें।
- बुनियादी संख्या ज्ञान के साथ-साथ गणनात्मक सोच के लिए शैक्षणिक रणनीतियाँ विकसित कर सकें।
- विभिन्न शैक्षणिक पद्धतियों को लागू करने में शिक्षकों की सहायता कर सकें।
- टीचिंग लर्निंग मटेरियल (टीएलएम) की समीक्षा कर सकें या गणित की कक्षा में स्थानीय सन्दर्भ और स्थानीय टीएलएम का उपयोग कैसे करें इसके बारे में बता सकें।
- विद्यार्थियों में अवधारणात्मक समझ की खाई को पाटने में सहायता करने के लिए सामग्री प्रदान कर सकें।
- आकलन में आने वाली परेशानियों का समाधान कर सकें।
- गणित सीखने के दौरान होने वाली ग़लतफ़हमियों को पहचानने और समझने के लिए उपाय सुझा सकें।
- समस्याओं की सूची, उनके हल पर चर्चा एवं समस्या–समाधान की रणनीतियों सहित दे सकें, जो कि सामान्यतौर पर पाठयपुस्तकों में नहीं मिलती।

बड़े लेखों के अलावा हम छोटे लेखों का भी स्वागत करते हैं जिनमें विविध तरह की रोचक सामग्री शामिल हो। जैसे किसी किताब या गणित के सॉफ्टवेयर की समीक्षा या गणितीय थीम पर आधारित यूट्यूब की कोई क्लिप। प्रूफ़ विदाउट वर्ड्स (proofs without words), गणितीय अन्तर्विरोध (mathematical paradoxes), असिद्धीकरण (false proofs) पर आधारित लेख हो सकते हैं। गणितीय विषयों पर आधारित कविता, कार्टून या तस्वीरें (photographs) जैसी रचनात्मक अभिव्यक्तियों को शामिल करते लेख हो सकते हैं। आप किसी गणितज्ञ से जुड़े क़िस्से या 'हस्तशिल्प में गणित, फ़िल्मों में गणित' जैसे रोचक विषयों पर भी लेख भेज सकते हैं।

लेख AtRightAngles.editor@apu.edu.in पर भेजें।

कृपया आगे दी गई सम्पादकीय नीतियों और दिशा-निर्देशों को भी देखें।

लेखों को स्वीकार करने की नीति

एट राइट एंगल्स प्रारम्भिक गणित और गणितीय शिक्षा से सम्बन्धित मुद्दों पर पूर्णत: केन्द्रित पत्रिका है। इसलिए लेखों का प्रयास होना चाहिए कि वे गणित के आम मिथकों, धारणाओं और भ्रान्तियों से परे हों।

पत्रिका में कहीं और से नक़ल या चोरी करके भेजे गए लेखों के लिए बिल्कुल भी जगह नहीं है। लेखक द्वारा लेख को प्रकाशन के लिए भेजे जाने पर माना जाता है कि यह मौलिक है और प्रकाशन के लिए इस पर किसी भी तरह का क़ानूनी प्रतिबन्ध नहीं है (जैसे किसी अन्य का कॉपीराइट स्वामित्व)। लेख में जहाँ भी उपयुक्त हो वहाँ प्रासंगिक सन्दर्भ और स्रोतों का उल्लेख किया जाए।

एट राइट एंगल्स पत्रिका अन्य भारतीय भाषाओं में भी अनूदित होती है। इसलिए, अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी को पत्रिका में प्रकाशित सभी लेखों का अन्य भाषाओं में अनुवाद और प्रसार करने का अधिकार होगा।

यदि भेजा गया लेख पहले कहीं प्रकाशित हो चुका है, तो लेखक से अनुरोध है कि वे पूर्ववर्ती प्रकाशक से अन्यत्र पुनर्प्रकाशन के लिए अनुमति अवश्य प्राप्त कर लें। और लेख के अन्त में 'लेखक का नोट' के तहत इसका उल्लेख करें। इसके अलावा, यह अपेक्षा भी की जाती है कि लेखक हमारे रिकॉर्ड के लिए अनुमति पत्र की एक कॉपी लेख के साथ भेजें। इसी तरह, यदि लेखक ***एट राइट एंगल्स*** में प्रकाशित अपना लेख पुनः प्रकाशन के लिए कहीं और भेज रहे हैं तो उनसे अपेक्षा है कि वे ***एट राइट एंगल्स*** को यथोचित श्रेय अवश्य दें।

एट राइट एंगल्स में विविध तरह के लेखों का स्वागत है। ऐसे लेख जो गुणवत्ता की दृष्टि से अच्छे हैं लेकिन इस पत्रिका में प्रकाशन के लिए उपयुक्त नहीं हैं, उनका उपयोग लेखक की सहमति से यूनिवर्सिटी की अन्य पत्रिकाओं में किया जा सकता है।

लेखकों के लिए विशेष दिशा–निर्देश

अगर आप ***एट राइट एंगल्स*** के लिए लिख रहे हैं तो कृपया इन दिशा-निर्देशों पर ध्यान दें :

1. **रोचक परिचय** : शुरुआत से ही पाठक का ध्यान आकर्षित करने के उद्देश्य से पठनीय और रोचक शैली में लिखें। लेख के पहले पैराग्राफ़ से ही स्पष्ट हो जाना चाहिए कि लेख किस विषय के बारे में है। उदाहरण के तौर पर, शुरुआती पैराग्राफ़ एक अप्रत्याशित निष्कर्ष हो सकता है, एक चुनौती हो सकती है, एक मज़ेदार सवाल के साथ चित्र हो सकता है या एक प्रासंगिक क़िस्सा हो सकता है। ख़ासतौर से ये आगे पढ़ते जाने की रुचि पैदा करने वाला होना चाहिए।
2. **लुभावना शीर्षक** : लेख का शीर्षक एक उपयुक्त और लुभावने वाक्यांश से दिया जाए, जिसमें लेख की भावना और सत्व झलके।
3. **शैली** : प्रमाण-सिद्ध प्रारूप (Theorem-Proof Format) में लेख लिखने से परहेज़ करें। इसकी बजाय, अनौपचारिक तरीक़े से प्रमाणों (Proofs) को लेख में एकीकृत करें।
4. **सन्तुलन** : लम्बी-लम्बी गणनाओं को दर्शाने से बचें। बहुत अधिक विवरण देने और छिपी हुई (अ-उल्लेखित) गणनाओं पर निर्भर चरण को छोड़कर अगले चरण पर चले जाने, के बीच सन्तुलन बनाकर रखें।
5. **सुलभ भाषा** : उन विशिष्ट शब्दावली और संकेत शब्दों के उपयोग को टालें जिनसे सिर्फ़ विशेषज्ञ ही परिचित होते हैं। यदि तकनीकी शब्दों का उपयोग ज़रूरी हो तो उन्हें परिभाषित कर दें।
6. **दृश्यों का प्रयोग** : जहाँ सम्भव हो वहाँ ऐसे रेखाचित्र या फ़ोटो दें जिनमें गणितीय विचार का सार हो। यदि कोई चित्र या रेखाचित्र गणित की किसी अवधारणा को स्पष्ट करते हों तो उन्हें अवश्य रखें।
7. **संक्षिप्त सन्दर्भ** : संक्षिप्त अनुशंसाओं के साथ सन्दर्भों (reference) की एक संक्षिप्त सूची दें।
8. **अभ्यास और सवाल** : लेख की शुरुआत या अन्त में विचार करने के लिए कुछ सवाल और कुछ अभ्यास उपलब्ध कराएँ।
9. **उद्धरण प्रारूप (Citation Format)** : लेख के अन्त में, स्रोतों और सन्दर्भों को जिस क्रम में वे आए हैं उस ही क्रम में उन्हें उद्धृत (cite) करें। फ़ुटनोट से बचें। यदि फ़ुटनोट की आवश्यकता है, तो उनका क्रम डालकर अलग से लिखें।
10. **संक्षिप्ताक्षर और परिवर्णी शब्द (Abbreviations and Acronyms)** : लेख में जब पहली बार किसी शब्द का लघु रूप (यानी संक्षिप्ताक्षर) और कई शब्दों के शुरुआती अक्षर का प्रचलित लघु रूप (यानी परिवर्णी) आए तब वहीं उनका अर्थ बता दें। ऐसे सभी शब्दों की एक शब्दावली बनाकर उसे लेख के अन्त में प्रस्तुत करें।
11. **चित्रों को नामांकित करना** : लेख में आने वाले सभी चित्रों, रेखाचित्रों, तस्वीरों पर चित्र क्रमांक डालें और उनका विवरण लिखें। इन सभी चित्रों, रेखाचित्रों, तस्वीरों को स्पष्ट निर्देशों के साथ ईमेल में अलग से अटैच करें। (ध्यान दें कि खीचीं गई तस्वीरों या स्कैन तस्वीरों की गुणवत्ता 300dpi से कम नहीं होना चाहिए।)
12. **चित्रों का विवरण स्पष्टता से दें** : तस्वीरों, चित्रों, डायग्राम्स और तालिकाओं का उल्लेख उनके उचित क्रमांक से करें। 'यहाँ', 'वहाँ', 'दाईं ओर', 'बाईं ओर', 'ऊपर', 'नीचे' इस तरह से उल्लेख करने से परहेज़ करें।
13. **लेखक का परिचय** : लेखक अपनी हाई रिज्योलूशन फ़ोटो भी भेजें। साथ ही, अपने बारे में संक्षिप्त में (जो 50 शब्दों से ज़्यादा का नहीं हो) जानकारी भेजें, जो पाठकों को आपके अनुभव व विशेष योग्यता वाले कार्यक्षेत्र के बारे में बताती हो।
14. **ब्रिटिश वर्तनी (Spellings)** : ब्रिटिश वर्तनी का पालन करें। जैसे organise लिखें न कि organize; colour लिखें न कि color, neighbour लिखें न कि neighbor आदि।
15. आप अपने लेख **हिन्दी** में भी भेज सकते हैं। उपयुक्त होने पर हम उन्हें अँग्रेज़ी में अनूदित करके प्रकाशित करेंगे।
16. **लेख भेजने का प्रारूप** : लेखों को MS Word या LaTex में लिखकर ही भेजें।

मुद्रक तथा प्रकाशक ऋषिकेश बी.एस., रजिस्टार द्वारा अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी के लिए आदर्श प्रा.लि., 4 शिखरवार्ता, प्रेस काम्पलेक्स, जोन-1, एम.पी.नगर, भोपाल 462 011 से मुद्रित

और अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी, सर्वे नम्बर 66, बुरुगुंटे विलेज, बिक्कनाहल्ली मेन रोड, सरजापुरा,बेंगलूरु, कर्नाटक- 562 125 से प्रकाशित

सम्पादक : स्नेहा टाइटस

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी
एट राइट एंगल्स
स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

Azim Premji University

गणित उत्सव के रंग गतिविधियों के संग

पद्मप्रिया शिराली

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी का प्रकाशन

गणित उत्सव के रंग गतिविधियों के संग

इस अंक के विशेष खण्ड में, हमने गणित दिवस मनाने के कारण और तरीक़ों पर विचार किया है। यह पुलआउट इसी क्रम में कुछ और सुझाव देता है :

- गणित दिवस के स्टॉल में कौन-कौन-से उप-विषय प्रदर्शित किए जा सकते हैं?
- प्रत्येक उप-विषय के लिए कारगर कुछ आज़माई और परखी हुई गतिविधियाँ कौन-सी हो सकती हैं?
- इनके लिए कौन-सी सामग्रियों की ज़रूरत होगी?

की-वर्ड : *गणित दिवस, विवेचन, विषय-वस्तु का क्षेत्र, दृश्यावलोकन, तर्क*

चलिए हम आपको उप-विषय के अनुसार व्यवस्थित विवरण बताते हैं।

संख्याएँ

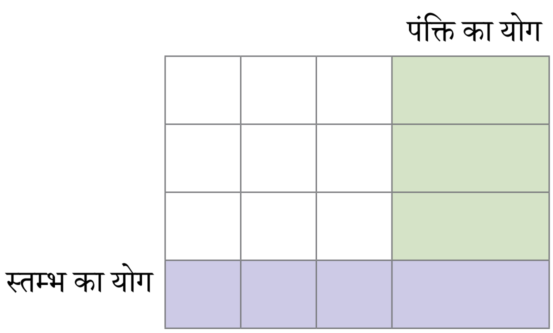
सलाह : प्रत्येक स्टॉल पर सामग्रियों के एक से ज़्यादा सेट उपलब्ध होने से एक बार में अधिक-से-अधिक खिलाड़ियों या प्रतिभागियों को शामिल करने में मदद मिलेगी।

1. प्राइम मैजिक

प्रत्येक सेट के लिए ज़रूरी सामग्री : एक 3 × 3 आकार का ग्रिड कार्ड, जिसमें एक अतिरिक्त पंक्ति और स्तम्भ हो (जैसा कि **चित्र-1** में दिखाया गया है), अंक कार्डों का एक सेट (1 से 9 तक)।

खिलाड़ियों की संख्या : 1

टॉस्क : 3 × 3 के ग्रिड के प्रत्येक वर्ग (खानों) में 1 से लेकर 9 तक के अंक इस प्रकार रखें कि प्रत्येक पंक्ति और प्रत्येक स्तम्भ का योग एक अभाज्य संख्या (prime number) हो।



चित्र-1

2. सैंडविच संख्या :

(nrich.maths.org से साभार)

सामग्री : 1 से 7 अंक के 2 कार्ड सेट

खिलाड़ियों की संख्या : 1

इस व्यवस्था में, '1' के दो कार्डों के बीच में एक संख्या, '2' के दो कार्डों के बीच में दो संख्याएँ और '3' के दो कार्डों के बीच में तीन संख्याएँ सैंडविच की तरह दबी हुई होती हैं।

1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 के कार्डों से एक पूरा सैंडविच बनाएँ।

चुनौती : एक, दो, तीन, चार, पाँच, छह और सात अंकों की जोड़ियों का उपयोग करके एक सैंडविच बनाएँ।

3. संख्या टिकली!

सामग्री : चिटों पर लिखे गए (1 से 9 तक के अंक में से चुनें) अंक जोड़े और प्रत्येक जोड़े के साथ तीन सत्य कथन (true statement) कार्ड। (नोट : अंक चिट ही टिकली (बिन्दी) हैं। स्वयं चिपकने वाली काग़ज़ की पर्चियों को दिलचस्प आकारों में काटकर ये टिकली बनाई जा सकती हैं।)

खिलाड़ियों की संख्या : 2

संख्या जोड़ा उदाहरण : 4 और 7

लेवल-1 कथन कार्ड : संख्याओं का गुणनफल 28 है।

लेवल-2 कथन कार्ड : जब संख्याओं को भिन्न (fraction) के रूप में रखा जाता है, तो भिन्न 12/21 होता है।

लेवल-3 कथन कार्ड : संख्याओं के वर्गों का योग 65 है।

दो खिलाड़ी एक-दूसरे के आमने-सामने बैठते हैं। स्टॉल पर मौजूद प्रेजेंटर विद्यार्थी द्वारा दोनों खिलाड़ियों के माथे पर अंक-जोड़े की एक-एक चिट चिपका दी जाती है। यह चिट ऐसे चिपकाई जाती है जिससे खिलाड़ी सामने वाले खिलाड़ी की चिट तो देख सके लेकिन अपनी चिट न देख सके।

स्टॉल प्रेजेंटर किसी एक कथन (खिलाड़ी के गणित के ज्ञान के अनुसार) को चुनता है और ज़ोर-से पढ़ता है।

प्रत्येक खिलाड़ी को दूसरे खिलाड़ी की टिकली पर लिखी संख्या और स्टॉल प्रेजेंटर द्वारा पढ़े गए कथन के आधार पर अपनी टिकली पर लिखी संख्या का पता लगाना है।

4. क़रीब आना

सामग्री : अंक कार्ड के दो सेट (0 से 9 तक), 6 निर्देश कार्ड अलग-अलग लक्षित संख्याओं के साथ।

खिलाड़ियों की संख्या : 2

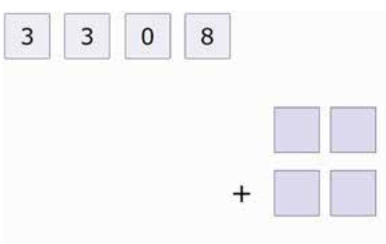
निर्देश कार्ड ऐसे होंगे : '' चार अंकों को इस प्रकार रखें कि वे दो दो-अंकीय संख्याएँ बनाएँ, जिनका योग 100 के सबसे क़रीब हो।''

ध्यान दें : '100 के क़रीब' वाक्यांश का अर्थ केवल 100 के क़रीब होने के रूप में लिया जा सकता है, इसलिए 100 से कम, बराबर या अधिक किसी भी संख्या को स्वीकार किया जा सकता है। उदाहरण के लिए 101, 96 की तुलना में बेहतर उत्तर है।

दोनों खिलाड़ी बारी-बारी से खेलते हैं। पहले खिलाड़ी को कार्ड पर लिखी संख्या को देखे बिना 4 अंक कार्ड उठाने दें। दूसरा खिलाड़ी एक निर्देश कार्ड चुनता है। पहले खिलाड़ी को उस कार्ड पर दिए गए निर्देश के अनुसार संख्या के योग के सबसे क़रीब आने की कोशिश करनी चाहिए। दूसरा खिलाड़ी देखेगा कि क्या वह बेहतर व्यवस्था के साथ आ सकता है।

(ध्यान दें : दो-अंकीय संख्या बनाने में शून्य (0) अग्रणी अंक नहीं हो सकता।)

चित्र-2 में चुने हुए अंक कार्डों व उन्हें किस प्रकार रखा जाना है यह दर्शाया गया है।



चित्र-2

उच्चतर स्तर : कई अलग-अलग निर्देश कार्डों और जोड़ और घटाना दोनों करने की अनुमति होने से खेल और चुनौती पूर्ण बन सकता है।

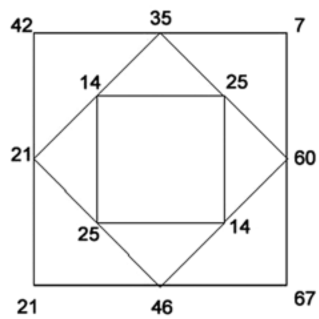
5. वर्ग-ही-वर्ग : आप इसे कब तक जारी रख सकते हैं ?

सामग्री : काग़ज़ और पेंसिल

खिलाड़ियों की संख्या : एक से अधिक हो सकते हैं (कोई सीमा नहीं)।

प्रेजेंटर शुरुआत में कोई भी 4 संख्याएँ देगा, जिन्हें खिलाड़ी अपनी इच्छा से किसी एक वर्ग के चारों कोनों पर रखेगा। खिलाड़ी को दो कोनों के बीच बनने वाले प्रत्येक जोड़े की बड़ी और छोटी संख्या के बीच का अन्तर वर्ग की संगत भुजा के मध्य बिन्दु पर लिखना होगा। अब मध्य बिन्दुओं को जोड़कर एक नया वर्ग बनाएँ। इस प्रक्रिया को तब तक दोहराएँ जब तक कि चारों भुजाओं के कोनों पर रखी गई संख्याओं के बीच अन्तर शून्य न हो जाए। जैसे शुरू की चार संख्याएँ 21, 42, 7, 67 हैं, वर्ग की एक भुजा के कोनों पर 42 व 21 हैं, इनके बीच का अन्तर 21 है। इस अन्तर को उस भुजा के ठीक बीच में लिखना है। फिर दूसरी भुजा के कोनों पर 42 व 7 हैं। इनका अन्तर 35 है। इसे भी इस भुजा के ठीक बीच में लिखना है। ऐसे ही बाक़ी के कोनों पर स्थित संख्या के साथ करना है। और फिर इनके ठीक बीच की संख्या को लकीर से मिलाकर एक नया वर्ग बनाना है और यह क्रिया तब तक जारी रखनी है जब तक कि अन्तर शून्य न हो जाए।

खिलाड़ी अन्य संख्याओं के साथ भी कोशिश कर सकते हैं और देख सकते हैं कि इस प्रक्रिया में कितना समय लगता है। वे उन विकल्पों के बारे में सोच सकते हैं जो जल्दी से उत्तर तक ले जाते हैं।



चित्र-3

6. चुनौती

सामग्री : संख्या10, 15, 21, 4, 5 क्रम वाला एक फ़्लैश कार्ड।

खिलाड़ियों की संख्या : एक से अधिक हो सकते हैं (कोई सीमा नहीं)।

प्रेजेंटर सवाल करता है कि ''इस संख्या अनुक्रम में क्या ख़ास है?''

10, 15, 21, 4, 5

यदि प्रतिभागी कोई भी ख़ासियत नहीं बता पाते हैं तो प्रेजेंटर ही उस ख़ासियत को सभी को बता देगा।

“आसन्न (adjacent) संख्याओं के प्रत्येक जोड़े का योग एक पूर्ण वर्ग संख्या होती है।”

10 + 15 = 25   15 + 21 = 36

21 + 4 = 25   4 + 5 = 9

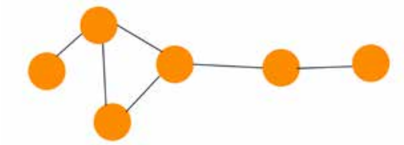
टॉस्क : 1 से 17 तक की संख्याओं को एक पंक्ति में इस प्रकार से व्यवस्थित करने की कोशिश करें, जिससे हर आसन्न (adjacent) जोड़े का योग एक पूर्ण वर्ग संख्या बने।

दृश्यों के माध्यम से गणित

1. पहचान कौन ?

दोस्तों के दो समूहों को **चित्र-4** और **5** में ग्राफ़ द्वारा दर्शाया गया है।

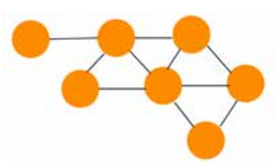
प्रत्येक संयोजन बिन्दु एक व्यक्ति है। एक रेखा दो संयोजन बिन्दुओं को तभी जोड़ती है जब वे दो व्यक्ति दोस्त हों।



चित्र-4

क्या आप नीचे दिए संकेतों की मदद से पता लगा सकते हैं कि **चित्र-4** में कौन-सा संयोजन बिन्दु कौन है?

1. अनु के 3 दोस्त हैं : भारत, चन्द्रु और दुर्गा।
2. भारत और ईला – दोनों चन्द्रु के दोस्त हैं।
3. ईला, फ़रहा की एक मात्र दोस्त है।



चित्र-5

चित्र-5 में एक और ग्राफ़ है जिसमें दोस्तों का एक और समूह दिखाया गया है।

चित्र-5 में कौन, कौन है, यह पता लगाने के लिए आगे दिए गए संकेतों का उपयोग करें।

1. बाली और क्लारा दोस्त हैं।
2. ईशा और क्लारा दोस्त नहीं हैं।
3. बाली, फ़ातिमा का इकलौता दोस्त है।
4. अनु के किसी और से ज़्यादा दोस्त हैं।
5. डोबे के तीन दोस्त हैं।
6. गोपी और डोबे दोस्त नहीं हैं।
7. ईशा के दो दोस्त हैं।

2. नाम बताओ!

यहाँ **चित्र-6** में मिण्टू, भोलू, छोटू, गोला, रागी हैं।

चित्र-6

मिण्टू और रागी मुस्कुरा रहे हैं।

रागी की आँखें बड़ी हैं।

भोलू और मिण्टू की नाक बड़ी है।

छोटू उदास है।

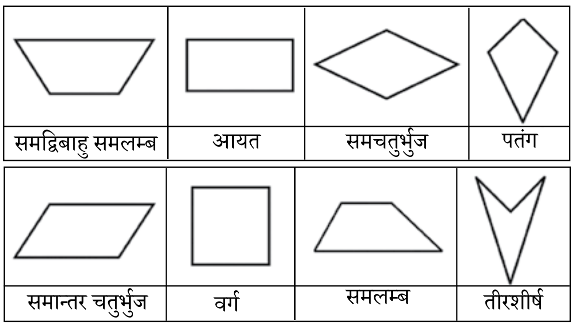
3. चार सवाल

सामग्री : आकृति वाला चार्ट

खिलाड़ियों की संख्या : 4 से 6 व्यक्तियों के एक या दो समूह।

यह गतिविधि जाने-माने खेल 'बीस सवाल (twenty questions)' की तर्ज पर ही बनाई गई है। इस खेल में खिलाड़ी-1 एक कार्ड (आकृति) को चुनता होता है। अन्य खिलाड़ी ऐसे सवाल पूछ सकते हैं जिनका जवाब केवल 'हाँ' या 'नहीं' होगा।

खिलाड़ियों को 4 या उससे कम सवालों में उस आकृति की पहचान करनी होती है।



चित्र-7 : विभिन्न आकृतियाँ

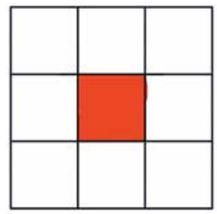
खिलाड़ियों को उन सवालों का पता लगाना होगा जो उन्हें (आकृतियों के) कुछ विकल्पों को हटाने में मदद कर सकें। (जिससे बचे विकल्पों में से आकृतियों को पहचानना आसान हो सके।)

उच्चतर स्तर चुनौती : क्या खिलाड़ी केवल तीन सवाल पूछकर ही आकृति की पहचान कर सकते हैं?

4. बीजारोपण

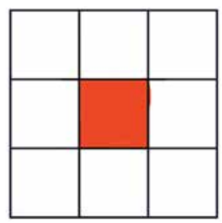
सामग्री : 36 बीज और एक (3 × 3) ग्रिड शीट जिसमें बीच का वर्ग ख़ाली हो।

बग़ीचे के खाली वर्गों में इन 36 बीजों को इस प्रकार लगाएँ कि ऊपर और नीचे की पंक्तियों तथा बाईं और दाईं ओर के स्तम्भों में से प्रत्येक का योग 18 बीज हो।।



चित्र-8

बग़ीचे के खाली वर्गों में इन 36 बीजों को इस प्रकार लगाएँ कि ऊपर और नीचे की पंक्तियों तथा बाईं और दाईं ओर के स्तम्भों में से प्रत्येक का योग 14 बीज हो।



चित्र-9

मापन और अनुमान

1. वस्तु की खोज

सामग्री : तराजू और स्केल

कैसे खेलें :

1. खिलाड़ी को ऐसी वस्तु ढूँढ़ने के लिए चुनौती दें जो कुछ निश्चित मानदण्डों को पूरा करती हों। उदाहरण के लिए : एक वस्तु जो लगभग 15 सेमी लम्बी हो।
2. एक वस्तु जिसका वज़न 50 ग्राम हो।
3. उपयुक्त माप उपकरणों (तराजू, नापने वाला टेप आदि) से जाँचें कि उनका अनुमान कितना सटीक था।

2. मेरा शरीर

सामग्री : स्केल और नापने वाला टेप

खिलाड़ियों की संख्या : 2

प्रेजेंटर पूछता है, ''क्या आपको पता है कि आपके सिर की लम्बाई कितनी है?'' (ठोड़ी से सिर के ऊपर तक) प्रत्येक खिलाड़ी को अनुमान लगाने दें और फिर एक-दूसरे के सिर की लम्बाई नापने दें।

(**नोट :** इस प्रकार के डेटा को रिकॉर्ड किया जा सकता है और बाद में गणित की कक्षा में सिर की लम्बाई में भिन्नता को समझने और औसत की गणना करने के लिए इस्तेमाल किया जा सकता है।)

यह देखने के लिए एक अध्ययन किया जा सकता है कि क्या पुरुषों और महिलाओं के बीच कोई अन्तर है। हमें मालूम है कि वयस्कों की ठोड़ी से सिर के शीर्ष तक मानव सिर की लम्बाई आमतौर पर 8-9 इंच (20-23 सेमी) होती है। क्या विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त निष्कर्ष इस जानकारी से मिलते हैं?

3. जग

ऐसे कई अच्छे सवाल हैं जिनमें आवश्यक मात्रा मापने के लिए बिना निशान वाले जगों का उपयोग करना शामिल है।

यहाँ ऐसी ही एक समस्या है।

आपके पास दो जग हैं। एक में सात लीटर और दूसरे में पाँच लीटर पानी आता है।

आप इन दो जगों से ठीक 4 लीटर पानी कैसे नापेंगे?

चित्र-10

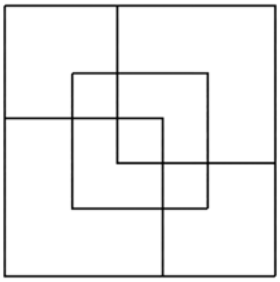
ज्यामिति

1. कितने वर्ग!

सामग्री : पिक्चर कार्ड

खिलाड़ियों की संख्या : एक से अधिक हो सकते हैं (कोई सीमा नहीं)

यहाँ कितने वर्ग हैं?



चित्र-11

2. और वर्ग!

सामग्री : टैनग्राम सेट

खिलाड़ियों की संख्या : 1

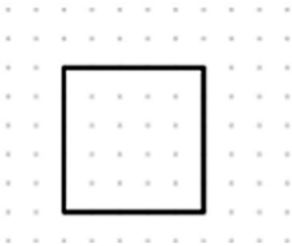
क्या आप टैनग्राम सेट के सभी या कुछ टुकड़ों का उपयोग करके पाँच अलग-अलग आकार के वर्ग बना सकते हैं?

(**नोट :** कुछ समाधान पुलआउट के अन्त में **चित्र-27** में दिए गए हैं।)

3. ज़मीन का बँटवारा

सामग्री : ग्रिड पेपर पर आकृति का चित्र बनाना (प्रति व्यक्ति 1 चित्र)।

खिलाड़ियों की संख्या : एक से अधिक हो सकते हैं (कोई सीमा नहीं)



चित्र-12

चित्र-12 में ज़मीन के बँटवारे का एक पुराना सवाल दिखाया गया है। क्या आप इस वर्गाकार ज़मीन के टुकड़े को इस तरह 5 बराबर भागों में बाँट सकते हैं कि किसी एक भाग से बाहर निकलने का कोई रास्ता न हो?

(नोट : पुलआउट के अन्त में **चित्र-28** में एक समाधान दिया गया है।)

4. 3D आकृति बनाना

सामग्री : 3D आकृतियों के मॉडल, स्ट्रॉ, कनेक्टर सेट

खिलाड़ियों की संख्या : 2

3D आकृतियाँ : हाल ही में त्रि-आयामी (3D) आकृतियों के निर्माण को पाठ्यक्रम में शामिल किया गया है। अधिकांश वयस्कों को त्रि-आयामी (3D) आकृतियाँ बनाने का मौक़ा नहीं मिला होगा।

मॉडल या मॉडलों के चित्र दिखाएँ। स्ट्रॉ और कनेक्टर देकर प्रतिभागियों से नियमित त्रि-आयामी (3D) आकृतियाँ बनाने को कहें, जैसे कि चतुष्फलक या अष्टफलक।

खेल

1. मेंढक-कूद

इस गतिविधि को सभी अच्छे से जानते हैं और यह सभी मेले आदि जैसे उत्सवों में बहुत सफल भी रहती है।

सामग्री : गत्ते की पट्टी पर बने 5 गोले और काग़ज़ के बने मेंढक।

खिलाड़ियों की संख्या : प्रत्येक पट्टी पर 2

चित्र-13क

यह गतिविधि बहुत ही आसान स्तर के साथ शुरू होती है जिसमें शुरुआत में दो भूरे और दो हरे मेंढक होते हैं।

जमावट : 5 गोलों वाली पट्टी पर शुरु के दो गोलों में 1-1 हरे मेंढक और आख़िरी के 2 गोलों में 1-1 भूरे मेंढक रखना है और उनके बीच एक ख़ाली गोला है। यह प्रारम्भिक स्थिति है। (**चित्र-13ख**)

नियम : एक मेंढक अपनी जगह से खिसककर ख़ाली गोले पर जा सकता है या बगल वाले एक मेंढक के ऊपर से कूदकर ख़ाली गोले पर जा सकता है। वह दाएँ और बाएँ दोनों तरफ़ खिसक और कूद सकता है। हालाँकि, वह एक से ज़्यादा मेंढकों के ऊपर से नहीं कूद सकता।

चित्र-13ख

चुनौती : क्या हम हरे और भूरे मेंढकों की जगह आपस में बदल सकते हैं? ऐसा करने के लिए कम-से-कम कितनी चालें चलनी पड़ती हैं? क्या मेंढक को वापस अपनी जगह पर जाना पड़ता है?

विस्तार : अब हम मेंढकों की संख्या बढ़ाकर (3 हरे और 3 कत्थई) इस गतिविधि को करने का प्रयास करें।

क्या हम तीन हरे और तीन भूरे मेंढकों की जगहें आपस में बदल सकते हैं?

क्या किसी मेंढक को वापस अपनी जगह पर जाना पड़ा?

ऐसा करने के लिए न्यूनतम कितनी चालों की आवश्यकता होगी?

चित्र-14क

चित्र-14ख

गणित उत्सव के दिन, हमारा उद्देश्य यह पता लगाना हो सकता है कि इस गतिविधि को कम-से-कम कितनी चालों में किया जा सकता है। हालाँकि, गतिविधि का और अधिक गहराई से अध्ययन किया जाए तो चालों के क्रम में एक पैटर्न को नोटिस किया जा सकता है। इस पैटर्न को समझने की कोशिश करके कम-से-कम चालों में मेंढकों की जगह आपस में बदलने की विधि का भी पता लगा सकते हैं।

एक बार हमने बोर्ड और गोटियों का उपयोग करके इस गतिविधि को प्रस्तुत किया था। इस चुनौती से प्रभावित होकर कुछ वरिष्ठ विद्यार्थियों ने कार्यक्रम स्थल के बाहर ज़मीन पर एक आकृति बनाई और मेंढकों की जगह उन्होंने

जूते और चप्पल का प्रयोग किया! इस गतिविधि का हल तलाशने के लिए उनके आस-पास उत्साहित भीड़ जमा हो गई थी। यह गली-मोहल्लों का गणित है।

2. रोक सको, तो रोको

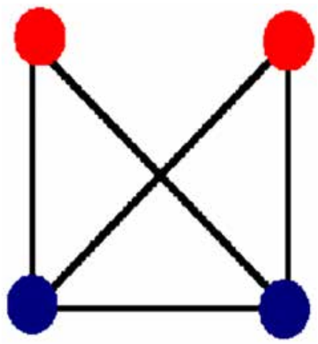
(मूल स्रोत nrich.maths.org से लिया गया)

सामग्री : बड़ा वाला फ़िगर कार्ड

खिलाड़ियों की संख्या : 2

यह खेल दो खिलाड़ियों के लिए है। प्रत्येक खिलाड़ी को नीचे दिए गए बोर्ड पर रखने के लिए दो गोटियों (या बटन या पत्थरों) की ज़रूरत होगी।

चित्र-15 में जैसा दिखाया है उस तरह दो गोटियाँ ऊपर और दो नीचे रखें।



चित्र-15

खिलाड़ी बारी-बारी से एक गोटी को एक रेखा के साथ ख़ाली जगह पर सरकाते हैं।

(इसलिए, पहली चाल हमेशा बीच की ओर होगी।)

जीतने के लिए, आपको दूसरे खिलाड़ी को रोकना होगा ताकि वह अपनी गोटी आगे न बढ़ा सके।

(अगले खेल की शुरुआत में खिलाड़ियों को अपनी जगह आपस में बदल लेनी चाहिए।)

चीन में इस खेल को पोंग हाउ क़ी कहा जाता है और कोरिया में इसे ऊ मूल को नो कहा जाता है।

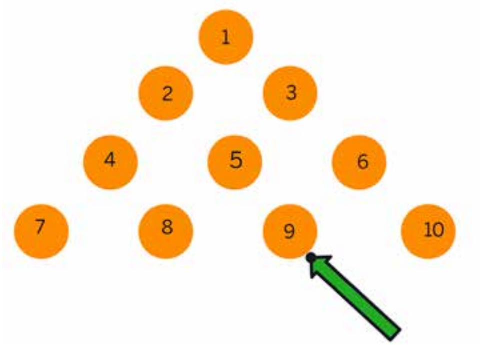
3. ऊपर से कूदो और आउट करो

सामग्री : संख्या लिखी हुई गोटियाँ (0 से 10 तक)

खिलाड़ियों की संख्या : 1

चित्र-16 में दिखाए गए तरीके से दस गोटियों (1 से 10) को त्रिभुज की आकृति में रखें। जगह बनाने के लिए अंक 9 वाली गोटी को हटाएँ। अब बची हुई गोटियाँ एक-दूसरे के ऊपर से कूद सकती हैं। एक गोटी के ऊपर से दूसरी गोटी को कुदाकर ख़ाली जगह में रखें। उस गोटी को हटा दें जिसके ऊपर से आप कूदे थे।

चुनौती : गोटियों को एक-एक करके इस तरह कुदाएँ कि अन्त में केवल एक ही गोटी बचे।



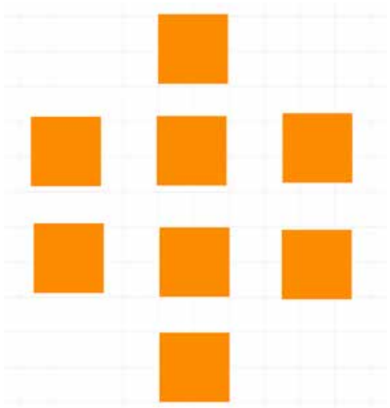
चित्र-16

4. स्टूल को अलग करो

सामग्री : चित्र-17 में दिखाए गए तरीके से मैदान में रखने के लिए 8 स्टूल; बड़े नम्बर कार्ड

यह चुनौती 8 विद्यार्थियों के एक समूह के लिए है।

प्रत्येक विद्यार्थी को एक अंक कार्ड (1 से 8 में से) दिया जाता है और उन्हें इस तरह बैठना होता है कि कोई भी दो लगातार अंक एक-दूसरे के पास क्षैतिज, ऊर्ध्वाधर या वक्रीय दिशा में न हों।



चित्र-17

पहेली कोना

इन रोचक पहेलियों को खेले बिना कोई भी गणित दिवस समारोह पूरा नहीं हो सकता।

कोई भी इन जानी-मानी पहेलियों का उपयोग कर सकता है। यह पहेलियाँ हैं :

- टैनग्राम
- सोमा क्यूब
- ब्रह्मा का डिस्क टावर
- पेंटोमिनोज़
- माचिस की तीली की पहेलियाँ

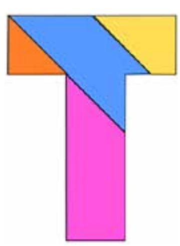
1. टुकड़ों-टुकड़ों वाली पहेलियाँ

किसी आकृति के विभिन्न टुकड़ों को एक काग़ज़ पर बनाई गई उस आकृति की वास्तविक रूपरेखा के साथ दिया जा सकता है जो इन्हें साथ जोड़कर बनाने पर मिलेगी।

लेकिन इन टुकड़ों को देना और उन्हें जोड़ने पर कौन-सी आकृति बनेगी यह बताना अधिक चुनौतीपूर्ण है।

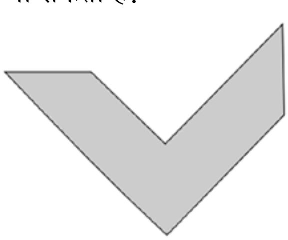
इस उदाहरण में, आपको टुकड़ों से T आकार बनाना है।

चित्र-18



चित्र-19

चित्र-19 में गुलाबी, नारंगी, नीले और पीले आकार को एक साथ लगाकर T का आकार बनाया गया है। क्या उन्हीं टुकड़ों को एक साथ लगाकर **चित्र-20** में दिखाया गया आकार बनाया जा सकता है?



चित्र-20

2. टाइल लगाने की चुनौतियाँ

(Polypad https://polypad.amplify.com/p से साभार)

सामग्री : टाइल के टुकड़े (कम-से-कम 10)

अलग-अलग आकार में टूटे हुए टाइल देकर प्रतिभागियों से कहें कि वे उसे एक मेज़ पर इस तरह लगाएँ कि उसका पहले वाला नियमित रूप बन जाए।

चित्र-21 : टाइल और इन टाइलों को लगाने की प्रक्रिया की शुरुआत।

3. नदी और पुल पहेलियाँ

1. एक आदमी के पास एक शेर, एक भेड़ और एक टोकरी गोभी है। वह सभी को नाव से नदी के दूसरी ओर ले जाना चाहता है। लेकिन एक समस्या है। वह आदमी नाव पर एक समय में तीनों में से केवल एक को ही ले जा सकता है।
   - अगर वह शेर को भेड़ के साथ छोड़ दे, और गोभी की टोकरी को ले जाए, तो शेर भेड़ को खा जाएगा।
   - इसी तरह, अगर भेड़ और गोभी की टोकरी को छोड़ दिया जाए, तो भेड़ गोभी खा जाएगी।

वह इस समस्या का समाधान कैसे कर सकता है?

2. 4 व्यक्ति (अ, ब, स और द) रात में एक पुल पार करना चाहते हैं।
   - अ को पुल पार करने में 1 मिनट लगता है।
   - ब को पुल पार करने में 2 मिनट लगते हैं।
   - स को पुल पार करने में 5 मिनट लगते हैं।
   - द को पुल पार करने में 8 मिनट लगते हैं।

उनके पास केवल एक टॉर्च है और टॉर्च के बिना पुल पार नहीं किया जा सकता। पुल पर एक समय में **दो से ज़्यादा** व्यक्ति नहीं जा सकते। जब दो व्यक्ति एक साथ पुल पार करते हैं, तो उन्हें धीमे चलने वाले व्यक्ति की गति से चलना पड़ता है। क्या वे सभी 15 मिनट में पुल पार कर सकते हैं?

4. दिमाग़ पढ़ने वाले!

दिमाग़ पढ़ने वाला एक स्टॉल दर्शकों का बहुत ध्यान आकर्षित कर सकता है। एक गणितज्ञ (जो एक दिलचस्प पोशाक पहने हुए हो) एक जादू का करतब दिखा सकता है। यह जादू का करतब एक गणितीय प्रक्रिया पर आधारित होता है जो एक पहले से ही तय परिणाम प्रदान करता है। दर्शक इस करतब से मोहित होकर यह जानने की कोशिश कर सकते हैं कि यह करतब काम कैसे करता है, जिससे दर्शकों को एक रहस्य सुलझाने वाले मिशन पर ले जाया जा सकता है।

इस प्रकार की कई पहेलियाँ आसानी से मिल सकती हैं। यहाँ कुछ नमूने दिए गए हैं।

दिमाग़ पढ़ने वाली तरकीब-1 : दर्शकों को निम्नलिखित निर्देश दें :

1. कोई भी दो अंकों वाली धनात्मक संख्या मन में सोचें।
2. इस संख्या के दोनों अंकों को जोड़ें।
3. जोड़ने के बाद आए परिणाम को अपनी मूल संख्या से घटाएँ।
4. यदि इसका परिणाम दो अंकों वाली संख्या है, तो उसके अंकों को फिर से जोड़ें। अब, क्या आपके पास एक अंक वाली संख्या है?

अब सोचने का नाटक/ दिखावा करें और कहें : "हम्मम्मम... देखते हैं कि वह संख्या क्या है! वह संख्या 9 है!"

कुछ दो अंकों वाली संख्या के लिए स्टेप 4 की ज़रूरत पड़ेगी।

क्या विद्यार्थी पता लगा पाते हैं कि यह तरकीब क्यों काम करती है?

वैसे यह तो सरल बीजगणित है!

(**नोट :** समाधान पुलआउट के अन्त में दिया गया है)

दिमाग़ पढ़ने वाली तरकीब-2 :

इस ट्रिक में, प्रतिभागी 1 से 63 के बीच की कोई संख्या सोचता है। स्टॉल प्रेजेंटर प्रतिभागी को **चित्र-22** में दिखाए गए 6 कार्ड देता है। प्रतिभागी इन कार्डों को ध्यान से देखता है और जिन कार्डों पर उसकी सोची हुई संख्या लिखी हुई है वे कार्ड स्टॉल प्रेजेंटर को वापस लौटा देता है। स्टॉल प्रेजेंटर वापस मिले कार्डों को देखता है और प्रतिभागी को उसकी सोची हुई संख्या बता देता है। यह तरकीब क्यों काम करती है?

(**नोट** : समाधान पुलआउट के अन्त में दिया गया है)

1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49
51	53	55	57	59
61	63			

2	3	6	7	10
11	14	15	18	19
22	23	26	27	30
31	34	35	38	39
42	43	46	47	50
51	54	55	58	59
62	63			

4	5	6	7	12
13	14	15	20	21
22	23	28	29	30
31	36	37	38	39
44	45	46	47	52
53	54	55	60	61
62	63			

8	9	10	11	12
13	14	15	24	25
26	27	28	29	30
31	40	41	42	43
44	45	46	47	56
57	58	59	60	61
62	63			

16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	48	49	50	51
52	53	54	55	56
57	58	59	60	61
62	63			

32	33	34	35	36
37	38	39	40	41
42	43	44	45	46
47	48	49	50	51
52	53	54	55	56
57	58	59	60	61
62	63			

चित्र-22

5. एनसीईआरटी के जादुई पिटारा से एक मज़ेदार गतिविधि

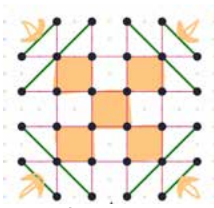
लुप्त मेंढक

चित्र-23 : https://ncert.nic.in/dee/pdf/ Jaadui_Pitara_User_Manual_Hindi.pdf

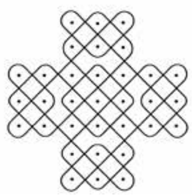
कार्यशालाएँ

गणित दिवस का उपयोग कला के उन रूपों की कार्यशाला के आयोजन के लिए भी किया जा सकता है जिनका गणित से सम्बन्ध हो। कुछ उदाहरण हैं : रंगोली (कोलम), इस्लामिक कला, बुनाई और सिलाई।

स्कूल किसी अभिभावक को रंगोली बनाने की कार्यशाला आयोजित करने के लिए आमंत्रित कर सकता है। वह रंगोलियाँ भी प्रस्तुत की जा सकती हैं जिनमें अलग-अलग जटिलताएँ हों। सरल रंगोलियाँ जो सीधी रेखाओं का उपयोग करके वर्गाकार बिन्दु ग्रिड पर बना सकते हैं। डॉट पेपर (या ब्लैकबोर्ड) पर थोड़ी जटिल आकृतियाँ, जिन्हें एक घुमावदार रेखा द्वारा लगातार डॉट्स के ऊपर घुमाकर जोड़ा जाता है।

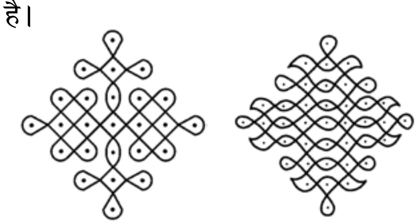


चित्र-24



चित्र-25

अन्तिम चरण : दिन का समापन एक रोचक गणितीय क्विज़ या एक दिलचस्प गणितीय फ़िल्म के साथ किया जा सकता है।



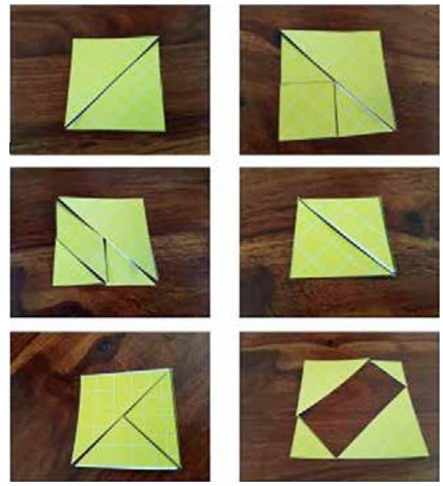
चित्र-26

कुछ सुझाव नीचे दिए गए हैं :

1. Flatland https://share.google/images/qUevj2MkURQgE1GDv
2. Weird Numbers https://youtu.be/pSO66sL9SmY?feature=shared
3. Number Devil https://youtu.be/qJHc54IG5R8?feature=shared

चुनिन्दा पहेलियों के हल

और अधिक वर्ग : ज्यामितीय गतिविधि/ सवाल 2।



चित्र-27

ज़मीन का बँटवारा : ज्यामितीय गतिविधि/ सवाल 3।

चित्र-28

दिमाग़ पढ़ने वाली तरकीब-1 का हल : इसके स्टेप इस प्रकार हैं :

1) मान लें कि चुनी हुई संख्या 10a + b है।
2) अंकों का योग a + b होगा।
3) 10a + b − (a + b) करने पर 9a मिलेगा।
4) 9 के किसी भी गुणज के अंकों का योग हमेशा 9 होगा।
5) उत्तर हमेशा 9 ही होगा।

दिमाग़ पढ़ने वाली तरकीब-2 का हल :

प्रतिभागी से वापस मिले कार्डों के पहले वर्ग में लिखी संख्याओं को जोड़ने पर प्रतिभागी द्वारा सोची संख्या का अनुमान लगाया जा सकता है। (जैसे सोची गई संख्या 25 है, अब 25 जिन कार्डों में लिखा है उनके पहले वर्ग की संख्या को देखा जाएगा। 25 तीन कार्डों पर लिखा हुआ है उन कार्ड के पहले वर्ग के अंक हैं 1 + 16 + 8 = 25)

पद्मप्रिया शिराली

पद्मप्रिया शिराली सह्याद्री स्कूल (पुणे) और ऋषि वैली (आन्ध्र प्रदेश) में स्थित सामुदायिक गणित केन्द्र से जुड़ी हुई हैं। यहाँ वे 1983 से कार्यरत हैं। उन्होंने गणित, कम्प्यूटर अनुप्रयोग, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू जैसे विभिन्न विषय पढ़ाए हैं। 1990 के दशक में उन्होंने स्वर्गीय श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ निकटता से कार्य किया। वे उस टीम की सदस्य रही हैं जिसने ऋषि वैली ग्रामीण केन्द्र में 'स्कूल इन ए बॉक्स' नामक बहु-स्तरीय प्राथमिक शिक्षा कार्यक्रम विकसित किया। वर्तमान में वे एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तक विकास समूह की सदस्य हैं। उनसे padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : प्रियेश गुप्ता **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी
एट राइट एंगल्स
स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

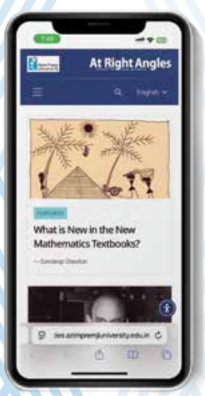
गणित और गणित शिक्षा पर एक गहन, गम्भीर पत्रिका।

शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों और विषय से जुड़े विद्यार्थियों के लिए।

Azim Premji University

क्या आपने एट राइट एंगल्स का डिजीटल एडीशन देखा है?

यह गणित के स्कूल शिक्षकों के लिए है।



आपका विश्वसनीय शिक्षण संसाधन अब बस एक क्लिक की दूरी पर है...

- कभी भी, कहीं भी बेहतर पहुँच
- एक ही स्थान पर तीन भाषाओं में लेख
- शेयर और डाउनलोड करना आसान
- इंटरैक्टिव फीचर्स

देखने के लिए स्कैन करें

Azim Premji University
Survey No. 66, Burugunte Village,
Bikkanahalli Main Road, Sarjapura
Bengaluru – 562125

azimpremjiuniversity.edu.in

Facebook: /azimpremjiuniversity
Instagram: @azimpremjiuniv
X: @azimpremjiuniv