परिमाप और क्षेत्रफल को वर्गाकार टाइल्स की मदद से समझना

मोहन आर.

परिमाप और क्षेत्रफल के बीच के सम्बन्ध को समझना कक्षा-3 से 7 तक के बच्चों के लिए एक मज़ेदार और खोजपूर्ण गतिविधि हो सकती है। वर्गाकार टाइल्स इसके लिए बहुत उपयोगी साधन हैं। क्योंकि वर्गाकार टाइल्स के साथ कार्य करके बच्चे अपने सहज ज्ञान से इन अवधारणाओं के सम्बन्ध में खोज-बीन और कल्पना कर पाते हैं। इस लेख में हम कुछ ऐसी गतिविधियाँ साझा कर रहे हैं जो बच्चों को आकार, क्षेत्रफल और परिमाप के बीच के सम्बन्ध को समझने में मदद करती हैं। इन गतिविधियों से बच्चे यह भी सीखते हैं कि कैसे किसी आकार का परिमाप कम किया जा सकता है या क्षेत्रफल को अधिकतम किया जा सकता है।

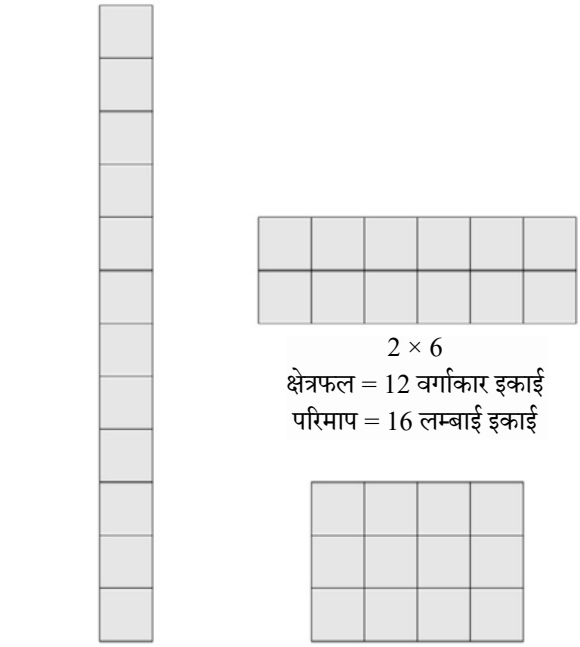
ज़रूरी सामग्री

- मोटे चार्ट पेपर की 5 × 5 सेंटीमीटर की वर्गाकार टाइल्स
- पेंसिल और काग़ज़
- ग्रिड या ग्राफ़ पेपर (आकृतियाँ बनाने और रफ़ कार्य के लिए)

गतिविधि-1 : छोटे से शुरू करें (कक्षा 3–5)

नई एनसीईआरटी किताबों में क्षेत्रफल को वर्ग इकाइयों के माध्यम से कक्षा-3 में और लम्बाई को कक्षा-4 में परिचित कराया गया है।

शिक्षक गतिविधि की शुरुआत बच्चों को क्षेत्रफल और परिमाप का संक्षिप्त परिचय देकर या रिवीज़न से कर सकते हैं। और यह चर्चा कर सकते हैं कि टाइल्स की मदद से इन्हें कैसे मापा जाता है (**चित्र-1** देखें)। इसके बाद बच्चों को दो-दो की जोड़ियों में बाँटा जाता है। हर बच्चे को 12 वर्गाकार टाइल्स दी जाती हैं। हर बच्चे से सभी 12 टाइल्स का उपयोग करके आयत बनाने को कहा जाता है, आयत की दिशा मायने नहीं रखती। हर जोड़ी आपस में चर्चा करके आयत बनाने के लिए टाइल्स की अलग-अलग व्यवस्था खोजती है। फिर ग्रिड पेपर पर इन व्यवस्थाओं को सावधानीपूर्वक चित्रित करती है। फिर बच्चों से कहा जाता है कि वे इन आयतों का परिमाप (जो बदलता रहता है) और क्षेत्रफल (जो हमेशा 12 वर्ग इकाई रहेगा) की गणना करके रिकॉर्ड करें।



चित्र-1 : 12 टाइल्स से बने कुछ आयत

की-वर्ड : *क्षेत्रफल, परिमाप, वर्गाकार टाइल्स, पॉलीओमिनोज़, फ़्लोर प्लान*

चित्र-2 : टाइल्स से खेलते बच्चे (Created with GPT)

गतिविधि 2 : फ़र्श को घेरना (कक्षा 4–6)

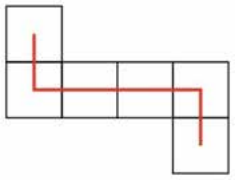
जब बच्चे वर्गाकार टाइल्स की किसी छोटी संख्या से आयत बनाना सीख जाते हैं, तो शिक्षक इस गतिविधि को आगे बढ़ाते हुए उन्हें ऐसे अन्य आकार बनाने के लिए कह सकते हैं जो ज़रूरी नहीं कि आयत ही हों। स्पष्टता के लिए, इन नए आकारों को 'फ़्लोर प्लान' (floor plans) कहा जा सकता है। फ़्लोर प्लान के लिए सिर्फ़ एक शर्त है : आकार सतत होना चाहिए। यानी, किसी भी टाइल से दूसरी किसी भी टाइल तक साझा किनारों से होकर पहुँचना सम्भव होना चाहिए। (**चित्र-3** और **4** देखें)

(क) ऐसा फ़्लोर प्लान जिसमें L-आकार की दोनों टाइलें किसी साझा किनारे से नहीं जुड़ी हैं।

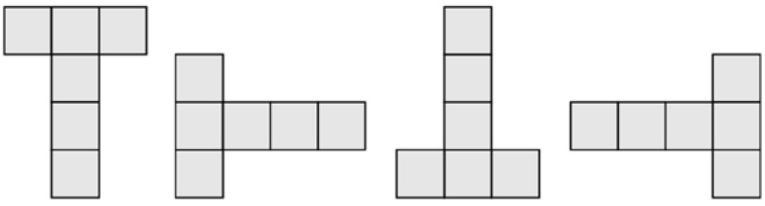
(ख) ऐसा फ़्लोर प्लान जिसमें दो अलग-अलग हिस्से हैं – यानी पूरा आकार एक यूनिट नहीं है।

चित्र-3 : दो ऐसे फ़्लोर प्लान जो आपस में किनारे साझा करते हुए नहीं जुड़े हैं। लाल रेखा पर चलते हुए हम किनारों के ज़रिए पूरे आकार को पार नहीं कर सकते।

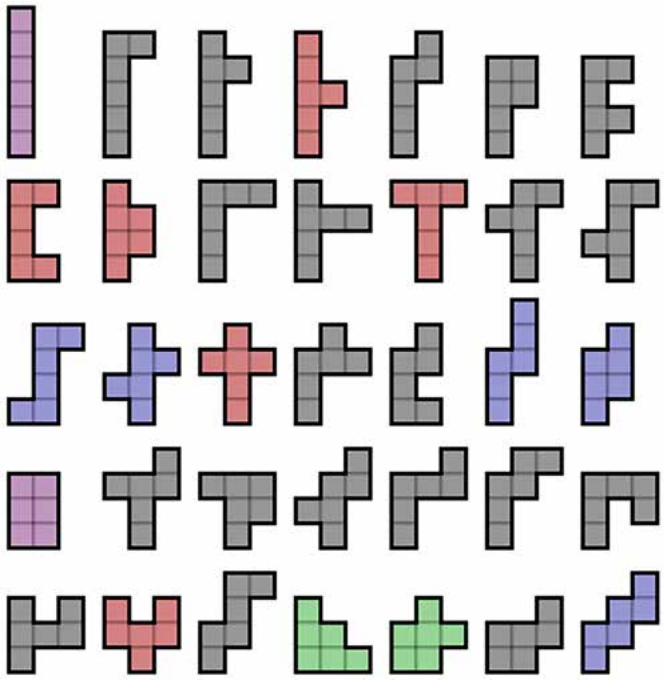
इस गतिविधि का मुख्य उद्देश्य यह पता लगाना है कि किस फ़्लोर प्लान का परिमाप सबसे कम है। व्यावहारिक रूप से इसका मतलब है कि कौन-सी ऐसी टाइल व्यवस्था होगी जिससे चारों तरफ़ कम-से-कम बाड़ लगेगी यानी जिसकी लागत सबसे कम होगी। इस गतिविधि के लिए शिक्षक हर बच्चे को 6 वर्गाकार टाइल्स देते हैं। बच्चों से कहा जाता है कि वे इन टाइल्स से अधिकतम सम्भव फ़्लोर प्लान बनाएँ और उन्हें ग्रिड पेपर पर चित्रित करें। ऐसा करते हुए वे ध्यान दें कि आकार को पलटकर बनाने या घुमाने से कोई फ़र्क़ नहीं पड़ता, क्योंकि इससे परिमाप और क्षेत्रफल नहीं बदलता (**चित्र-5**)। सभी फ़्लोर प्लान बनाने के बाद बच्चे हर आकार के परिमाप की गणना करके दर्ज करते हैं।



चित्र-4 : यहाँ लाल रेखा पर चलते हुए हम प्रत्येक टाइल तक पहुँच सकते हैं, क्योंकि हरेक टाइल किसी-न-किसी दूसरी टाइल के किनारे से जुड़ी हुई है।



चित्र-5 : फ़्लोर प्लान को घुमाने या पलटने से परिमाप या क्षेत्रफल नहीं बदलता।

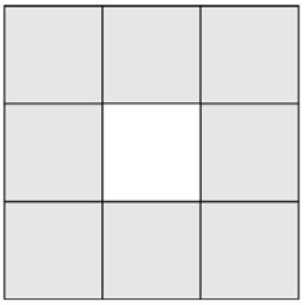


चित्र-6 : 6 टाइल्स से बनने वाले सभी जुड़े हुए फ़्लोर प्लान। Credits: By R. A. Nonenmacher - Own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4773113

नोट : कभी-कभी फ़्लोर प्लान के अन्दर रिक्त भाग हो सकता है (जैसे **चित्र-7** में है)। इस स्थिति में परिमाप बाहरी सीमा और अन्दरूनी सीमा का योग होगा।

शिक्षक इन सवालों पर बच्चों के साथ चर्चा करें और बच्चे *तर्क* दें कि क्यों उनके जवाब सही हैं :

1. किस व्यवस्था में परिमाप सबसे अधिक है? सबसे कम है?
2. व्यवस्था बदलने पर परिमाप बदलता है पर क्षेत्रफल वही क्यों रहता है?
3. 12 टाइल्स से आयत बनाते समय, क्या आपने आयत की भुजाओं की माप और 12 के गुणजों के बीच कोई सम्बन्ध देखा?
4. यदि 12 की जगह 13 टाइल्स लें तो क्या होगा?
5. यदि 24 टाइल्स लें तो क्या होगा?
6. क्या परिमाप हमेशा सम संख्या (even) होगा?
7. यदि 12 की बजाय n टाइल्स ली जाएँ तो क्या होगा (बड़ी कक्षा के बच्चों के लिए)?



क्षेत्रफल = 8 इकाई
परिमाप = बाहरी सीमा और अन्दरूनी सीमा की लम्बाई।
तो परिमाप = 12 + 4 = 16 इकाई

चित्र-7 : 8 वर्गाकार टाइल्स वाला एक फ़्लोर प्लान।

गतिविधि-3 : बाड़ लगाना (कक्षा 5–7)

इस शृंखला की अन्तिम गतिविधि एक सम्बन्धित लेकिन उलटे प्रश्न पर आधारित है : यदि परिमाप तय हो, तो कौन-सा आयत सबसे बड़ा क्षेत्रफल देता है? इसे एक वास्तविक स्थिति के रूप में भी समझाया जा सकता है : कल्पना करें कि आप वर्गाकार टाइल्स से बनी ज़मीन का अधिक-से-अधिक हिस्सा घेरना चाहते हैं। आपके पास बाड़ लगाने के लिए केवल तय लम्बाई (परिमाप) की सामग्री है। आप अपनी बाड़ को किस तरह व्यवस्थित करेंगे कि उससे घेरे जाने वाली ज़मीन का क्षेत्रफल अधिकतम हो?

शुरुआत में शिक्षक परिमाप के लिए 24 इकाई तय करते हैं। फिर बच्चे इस निश्चित परिमाप के साथ जितने भी सम्भव आयत बन सकते हैं, बनाते हैं। हर आयत बनाकर वे उसका क्षेत्रफल निकालते हैं और तुलना करते हैं कि किस आयत का क्षेत्रफल सबसे अधिक है। इस चरण पर शिक्षक बच्चों को धीरे-धीरे बीजगणित, तालिका बनाना और व्यवस्थित तर्क की भाषा से परिचित करा सकते हैं, ताकि बच्चे अपनी खोजों को बेहतर ढंग से व्यवस्थित कर सकें और सोच सकें। जब बच्चे आयतों में निपुण हो जाते हैं, तो उन्हें एक और चुनौती दी जा सकती है : नियत परिमाप के लिए ग़ैर-आयताकार फ़्लोर प्लान बनाकर देखो, कौन-सा आकार सबसे बड़ा क्षेत्रफल देता है?

निष्कर्ष

इन इंटरैक्टिव और खोजी गतिविधियों के माध्यम से बच्चे परिमाप और क्षेत्रफल से जुड़े महत्त्वपूर्ण गणितीय विचारों को सहज रूप से समझते हैं। वे विभिन्न पैटर्न खोजते हैं, व्यवस्थित तर्क व सोच विकसित करते हैं और महसूस करते हैं कि गणितीय अवधारणाएँ व्यावहारिक परिदृश्यों से कैसे जुड़ती हैं। साधारण वर्ग टाइलों का उपयोग करके, ये गतिविधियाँ बुनियादी कौशलों का निर्माण करती हैं और गणित के रचनात्मक तथा व्यावहारिक होने के बारे में गहरी समझ विकसित करती हैं।

इस टॉपिक पर कुछ अन्य विचार

1. *एट राइट एंगल* के कुछ पुराने लेखों में भी ऐसे ही विचारों पर चर्चा की गई है। उदाहरण के लिए यह लिंक देखें https://bit.ly/3L0uH8u जिसमें वर्गाकार ग्रिड पर कई ऐसी ही खोजें शामिल हैं।
2. n = 3 के छोटे फ़्लोर प्लान बनाकर निम्न प्रकार की जोड़ी ढूँढ़ी जा सकती है : (क) क्षेत्रफल और परिमाप दोनों समान (ख) क्षेत्रफल समान, परिमाप अलग (ग) परिमाप समान, क्षेत्रफल अलग।
3. L आकार का कोना काटना (इसे L-ing कहते हैं), जिसमें परिमाप वही रहता है लेकिन क्षेत्रफल घटता है। दूसरा है, किसी भुजा पर U आकार का कट लगाना (U-ing), जिसमें क्षेत्रफल घटता है लेकिन परिमाप बढ़ जाता है। यह पॉलीओमिनोज़ के साथ किया जा सकता है। टास्क-4 और 5 देखें : https://bit.ly/47i5jCt। पॉलीओमिनोज़ उन आकृतियों को कहते हैं जो एक समान वर्गों को किनारों से जोड़कर बनाई जाती हैं।
4. हेक्सोमिनो पर भी एक और टियरआउट उपलब्ध है : https://bit.ly/49fKkmu

मोहन आर. अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी, बेंगलूरु में गणित पढ़ाते हैं। वे एक बीजगणितज्ञ के रूप में प्रशिक्षित हैं और गणित शिक्षा व गणित संचार में भी रुचि रखते हैं। वे कर्नाटक क्षेत्र के लिए मैथमेटिक्स ओलंपियाड के रीजनल कोऑर्डिनेटर भी हैं। उनसे mohan.r@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : गणेश मादुलकर **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय