

“कैसे पता करूँ कि उन्होंने समझ लिया है?”

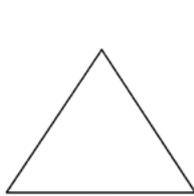
गणितीय समझ को परखने वाले प्रश्न

क्षमा चक्रवर्ती

क्या आपको कभी ऐसा लगा कि जो पाठ आपने पढ़ाया है वह सफल रहा, लेकिन बाद में पता चला कि विद्यार्थियों ने उतने अच्छे-से नहीं समझा, जितना आप सोच रहे थे? क्या कभी ऐसा हुआ कि आपके हिसाब से तो कक्षा बहुत अच्छी चली, लेकिन आखिर में किसी विद्यार्थी ने इतना बुनियादी सवाल पूछ लिया कि आपको लगा कि शायद उन्होंने इस पूरे सत्र में कुछ समझा ही नहीं? हम सब इस स्थिति से गुजरे हैं, और ऐसा कई कारणों से होता है। मसलन, संवाद में कमी रह जाना, हर विद्यार्थी का अलग तरह से सीखना, या फिर ध्यान भटक जाने के छोटे-छोटे पल जिनके कारण विद्यार्थी कई खास बातों को नहीं समझ पाते, चाहे हम कक्षा में कितनी भी मेहनत क्यों न करें।

जब हम किसी नई अवधारणा से परिचय कराते हैं तो हम जो उदाहरण (और गैर-उदाहरण) इस्तेमाल करते हैं, वे विद्यार्थी की अवधारणा की समझ में बहुत अहम भूमिका निभाते हैं। उदाहरण के लिए, अगर हम हर बार त्रिभुज को केवल एक सीधे खड़े समबाहु त्रिभुज के रूप में दिखाएँ तो विद्यार्थी यह सोच सकते हैं कि त्रिभुज हमेशा ऐसा ही दिखना चाहिए। उन्हें लग सकता है कि किसी और दिशा में बना हुआ या अलग आकार का कोई भी त्रिभुज, त्रिभुज ही नहीं होता (चित्र-1)। अगर हम अलग-अलग तरह के त्रिभुजों के उदाहरण दें और कुछ गैर-उदाहरण भी दिखाएँ (मसलन, लहरिया रेखाएँ, खुली आकृतियाँ) तो त्रिभुज की सही समझ बनाने में मदद मिल सकती है।

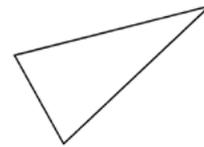
इसी तरह, जब हम किसी संख्या का विस्तारित रूप (expanded form) लिखना सिखाते हैं, तो हम अक्सर संख्या को बाएँ से दाएँ उसी क्रम में तोड़ते हैं, जिस क्रम में अंक आते हैं। मसलन 3409 को हम लिखते हैं 3 हजार + 4 सैकड़े + 0 दहाई + 9 इकाई। कई विद्यार्थी स्थान के नाम या स्थानीय मान (place value) पर ध्यान नहीं देते। वे सिर्फ अंकों के क्रम 0, 4, 3 और 9 को देखते हैं। और जब आप स्थानों को अलग क्रम में बोलते हैं तो वे गलती कर देते हैं। उदाहरण के लिए, 3 दहाई + 2 इकाई + 8 सैकड़े को ऐसे विद्यार्थी ज्यादातर 328 लिखेंगे, जबकि सही उत्तर 832 होना चाहिए। ऐसे मामलों में पढ़ाते समय संख्या के विस्तारित रूप के क्रम को बदल-बदलकर अभ्यास कराना काफ़ी मददगार हो सकता है। शिक्षक अपने अनुभव और समझ के आधार पर बेशक यह तय कर सकते हैं कि सीखने की प्रक्रिया के किस चरण पर उन्हें ये अतिरिक्त बिन्दु शामिल करने चाहिए।



‘आदर्श’ त्रिभुज



बहुत ‘पतला’ - इसलिए त्रिभुज नहीं



बहुत ‘झुका हुआ’ - इसलिए त्रिभुज नहीं

चित्र-1

की-वर्ड : पाठ योजना, विद्यार्थी की समझ, आकलन, सुधारात्मक शिक्षण, प्रश्न, शिक्षण विधियाँ

कुछ और उदाहरण देखें

जब हम पूर्ण संख्याओं (whole numbers) में घटाव सिखाते हैं तो हम कहते हैं कि छोटी संख्या में से बड़ी संख्या को नहीं घटाया जा सकता। लेकिन जैसे ही हम पूर्णांक (integers) पर पहुँचते हैं, हम उन्हें यही काम करना सिखाते हैं! इसी तरह, हम कहते हैं कि शून्य का कोई मान नहीं होता, और फिर भी 10 और 100 अलग-अलग संख्याएँ हैं, और 1.02 और 1.2 भी अलग-अलग हैं। (कई विद्यार्थी दशमलव संख्याओं की तुलना करते समय कहते हैं कि 1.02 और 1.2 का एक ही मतलब है क्योंकि 'शून्य का कोई मान नहीं होता'।)

हालाँकि त्रिभुज और विस्तारित रूप वाले उदाहरणों में तो गलत धारणाएँ इसलिए बनती हैं क्योंकि हमने सभी स्थितियाँ नहीं देखी होतीं। लेकिन बाकी उदाहरणों में, जो बातें हम विद्यार्थियों को बताते हैं और सच मानने को कहते हैं, वे आगे चलकर दूसरे विषयों या उच्च स्तर के पाठों में सच नहीं रह जातीं। इससे उनके मन में एक मानसिक टकराव (cognitive conflict) पैदा होता है, और कुछ विद्यार्थियों को इससे बाहर आने में समय लगता है। यदि हम इस बात के प्रति सजग रहें और जानें कि विद्यार्थी किस तरह सोच सकते हैं तो हम सही समय पर हस्तक्षेप कर सकते हैं, या फिर गलत धारणाएँ बनने से ही रोक सकते हैं।

इन ज़रूरी बिन्दुओं को अपने शिक्षण की प्रक्रिया में शामिल कर लेने के बाद यह समझना महत्वपूर्ण होता है कि विद्यार्थियों ने अवधारणा को पूरी तरह सीखा है या नहीं। इसे जाँचने का एक अच्छा तरीका है – सही प्रश्नों का निर्माण करना। ऐसे प्रश्न जो उनकी समझ को सचमुच परखें। अच्छे-से बनाए गए बहु-विकल्पीय प्रश्न (MCQs), जिनमें वास्तविक और तार्किक दिखने वाले भ्रामक विकल्प (distractors) हों, विद्यार्थियों की गलत धारणाओं को पहचानने में मदद करते हैं। गलत विकल्पों में अक्सर वही सामान्य गलतियाँ छिपी होती हैं जो विद्यार्थी करते हैं। जब कोई विद्यार्थी किसी भ्रामक विकल्प को चुनता है तो इससे हमें पता चलता है कि वह किस खास हिस्से में उलझ रहा है (सिर्फ अनुमान लगाने के बजाय)। इससे शिक्षक सही दिशा में प्रतिक्रिया और मार्गदर्शन दे पाते हैं। यह उपयोगी है क्योंकि इससे शिक्षक :

- केवल याददाश्त जाँचने के बजाय गलत धारणाओं की पहचान कर पाते हैं।
- आंशिक समझ और पूरी तरह से गलत समझने में अन्तर कर पाते हैं।
- शिक्षण को अधिक प्रभावी बना पाते हैं, क्योंकि गलत उत्तर विद्यार्थियों की सोच के पैटर्न को दिखाते हैं।

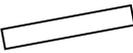
नीचे एक बहु-विकल्पीय प्रश्न का उदाहरण दिया गया है, जिसमें प्रश्न का मुख्य भाग और विकल्प शामिल हैं। इन विकल्पों को भटकाने वाले या भ्रामक विकल्प भी कहा जाता है।

<p>जोड़ें और सही उत्तर का चुनाव करें :</p> $\begin{array}{r} 374 \\ +826 \\ \hline \end{array}$ <p>(a) 11910 (b) 1200* (c) 1191 (d) 1190</p>	<p>प्रश्न / प्रश्न का मुख्य भाग : यह विद्यार्थी तक प्रश्न को पहुँचाता है।</p> <p>विकल्प / भ्रामक विकल्प :</p> <p>विद्यार्थी इनमें से किसी एक को चुनता है। हर भ्रामक विकल्प के पीछे एक वजह होती है। क्या आप उसे समझ सकते हैं?</p> <p>* सही उत्तर</p>
--	---

यहाँ कुछ नमूना प्रश्न दिए गए हैं जिन्हें आप कक्षा में आजमा सकते हैं और देख सकते हैं कि क्या अपेक्षित गलत धारणाएँ सामने आती हैं। ये प्रश्न इस तरह बनाए गए हैं कि वे दुनिया भर के विद्यार्थियों की समझ की जाँच कर सकें, चाहे उनकी सामाजिक-आर्थिक पृष्ठभूमि, जेंडर, या शिक्षक का अनुभव और विशेषज्ञता कुछ भी हो। हरेक विकल्प को चुनने की सम्भावित वजह भी दी गई है। यह आपको एक शिक्षक के रूप में यह समझने में मदद करती है कि किस प्रकार की सुधारात्मक शिक्षण (remediation) योजना बनाई जाए। इन प्रश्नों को एनसीईआरटी दस्तावेजों में दिए गए अधिगम के प्रतिफलों (Learning Outcomes at the Elementary Stage, NCERT, 2017 कक्षा-3 के लिए, और Learning

Outcomes at the Foundational Stage, NCERT, 2025 कक्षा-2 के लिए) से जोड़कर रखा गया है। इससे यह पता चलता है कि पूछे गए प्रश्नों से अधिगम के कौन-से प्रतिफल को परखा जा सकता है – सीधे या फिर धीरे-धीरे उस दिशा में पहुँचकर।

बहु-विकल्पीय प्रश्न-1		
विषय : हासिल के साथ दो अंक वाली संख्याओं का योग	कक्षा : 3	अधिगम का प्रतिफल : हासिल और बिना हासिल के तीन अंक वाली संख्याओं के जोड़-घटाव का इस्तेमाल करके दैनिक जीवन की समस्याएँ हल करते हैं (योग 999 से अधिक नहीं)।
जाँच का उद्देश्य	जोड़ की प्रक्रिया की पूरी समझ की जाँच करना। खासकर, गुमशुदा अंक को ढूँढ़ने के लिए, जिसमें घटाव का उपयोग करना ज़रूरी होता है।	
प्रश्न	जोड़ के इस प्रश्न में रिक्त स्थान वाले अंक का पता लगाएँ। $\begin{array}{r} 76 \\ + \square 9 \\ \hline 125 \end{array}$	
	भ्रामक विकल्प	इस विकल्प को चुनने का सम्भावित कारण
भ्रामक विकल्प-1	20	इकाई की जगह पर 6 और 9 को जोड़कर 15 मिला, फिर 15 से आया हुआ 1 दहाई लेकर 7 और उत्तर में दिख रहे 12 को जोड़ दिया, जिससे 20 मिला।
भ्रामक विकल्प-2	19	दहाई की जगह पर 'दिख' रहे 7 और 12 को जोड़कर 19 लिख दिया।
भ्रामक विकल्प-3	5	$7 + \underline{\quad} = 12$ इस हिस्से को अलग से हल किया और उत्तर 5 मिला।
भ्रामक विकल्प-4	4	सही उत्तर। ($76 + 49 = 125$)

बहु-विकल्पीय प्रश्न-2		
विषय : द्विआयामी (2D) आकारों की पहचान करना (खासतौर पर आयत की)	कक्षा : 2,3	अधिगम के प्रतिफल : <ul style="list-style-type: none"> द्विआयामी आकारों को उनके नाम से पहचानते हैं (मसलन वर्ग, आयत, त्रिभुज और वृत्त) और उनकी दिखाई देने वाली विशेषताओं का वर्णन करते हैं। (मसलन पुस्तक के पन्ने आयताकार होते हैं और उनकी 4 भुजाएँ तथा 4 कोने होते हैं।) (कक्षा-2) द्विआयामी आकारों का वर्णन उनकी भुजाओं, कोनों और विकर्णों की संख्या के आधार पर करते हैं। (कक्षा-3)
जाँच का उद्देश्य	आयत की पहचान करना	
प्रश्न	सभी आयतों को चुनें।	
	भ्रामक विकल्प	इस विकल्प को चुनने का सम्भावित कारण
भ्रामक विकल्प-1		'देखने' में आयत जैसा लगता है। यह नहीं देख पाते कि आकृति खुली हुई है, या शायद यह नहीं जानते कि आयत एक बन्द आकृति होती है।
भ्रामक विकल्प-2		वक्रता (curves) को नहीं देख पाते, या यह नहीं समझते कि आयत के 4 कोने होते हैं और वह 4 सरल रेखाओं से बनता है।
भ्रामक विकल्प-3		सही उत्तर। (इसे न चुनने का कारण यह हो सकता है कि यह देखने में बहुत 'पतला' लगता है, इसलिए आयत जैसा नहीं लगता।)
भ्रामक विकल्प-4		आकृति का आकार और दिशा आयत जैसी लगती है, इसलिए उसे सही मान लेते हैं। वक्रता को देख नहीं पाते या नज़रअन्दाज़ कर देते हैं।

टिप्पणी	विद्यार्थी अक्सर उन आकृतियों को आयत मान लेते हैं जो आयत जैसी 'दिखती' हैं, और कभी-कभी उन खासियतों को नज़रअन्दाज़ कर देते हैं जो किसी आकृति को (गणितीय अर्थ में) आयत बनाती हैं। सम्भव है कि हम भी अनजाने में हमेशा एक ही तरह के आयत दिखाते रहे हों, जिससे उन्हें यह लगने लगता है कि दिशा बदलने पर या बहुत 'पतला' दिखने पर आकृति आयत नहीं होती।
----------------	--

बहु-विकल्पीय प्रश्न-3

विषय : द्विआयामी आकृतियों की पहचान करना (खासतौर पर त्रिभुज की)	कक्षा : 2, 3	<p>अधिगम के प्रतिफल :</p> <ul style="list-style-type: none"> द्विआयामी आकारों को उनके नाम से पहचानते हैं (मसलन वर्ग, आयत, त्रिभुज और वृत्त) और उनकी दिखाई देने वाली विशेषताओं का वर्णन करते हैं। (मसलन पुस्तक के पन्ने आयताकार होते हैं और उनकी 4 भुजाएँ तथा 4 कोने होते हैं।) (कक्षा-2) द्विआयामी आकारों का वर्णन उनकी भुजाओं, कोनों और विकर्णों की संख्या के आधार पर करते हैं। (कक्षा-3)
---	------------------------	---

जाँच का उद्देश्य	त्रिभुज की पहचान करना
प्रश्न	इनमें से कौन-कौन-से त्रिभुज हैं?

	भ्रामक विकल्प	इस विकल्प को चुनने का सम्भावित कारण
भ्रामक विकल्प-1	(2), (4), (6)	ये देखने में सीधे खड़े समबाहु त्रिभुज जैसे लगते हैं।
भ्रामक विकल्प-2	(2), (5), (7)	सही उत्तर। [इन्हें न चुनने का कारण यह हो सकता है कि (5) बहुत 'पतला' लगता है, इसलिए त्रिभुज नहीं लगता, और / या (7) सही दिशा में नहीं है।]
भ्रामक विकल्प-3	(2), (3), (4), (7)	इनकी 3 'भुजाएँ' दिखती हैं। (यह बात छूट जाती है कि त्रिभुज की 3 सीधी भुजाएँ होती हैं और वह एक बन्द आकृति होता है।)
भ्रामक विकल्प-4	(1), (2), (4), (6)	ये देखने में त्रिभुज जैसे लगते हैं, चाहे भुजाओं की संख्या 3 से ज्यादा हो, या आकृति खुली हुई हो।

बहु-विकल्पीय प्रश्न-4		
विषय : दो-अंकीय संख्या का मानक विस्तारित रूप	कक्षा : 2, 3	अधिगम के प्रतिफल : संख्याओं के स्थानीय मान को समझते हुए उन्हें समूह में रखना और पहचानना।
जाँच का उद्देश्य	दो-अंकीय संख्या के विस्तारित रूप की समझ की जाँच करना	
प्रश्न	3 इकाई + 5 दहाई = _____	
	भ्रामक विकल्प	इस विकल्प को चुनने का सम्भावित कारण
भ्रामक विकल्प-1	35	अंकों को उसी क्रम में लिख देना जिसमें वे बोले जाते हैं।
भ्रामक विकल्प-2	53	सही उत्तर।
भ्रामक विकल्प-3	350	3 इकाई = 3 और 5 दहाई = 50। इन्हें इसी क्रम में लिख देने पर 350 बन जाता है (तीन और पचास)।
भ्रामक विकल्प-4	503	3 इकाई = 3 और 5 दहाई = 50। दहाई को पहले लिखने पर 503 बन जाता है (पचास और तीन)।
टिप्पणी	हम अक्सर विस्तारित रूप लिखते समय सबसे बड़े स्थान (मसलन सैकड़ा, फिर दहाई, फिर इकाई) से शुरू करते हैं और बाएँ से दाएँ लिखते हैं। कुछ विद्यार्थी इस बात से एक नियम बना लेते हैं और संख्या बनाते समय सिर्फ बाएँ से दाएँ उसी क्रम में अंक लिख देते हैं, बिना यह समझे कि हर अंक का स्थानीय मान क्या है।	

बहु-विकल्पीय प्रश्न-5		
विषय : हासिल (regrouping) के साथ घटाव	कक्षा : 2	अधिगम के प्रतिफल : दो-अंक वाली संख्याओं के घटाव पर आधारित दैनिक जीवन की स्थितियों को हल करते हैं।
जाँच का उद्देश्य	यह जाँचना कि विद्यार्थी हासिल के साथ घटाव कर पाता है या नहीं	
प्रश्न	$\begin{array}{r} 83 \\ - 67 \\ \hline \end{array}$	
	भ्रामक विकल्प	इस विकल्प को चुनने का सम्भावित कारण
भ्रामक विकल्प-1	26	13 में से 7 घटाकर 6 मिला, और उधार ली गई दहाई को ध्यान में रखे बिना 8 में से 6 घटाकर 2 लिख दिया।
भ्रामक विकल्प-2	24	इकाई वाली जगह पर 7 - 3 और दहाई वाली जगह पर 8 - 6 कर दिया।
भ्रामक विकल्प-3	20	इकाई वाली जगह पर बड़ा अंक छोटे अंक से घट नहीं सकता, इसलिए 0 लिख दिया और दहाई वाली जगह पर 8 - 6 = 2 किया।
भ्रामक विकल्प-4	16	सही उत्तर।
टिप्पणी	जो विद्यार्थी भ्रामक विकल्प-2 चुनते हैं, वे दो अलग-अलग गणनाएँ कर रहे होते हैं और अंकों के क्रम को महत्व नहीं देते ('हमेशा छोटे अंक को बड़े अंक से ही घटाना है' जैसी सोच)। जो विद्यार्थी विकल्प-3 चुनते हैं, वे मानते हैं कि इकाई स्थान पर छोटे अंक में से बड़ा अंक नहीं घटाया जा सकता, इसलिए वहाँ 0 लिख देते हैं और फिर दहाई स्थान पर 8 - 6 करके 2 लिख देते हैं।	

बहु-विकल्पीय प्रश्न-6		
विषय : तीन-अंक वाली संख्या का विस्तारित रूप	कक्षा : 2	अधिगम के प्रतिफल : स्थानीय मान का उपयोग करते हुए 999 तक की संख्याओं को पढ़ते और लिखते हैं।
जाँच का उद्देश्य	यह जाँचना कि विद्यार्थी तीन-अंक वाली संख्या का विस्तारित रूप पहचान पाता है या नहीं	
प्रश्न	461 का विस्तारित रूप क्या है?	
	भ्रामक विकल्प	इस विकल्प को चुनने का सम्भावित कारण
भ्रामक विकल्प-1	4 + 60 + 1	अंकों के क्रम (4, 6 और 1) पर ध्यान देना, स्थानीय मान पर नहीं। या फिर संख्या को 'फ़ोर सिक्स्टी-वन' (four sixty-one) की तरह पढ़ लेना।
भ्रामक विकल्प-2	40 + 6 + 1	461 को 'फ़ोर्टी, सिक्स और वन' की तरह समझ लेना।
भ्रामक विकल्प-3	60 + 1 + 400	सही उत्तर।
भ्रामक विकल्प-4	4 + 1 + 6	461 को केवल 4, 6 और 1 के रूप में देख लेना।
टिप्पणी	यह तीन-अंक वाली संख्या के मानक विस्तारित रूप की समझ जाँचने वाला एक सरल प्रश्न है। इसमें स्थानीय मान, दिखने वाले अंकित मान और स्थान-नाम की अन्तर्निहित समझ शामिल होती है।	

सही प्रकार के प्रश्न पूछकर शिक्षक केवल रटने की आदत जाँचने से आगे बढ़ सकते हैं और विद्यार्थियों में गणितीय अवधारणाओं की गहरी समझ विकसित कर सकते हैं। लेकिन जब हम खुले प्रश्न (गैर-बहु-विकल्पीय प्रश्न [non-MCQs], जिनमें विद्यार्थी अपने शब्दों में उत्तर देते हैं) और सोच-समझकर बनाए गए भ्रामक विकल्पों वाले बहु-विकल्पीय प्रश्न, दोनों को शामिल करते हैं, तो हमें विद्यार्थियों की सोच प्रक्रिया के बारे में अहम जानकारी मिलती है। इससे हम उनकी ग़लत धारणाओं को पहचान सकते हैं और अपनी शिक्षण पद्धति को उनकी अलग-अलग ज़रूरतों के अनुसार बदल सकते हैं। यहाँ हमने खासतौर पर बहु-विकल्पीय प्रश्नों पर चर्चा की है। ऐसे तरीकों से शिक्षक सिखाने का एक ज़्यादा सहायक और प्रभावी माहौल बना पाते हैं। इसमें विद्यार्थी गणित की मज़बूत नींव विकसित कर पाते हैं और समस्याओं को हल करने की अपनी क्षमता पर उनका आत्मविश्वास बढ़ता है।



जो शिक्षक अपनी कक्षा में इनमें से किसी भी प्रश्न को आजमाना चाहते हैं, वे दिए गए क्यूआर कोड को स्कैन करके या उस पर क्लिक करके एक छोटे-से फ़ॉर्म को भर सकते हैं। इससे हम आपको अगले चरणों के बारे में बता सकेंगे, यानी आप इन्हें अपनी कक्षा में कैसे शामिल कर सकते हैं। साथ ही सम्भावित सुधारात्मक शिक्षण गतिविधियों (remediations) के लिए सुझाव भी प्रदान किए जाएँगे।



क्षमा चक्रवर्ती एक एजुकेटर हैं। उन्होंने आईआईटी मद्रास से गणित में स्नातकोत्तर उपाधि और अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी से शिक्षा में स्नातकोत्तर उपाधि प्राप्त की है। गणित शिक्षा के क्षेत्र में 15 से ज़्यादा वर्षों के अनुभव के साथ, उन्होंने विषय-वस्तु निर्माण, शिक्षण, शिक्षक प्रशिक्षण, विद्यार्थी साक्षात्कार लेने और आकलन तैयार करने जैसे क्षेत्रों में काम किया है। नन्हे बच्चों के साथ समय बिताना और प्रकृति का आनन्द लेना उन्हें बेहद पसन्द है। उनसे kshamagc@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : अमेय कान्त **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अतुल अग्रवाल