

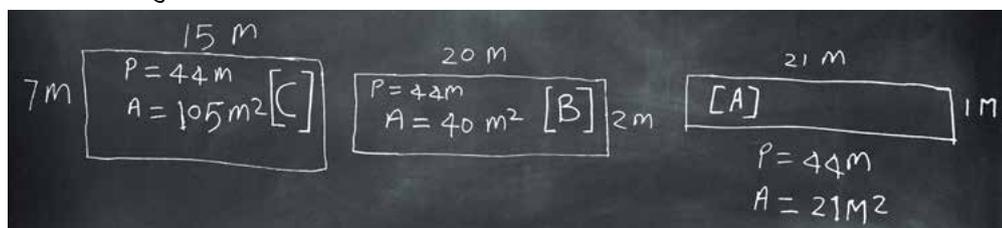
प्रयोग के ज़रिए क्षेत्रफल और परिमाण की खोज : कक्षा और क्लस्टर के अनुभव

करण सिंह

प्राथमिक विद्यालयों में गणित की पढ़ाई-लिखाई को अकसर संख्याओं, नियमों और सूत्रों तक सीमित मान लिया जाता है। लेकिन जब हम सीखे हुए गणित को असल ज़िन्दगी में अपनाते हैं, तो खोज का एक नया संसार खुलने लगता है। यह आलेख इसी खोज-यात्रा का वर्णन करता है, जिसमें शिक्षकों के साथ मिलकर क्षेत्रफल और परिमाण जैसी अवधारणाओं को गहराई से समझने का प्रयास किया गया है। यहाँ मुख्य उद्देश्य परिमाण को स्थिर रखकर क्षेत्रफल में होने वाले बदलावों को परखना और उनके रोचक परिणामों को समझना था। इस प्रयोग में कक्षाओं में की गई चर्चाएँ, गलतियाँ व शिक्षकों का आत्मचिन्तन शामिल है। यह आलेख उत्तराखण्ड स्थित रुद्रप्रयाग ज़िले के चार सरकारी प्राथमिक विद्यालयों व शिक्षकों की क्लस्टर-स्तरीय कार्यशालाओं के अनुभवों पर आधारित है।

विभिन्न आकार-आकृति वाले ज़मीन के टुकड़ों का मापन

इसकी शुरुआत रुद्रप्रयाग ज़िले में प्राथमिक विद्यालयीन शिक्षकों की एक क्लस्टर बैठक में चर्चा से हुई थी। हम कक्षा-5 की एनसीईआरटी की पाठ्यपुस्तक के अध्याय-11 (क्षेत्रफल और घेरा) पर बात-चीत कर रहे थे। मैंने बोर्ड पर 44 मीटर के स्थिर परिमाण वाले कुछ आयत बनाए, जैसा कि चित्र-1 में दिखाया गया है।



चित्र-1

इन आयतों ने तुरन्त सभी का ध्यान खींचा। शिक्षक अलग-अलग भुजाओं वाले आयत बनाने लगे, जैसे 11 गुणा 11, 12 गुणा 10, 14 गुणा 8 आदि। इसके बाद हमने गणनाएँ शुरू कीं :

- $11\text{m} \times 11\text{m}$ (वर्ग) \rightarrow क्षेत्रफल = 121 वर्गमीटर
- $12\text{m} \times 10\text{m}$ \rightarrow क्षेत्रफल = 120 वर्गमीटर
- $14\text{m} \times 8\text{m}$ \rightarrow क्षेत्रफल = 112 वर्गमीटर

मैंने जो आयत बनाए, उन सभी का परिमाण समान था : $2 \times (\text{लम्बाई} + \text{चौड़ाई}) = 44$ मीटर, लेकिन उनके क्षेत्रफल अलग-अलग आए।

फिर हमने चर्चा की कि अगर आयत की चौड़ाई x मीटर घटा दी जाए और लम्बाई उसी अनुपात में x मीटर इस तरह बढ़ा दी जाए कि आयत की परिमाण वही रहे, तो ऐसी स्थिति में क्षेत्रफल पर क्या असर पड़ेगा।

की-वर्ड : प्रासंगिक गणित, बात-चीत, खोज, क्षेत्रफल, परिधि

हमारा अवलोकन : सबसे अधिक क्षेत्रफल तब मिला, जब ज़मीन को वर्गाकार कर दिया गया।

वृत्त का प्रयोग : इसने और भी चौंकाया

अगली क्लस्टर-मीटिंग में एक शिक्षक ने पूछा :

“समान परिमाण वाले आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल सबसे अधिक होता है। यदि हम उसी परिमाण (44 मीटर) की लम्बाई वाली रस्सी से एक वृत्त बनाएँ, तो इसका नतीजा क्या निकलेगा?”

इससे अगला सवाल यह सामने आया :

यदि किसी वृत्त की परिधि (परिमाण) 44 मीटर है, तो उसकी त्रिज्या और क्षेत्रफल क्या होगा?

इसका अनुमान दिखाने के लिए हमने ग्राफ़ पेपर (चित्र-2) का इस्तेमाल किया। इसमें मीटर की जगह सेंटीमीटर कर दिया। सूत्र का उपयोग करके हम इस निष्कर्ष पर पहुँचे :

$$C = 2\pi r$$

$$44 = 2 \times \pi \times r$$

$$r = \frac{44}{2 \times 3.14} \approx 7 \text{ metres}$$

अब प्राप्त r (त्रिज्या) के मान का उपयोग करके वृत्त का क्षेत्रफल (A) निकालते हैं :

$$A = \pi r^2 = 3.14 \times \left(\frac{44}{2 \times 3.14}\right)^2 \approx 3.14 \times 49 \approx 153.86 \text{ m}^2$$

इस तरह वृत्त का क्षेत्रफल लगभग 154 मी² आया, जो वर्ग के क्षेत्रफल (121 मी²) से भी ज़्यादा है।

यह निष्कर्ष सचमुच आँखें खोलने वाला था। आयतों की तुलना में उसी परिमाण से बनाए गए वृत्त का क्षेत्रफल अधिक निकला।

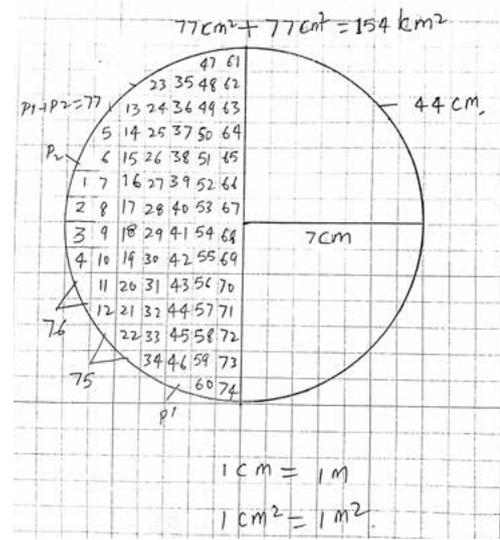
शिक्षकों का आत्मचिन्तन : क्या वृत्त सबसे प्रभावी आकार होता है?

अब हमारे सामने विचार करने के लिए एक नया नज़रिया खुल चुका था। समान लम्बाई की सीमाओं से घिरे सभी प्रकार के आकारों में सबसे अधिक क्षेत्रफल वाली आकृति वृत्त होती है। शिक्षकों ने इन दो बातों पर विचार किया :

- क्या यही वजह है कि पानी की टंकियाँ, प्लेटें और पॉट्स अकसर गोल बनाए जाते हैं? समान ऊँचाई के बावजूद गोलाकार चीज़ों में ज़्यादा जगह होती है, जबकि उनके निर्माण में कम सामग्री का इस्तेमाल करना पड़ता है।
- क्या प्रकृति भी वृत्त के इस गुण का उपयोग करती है? पक्षियों के घोंसले, फल, ग्रह, ये सब अधिकतर गोल क्यों होते हैं? शायद इसलिए कि गोल आकार सबसे अधिक दक्ष होता है।

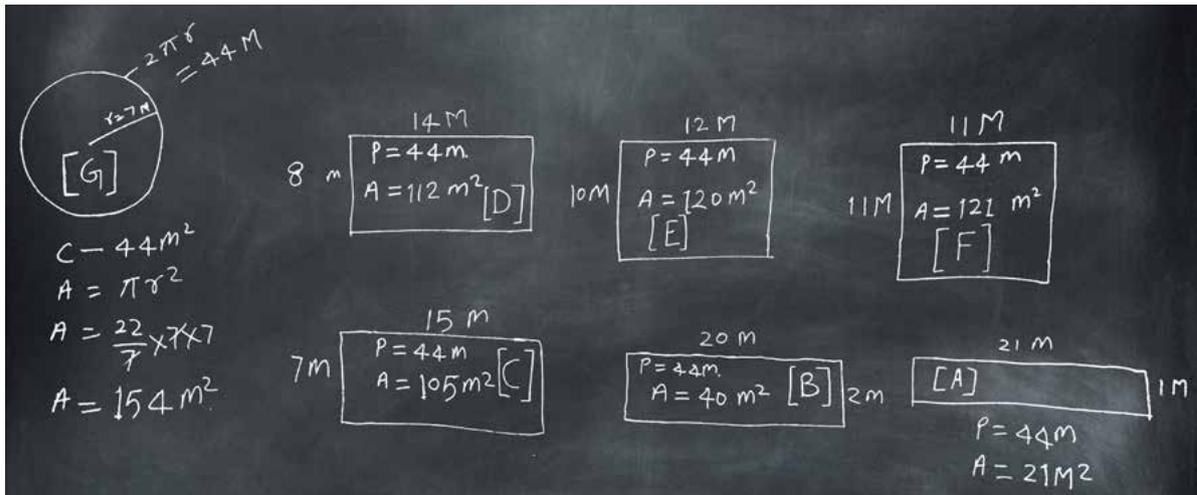
तालिका-1 : सार

आकार	आयाम (मीटर)	क्षेत्रफल (मी ²)
आयत	21 × 1	21
आयत	20 × 2	40
आयत	15 × 7	105
आयत	14 × 8	112
आयत	11 × 11 (वर्ग)	121
वृत्त (r = 7m)	C = 44	154



चित्र-2

यहाँ अलग-अलग आकृतियों के विजुअल डायग्राम दिए गए हैं (इन सभी का परिमाण 44 मीटर है), जिनकी चर्चा इस आलेख में की गई है। इन डायग्राम का इस्तेमाल शिक्षकों के प्रशिक्षण-सत्रों या कक्षाओं में प्रदर्शन के लिए किया जा सकता है।



चित्र-3

इसने कक्षा में कई रोचक चर्चाओं को जन्म दिया। जैसे कृषि भूमि की सुरक्षा व बगीचे की घेराबन्दी कैसे की जाए, घर बनाते समय किन बातों का ध्यान रखा जाए और डिजाइन एवं आर्किटेक्चर में वास्तविक जीवन के गणितीय सिद्धान्तों का उपयोग कैसे किया जाए।

हम इस विचार को कक्षा में लेकर गए

चर्चा से प्रेरित होकर हमने कक्षा-5 के विद्यार्थियों के लिए एक गतिविधि तैयार की। हमने विद्यार्थियों को 44 सेमी लम्बी रस्सियाँ (धागा या सुतली) दीं और उनसे ग्राफ़ पेपर पर विभिन्न आयताकार आकृतियाँ बनाने को कहा।

विद्यार्थी बड़े उत्साहित हुए। उन्हें ऐसा लग रहा था, मानो वे पहेलियाँ हल कर रहे हों। परिणाम वही आए, जो इससे पहले शिक्षकों ने निकाले थे।

एक समूह ने 11 गुणा 11 का वर्ग बनाया, तो दूसरे समूह ने 14 गुणा 8 का आयत। कुछ विद्यार्थियों ने 20 गुणा 2 या 21 गुणा 1 जैसी चरम आयामों वाली आकृतियाँ भी बनाईं।

फिर उन्होंने हर आकृति का क्षेत्रफल निकाला। उन्हें यह जानकर आश्चर्य हुआ कि सभी आकृतियों का परिमाण समान होने के बावजूद वर्ग का क्षेत्रफल सबसे अधिक निकला। एक विद्यार्थी ने कहा :

“सर, जब चारों तरफ़ बराबर हो, तो ज़मीन ज़्यादा मिलती है!”

उस एक वाक्य ने एक गणितीय सत्य को उजागर कर दिया।

एक अन्य कक्षा में एक विद्यार्थी ने कहा, “अगर पेरीमीटर फ़िक्स है, तो सबसे ज़्यादा एरिया गोल शेप देता है!”

रटन्त प्रणाली से तार्किकता की ओर : शिक्षण के तरीकों में बदलाव

इस गतिविधि ने उस परम्परागत तरीके को चुनौती दी, जिसके ज़रिए परिमाण और क्षेत्रफल के बारे में पढ़ाया जाता है। विद्यार्थी आमतौर पर ये सूत्र याद कर लेते हैं :

- क्षेत्रफल = लम्बाई \times चौड़ाई
- परिमाण = $2 \times$ (लम्बाई + चौड़ाई)

लेकिन जब परिमाण को स्थिर रखकर क्षेत्रफल में बदलाव किया गया, जिसमें वृत्त भी शामिल था, तो विद्यार्थी सोचने, परखने और पैटर्नों का अवलोकन करने को विवश हो गए।

शिक्षकों ने गौर किया कि पहले जो विद्यार्थी सूत्र-आधारित पढ़ाई के दौरान सीखने में कठिनाई महसूस करते थे, उन्हें जब सामग्री के इस्तेमाल के साथ तर्क और खोज करने की अनुमति मिली, तो उन्होंने गतिविधियों में सक्रियता से भाग लिया।

इसे नियमित शिक्षण के साथ कैसे जोड़ें?

इस अवधारणा को कक्षा-4 की 'गणित का जादू' पाठ्यपुस्तक के अध्याय-13 'खेत और बाड़' और कक्षा-5 की 'गणित का जादू' पाठ्यपुस्तक के अध्याय-3 'कितने वर्ग' व अध्याय-11 'क्षेत्रफल और घेरा' के साथ व्यावहारिक और रचनात्मक तरीकों से जोड़ा जा सकता है।

- कहानी का सन्दर्भ :** एक किसान के पास बाड़ लगाने के लिए 44 मीटर लम्बी सामग्री है। अधिकतम क्षेत्रफल प्राप्त करने के लिए उसे कौन-सा आकार बनाना चाहिए?
- इस्तेमाल में आने वाली सामग्री :** रस्सी, धागा/सुतली, कागज़ की पट्टियाँ, माचिस की तीलियाँ।
- बनाएँ और मापें :** विद्यार्थियों को अलग-अलग आकृतियाँ बनाने व उनका क्षेत्रफल निकालने दें और उनकी तुलना करवाएँ।
- चर्चा करें :** विद्यार्थियों से इस तरह के खुले (मुक्त उत्तर वाले) सवाल पूछें :
 - आयत के आकार में बदलाव होने पर क्या बदल जाता है?
 - क्या स्थिर रहता है?
 - किस आकार में सबसे ज़्यादा क्षेत्रफल मिलता है?
- विस्तार गतिविधि :** चर्चा में वृत्त को भी शामिल करें। इसे ग्राफ़ पेपर पर धागे वाले परकार से बनवाएँ।

निष्कर्ष

गणित केवल फटाफट करने और एकदम सटीकता से करने का विषय नहीं है। यह **समझ विकसित करने की प्रक्रिया** है। क्षेत्रफल और परिमाण को लेकर शिक्षकों एवं विद्यार्थियों द्वारा की गई इस गतिविधि ने हमें दिखाया कि जब **सीखने की प्रक्रिया खोज-बीन, जिज्ञासा और वास्तविक जीवन के अनुभवों से जुड़ती है, तो गहरी समझ अपने-आप विकसित होती है।**

आयतों से शुरू होकर वर्ग और फिर वृत्त तक की यात्रा ने एक महत्वपूर्ण विचार को स्पष्ट किया :

किसी भी निश्चित परिमाण के साथ सबसे बड़ा क्षेत्रफल वृत्त से मिलता है।

यह केवल एक गणितीय तथ्य भर नहीं है। यह आलोचनात्मक सोच को विकसित करने और प्रकृति की संरचनाओं की सराहना करने का एक शानदार माध्यम भी है। इसी तरह अन्य आकृतियों पर भी प्रयोग किए जा सकते हैं और विद्यार्थी अपने अवलोकन नोट करके इन पर चर्चा कर सकते हैं।



करण सिंह अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन, रुद्रप्रयाग में 11 वर्ष से कार्यरत हैं। वे शासकीय स्कूलों में शिक्षकों के साथ कार्य करते हुए कक्षाओं में शिक्षण-अभ्यास को बेहतर बनाने में सक्रिय हैं।

उससे karan.singh@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : जयजीत अकलेचा **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय