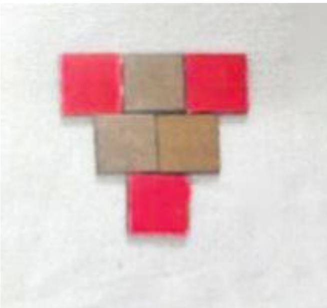
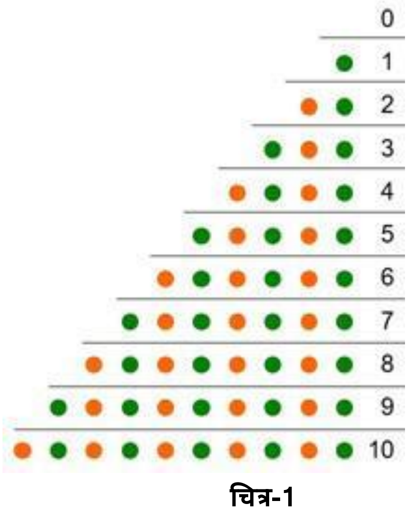
काउंटर्स की समीक्षा

समीक्षक : मैथ स्पेस



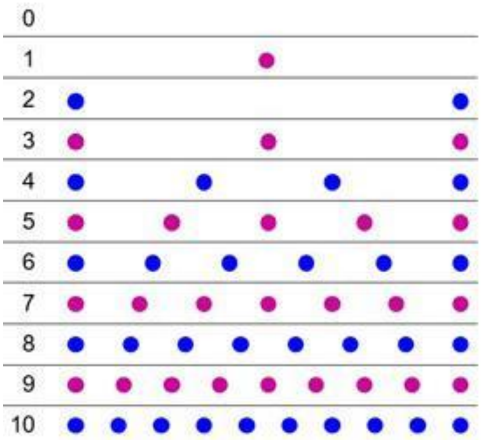
सरल शब्दों में, जिस भी चीज़ को गिना जा सके, उसे **काउंटर (counter)** माना जा सकता है। पत्थर, चाक के टुकड़े, बोतलों के ढक्कन, बीज, बटन - ये सभी परिचित वस्तुएँ हैं जिन्हें काउंटर के रूप में इस्तेमाल किया जा सकता है। कार्डबोर्ड के पर 2 सेमी भुजा वाला वर्गाकार ग्रिड बनाकर और फिर उसे काटकर आसानी से **वर्गाकार काउंटर** बनाए जा सकते हैं। कार्डबोर्ड को काटने के लिए कैंची की तुलना में स्टील कटर बहुत तेज़ी से काम करते हैं। कार्डबोर्ड से **वृत्ताकार काउंटर** बनाना थोड़ा थकाऊ है लेकिन असम्भव नहीं। कैरम की गोटियाँ, बोतलों के ढक्कन (आदर्श रूप से एक ही आकार के), टूथपेस्ट के ढक्कन गोल काउंटर के रूप में बेहतरीन होते हैं। छोटे बच्चों के लिए काउंटर्स को चमकीले रंगों में रंगना उचित रहता है।

काउंटर्स बच्चे को मात्रा (गिनती) और उस मात्रा का प्रतिनिधित्व करने वाले अंक या संख्या के नाम के बीच एक-दूसरे से सम्बन्ध स्थापित करने में मदद कर सकते हैं (**चित्र-1**)। यह वह पहली मैनिपुलेटिव्स सामग्री है जिससे किसी भी बच्चे का परिचय होना चाहिए। काउंटर्स व्यक्ति को मात्रा पर ध्यान केन्द्रित करने में मदद करते हैं, न कि इस बात पर कि वे कितनी जगह में फैले हुए हैं (**चित्र-2**)। मैनिपुलेटिव्स के रूप में, काउंटर्स को हाथों से उठाया जा सकता है (और एक कटोरे या टोकरी में अलग रखा जा सकता है) - और जो गिने जा चुके हैं उन्हें अनगिनों से अलग करना आसान हो जाता है। वास्तव में, यह कहा जा सकता है कि गिनती के पर्याप्त अभ्यास के बिना, बच्चा संख्याओं की मजबूत नींव नहीं बना पाएगा। इसलिए, शुरुआत में काउंटर्स बहुत महत्वपूर्ण हैं।



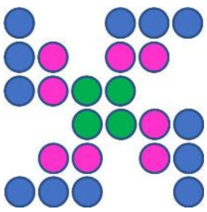
चित्र-1

हालाँकि, काउंटर्स के फ़ायदे केवल गिनती तक ही सीमित नहीं हैं। वे किसी भी **पैटर्न** की पहचान करने में समान रूप से मदद

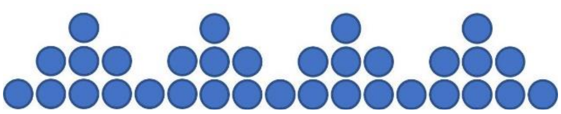


चित्र-2

करते हैं। इसलिए, वे बीजीय सोच (algebraic thinking) और सामान्य रूप से बीजगणित के लिए एक शानदार शुरुआती बिन्दु प्रदान करते हैं। बढ़ते हुए (**चित्र-3**) और दोहराए जाने वाले (**चित्र-4**) पैटर्न बीजीय व्यंजकों और समीकरणों के आस-पास चर्चा शुरू कर सकते हैं।

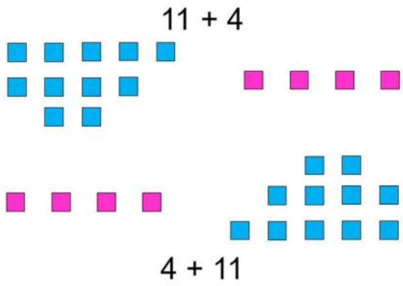


चित्र-3



चित्र-4

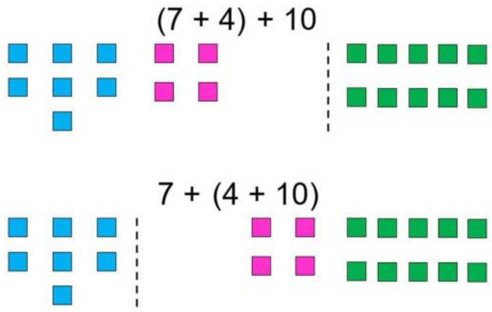
इसके अलावा, वे असतत संख्या सेटों (discrete number sets), जैसे पूर्ण संख्याओं (whole numbers) और पूर्णांकों (integers) के लिए जोड़ और गुणा के गुणों को खूबसूरती से दर्शाते हैं। यहाँ कुछ उदाहरण दिए गए हैं :



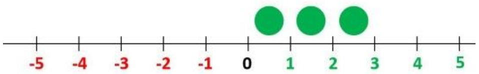
चित्र-5

चित्र-5 दो दृष्टिकोणों से एक ही योग को दर्शाता है, जबकि **चित्र-6** यह स्पष्ट करता है कि चाहे किन्हीं भी दो समूहों को पहले जोड़ा जाए, योग समान रहता है (अधिक विवरण के लिए सन्दर्भ [2] देखें)। **पूर्णांकों** के लिए, चूँकि दो प्रकार की संख्याएँ होती हैं - धनात्मक और ऋणात्मक, हमें दो प्रकार के काउंटर्स की आवश्यकता होती है। मूल रूप से, काउंटर्स की संख्या शून्य से पूर्णांक की दूरी (यानी निरपेक्ष मान/absolute value) को दर्शाती है और रंग (या प्रकार) यह बताता है कि वह शून्य के किस ओर है (यानी चिह्न)। **चित्र-7** और **चित्र-8** क्रमशः 3 और -2 के साथ इसे स्पष्ट करते हैं। **चित्र-5** और **चित्र-6** को ऐसे रंगीन काउंटर्स के साथ पूर्णांकों के लिए भी इसी तरह विस्तारित किया जा

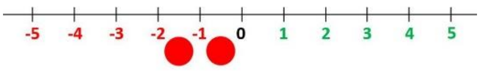
सकता है (विवरण के लिए सन्दर्भ [3] देखें)।



चित्र-6

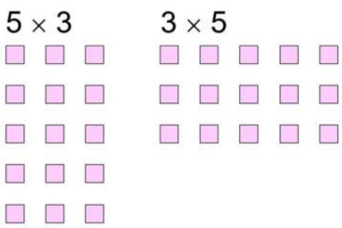


चित्र-7

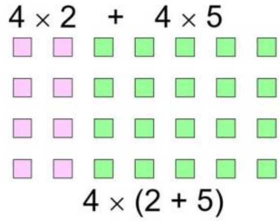


चित्र-8

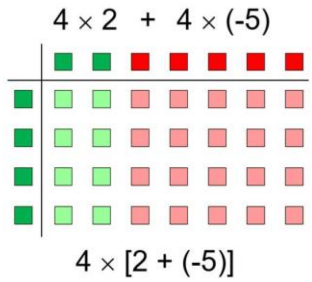
चित्र-9 पूर्ण संख्याओं के लिए गुणा की क्रमविनिमेयता (commutativity) को दर्शाता है। एक ही व्यूह (array) अपनी दिशा बदलने पर दो गुणनफलों को दर्शाता है। दूसरी ओर, **चित्र-10** और **चित्र-11** क्रमशः पूर्ण संख्याओं और पूर्णांकों के लिए वितरण गुण (distributive property) को दिखाते हैं (विवरण के लिए सन्दर्भ [2] और [3] देखें)।



चित्र-9

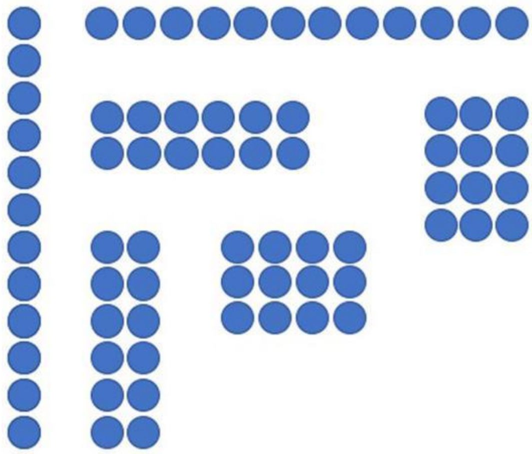


चित्र-10



चित्र-11

वे **गुणनखण्ड (factors)** खोजने, अभाज्य संख्याओं (primes) को परिभाषित करने (जिसमें यह भी शामिल है कि 1 अभाज्य क्यों नहीं है), और वर्ग संख्याओं को समझने में भी मदद करते हैं! **चित्र-12**, 12 काउंटर्स के साथ सभी सम्भव व्यूहों (arrays) को दर्शाता है। ध्यान दें कि प्रत्येक व्यूह में पंक्तियों (या स्तम्भों) की संख्या 12 के एक गुणनखण्ड से मेल खाती है और इस प्रकार सम्भावित व्यूहों की संख्या गुणनखण्डों की संख्या के बराबर होती है।



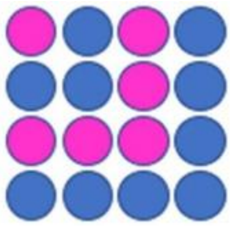
चित्र-12

ध्यान दें कि कैसे वृत्त की सरणियाँ (arrays) खड़े-आड़े के जोड़े में हैं। अगर वृत्त की जगह वर्ग होते तो कैसे होते?

'वर्ग संख्याओं के गुणनखण्डों की संख्या विषम (odd) क्यों होती है' का दूसरा प्रमाण अंकगणित के मूलभूत प्रमेय (Fundamental Theorem of Arithmetic) और बीजगणित का उपयोग करता है (और इसलिए यह बहुत अधिक कठिन है)!

नम्बर	सरणियों की संख्या	नम्बर	सरणियों की संख्या	अवलोकन
1	1	9	3	• **किन** संख्याओं की केवल 2 ही संभव सरणी होती हैं? • **किन** संख्याओं की 2 से अधिक सरणी होती हैं? • **तो,** क्या 1 एक अभाज्य संख्या (prime) है? क्या यह एक संयुक्त संख्या(composite) है? • **किन** संख्याओं की सरणी की संख्या विषम (odd) होती है?
2	2	10	4	
3	2	11	2	
4	3	12	6	
5	2	13	2	
6	4	14	4	
7	2	15	4	
8	4	16	5	

अवलोकन स्तम्भ अवधारणाओं के अमूर्तिकरण (abstraction) के मार्ग को सुगम बनाता है क्योंकि विद्यार्थी अपनी सोच को चित्रमय प्रस्तुतिकरण और फिर मानसिक छवियों तक विस्तारित करना शुरू करते हैं।

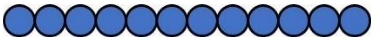


चित्र-13

इसके अतिरिक्त, काउंटर्स प्राकृत संख्याओं से जुड़े परिणामों के लिए **'बिना शब्दों के प्रमाण' [Proofs Without Words (PWW)]** तैयार करने के लिए बेहतरीन हैं। एक संसाधन समूह ने वास्तव में गॉस (Gauss) की प्राकृत संख्याओं के योग की प्रसिद्ध बचपन की खोज का एक मॉडल बनाया है! **चित्र-13** विषम संख्याओं की शृंखला को एक वर्ग में जुड़ते हुए दिखाता है। वास्तव में, काउंटर्स का उपयोग करके प्राकृत संख्याओं से जुड़े हर परिणाम के लिए PWW बनाना सम्भव होना चाहिए।

जब हम गणित के ऐसे उच्च और रोमांचक स्तरों पर जाते हैं, तो यह तब मददगार होता है जब काउंटर्स एक जैसे हों। दो लोकप्रिय आकार हैं - वृत्ताकार और वर्गाकार - जिनमें से प्रत्येक के अपने फ़ायदे और नुकसान हैं।

	वृत्त	**वर्ग**
फ़ायदा	सबसे सममित (symmetric) आकार ∴ अभिविन्यास (orientation) से स्वतंत्र ⇒ बहुत छोटे बच्चों के लिए सबसे अच्छा ⇒ पैटर्न बनाने के लिए सबसे अच्छा क्योंकि यह अधिकतम स्वतंत्रता देता है। इसके अलावा, जब इन्हें एक कतार में लगाया जाता है, तो वर्गाकार काउंटरों की तुलना में इन्हें गिनना आसान होता है क्योंकि काउंटरों के बीच खाली जगह होती है।	एक नियमित आकार जो टाइल की तरह जुड़ सकता है ∴ वर्ग ग्रिड पर आधारित कुछ भी बनाने के लिए बेहतरीन, जैसे : पॉलियोमिनो (polyominoes) क्षेत्रफल की इकाई (Unit of area) ∴ क्षेत्रफल और परिमाप (perimeter) को समझने के लिए बेहतरीन ⇒ जब इन्हें एक कतार में लगाया जाता है, तो ये एक आयत (rectangle) बनाते हैं जिसका क्षेत्रफल उसकी लम्बाई के समानुपाती (proportionate) होता है ∴ इसे लम्बाई के रूप में सामान्यीकृत (generalized) किया जा सकता है
नुकसान	टाइल की तरह नहीं जुड़ता।	जब इन्हें एक रेखा में व्यवस्थित करके आयत बनाया जाता है, तो इन्हें गिनना कठिन हो सकता है जब तक कि इनकी

		सीमाएँ (borders) स्पष्ट न हों। जब तक इन्हें ठीक से व्यवस्थित न किया जाए, ये सुन्दर या साफ़-सुथरे नहीं दिख सकते। वृत्तों की तुलना में कम सममिति (symmetry)। ∴ यदि वृत्ताकार टाइलों के बजाय वर्गाकार टाइलों का उपयोग किया जाता है, तो कुछ विशेष सममिति स्पष्ट नहीं होती है।
चित्र		

सन्दर्भ :

[1] अनुवाद सम्पदा पर लिंक *पुलआउट : गुणा* *एट राइट एंगल्स* (मार्च 2014)
[2] अनुवाद सम्पदा पर लिंक *पूर्ण संख्या और भिन्नों के साथ जोड़ के गुणधर्मों की खोज*, *एट राइट एंगल्स* (जुलाई 2018)
[3] अनुवाद सम्पदा पर लिंक *पूर्णांकों के साथ योग और गुणन के गुणधर्मों की पड़ताल* *एट राइट एंगल्स* (जुलाई 2019)
[4] Nelson, Roger B: *Proof Without Words* (Volume 1)

मैथ स्पेस, अजीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी में एक गणित प्रयोगशाला है जो स्कूलों, शिक्षकों, अभिभावकों, बच्चों, स्कूली शिक्षा में काम कर रहे गैर-सरकारी संगठनों और शिक्षक प्रशिक्षकों को सेवा प्रदान करती है। यह गणित के लिए विभिन्न शिक्षण-अधिगम सामग्री **[mat(h)erials]** - उनके दायरे के साथ-साथ कबाड़ से बनाए जा सकने वाले कम लागत वाले संस्करणों की सम्भावना का पता लगाती है। यह उन लोगों को सम्बोधित करने की कोशिश करती है जो गणित से डरते हैं या नफ़रत करते हैं, साथ ही उन लोगों को भी जो इसके साथ जुड़ना पसन्द करते हैं। यह एक ऐसा स्थान है जहाँ कई लोगों के साथ बातचीत के कारण विचार उत्पन्न होते हैं और विकसित होते हैं। मैथ स्पेस से **mathspace@apu.edu.in** पर सम्पर्क किया जा सकता है।

यह एट राइट एंगल्स के नवम्बर, 2021 अंक में प्रकाशित Review: Counters लेख का अनुवाद है। **अनुवाद :** गूगल जैमिनी **सम्पादन** : राजेश उत्साही