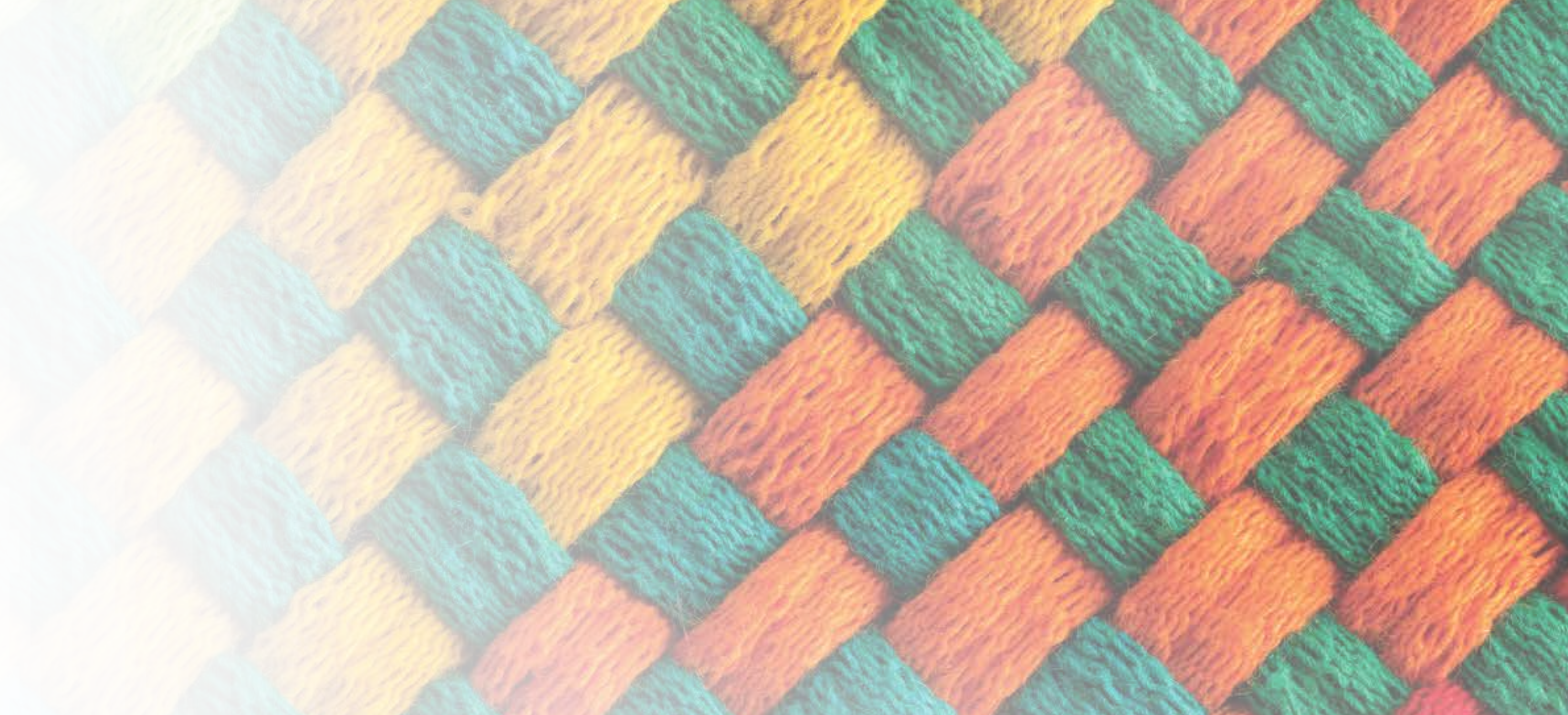
अंक 22 | जुलाई 2025
चौ-मासिक | बेंगलूरु
अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी का प्रकाशन

Azim Premji University

# अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी
# एट राइट एंगल्स

स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

## कक्षा के जीवन में गणित की बुनाई



**मेरे जीवन में थोड़ा-सा पैटर्न**
**मेरे साथ थोड़े-से टीएलएम,**
**मुझे ज़रूरत थोड़ा बुनने की**
**मेरी चाहत थोड़े मज़े की,**
**दिन में हैं थोड़े-से प्रसंग**
**रात को देखूँ थोड़े स्वप्न,**
**मैं हाज़िर हूँ, चलो थोड़ा पढ़ें**
**थोड़ा अपनी कक्षा में करें!**

पैटर्न, संख्याएँ, स्थानिक सम्बन्ध... दुनिया भर के शिक्षकों ने गणित को बच्चों के सन्दर्भ में इस ख़ूबसूरती से बुना है कि गणित के पाठ उनमें तर्क, तार्किक सोच बना सकें, वे संवाद कर सकें और उन्हें गणित में आनन्द आ सके। शायद ऐसा हमेशा नहीं होता, लेकिन हर शिक्षक इसे एक ऐसी सुन्दर छतरी बनाना चाहता है जो बच्चों को जीवन भर सिखाए।

**अनुवाद :** प्रतिका गुप्ता

# सम्पादक
# की ओर से...

प्रिय पाठको,

जुलाई अंक हाज़िर है...। उधर उत्तर में गर्मी विदा हो रही है, इधर दक्षिण में मानसून दस्तक दे रहा है। पूरे भारत में यह समय शिल्प और चिन्तन के लिए एक आदर्श समय लगता है। बुनाई की जो मानक परिभाषा है उसमें दो प्रकार के धागों का उपयोग होता है – ताना और बाना। गणित के शिक्षक और पढ़ाई जाने वाली विषयवस्तु क्या ये दो धागे (ताना-बाना) बन सकते हैं? इस अंक के लेख सुन्दर गणित और उसके उपयुक्त शिक्षाशास्त्र के पैटर्न बुनते हैं – आप इन्हें विशेष से लेकर पुलआउट तक सभी खण्ड में देखेंगे।

क्या एक ही मॉडल उन सभी सन्दर्भों के लिए ठीक है जहाँ भिन्न का उपयोग किया जाता है? क्या हमें भिन्न को देखने का नज़रिया बदलना चाहिए? नारायण मेहर इस अंक के विशेष खण्ड में *भिन्नों के मायने एवं व्याख्या* लेख के माध्यम से इस पर बात करते हैं। इसमें पाठ्यपुस्तकों से उदाहरण लेकर भिन्न के विभिन्न निर्माणों का वर्णन करते हैं। साथ ही इस पर विचार करते हैं कि पाठ योजनाएँ बनाते समय और आकलन तैयार करते समय शिक्षकों को इन निर्माणों को क्यों समझना चाहिए।

खण्ड कक्षा में, आकांक्षा और गरिमा ने आकार-आकृतियों के विषय पर आधारित अपनी पाठ योजनाओं के बारे में बताया है। क्या होता है जब विद्यार्थी खोज करते हैं, सवाल उठाते हैं और शिक्षक उन्हें सीखने की प्रक्रिया का नेतृत्व करने की स्वतंत्रता देते हैं? उनका अनुभव आपको इस दिशा में काम करने के लिए प्रेरित करेगा। ज़मीनी और प्रासंगिक उदाहरणों तथा सरल अभ्यासों के माध्यम से, अनुष्का अलग-अलग तरह के *एल्गोरिदम* को समझाती हैं। विद्यार्थी निधि, अश्वत और व्यान ने अपनी डेटा *संग्रहण गतिविधि* का वर्णन किया है, जिससे उन्हें गणित शिक्षक द्वारा दिए गए एक प्रश्न को हल करने में मदद मिली।

बच्चे हर जगह गणित को देख सकते हैं – चाहे वे बस यात्रा पर हों, नृत्य कर रहे हों, या समस्याओं को हल करने के शॉर्टकट खोज रहे हों। जब वे सोचना और अपने निष्कर्षों को दर्ज करना सीखते हैं, तो वे गणित का मज़ा खण्ड को समृद्ध करते हैं। क्षमा चक्रवर्ती ने *श्री फ़ायरफ़ाइटर* कहानी की समीक्षा की है। ऐसी कहानियों के ज़रिए शिक्षक सीख सकते हैं कि वे कैसे अपने विद्यार्थियों को यह समझाएँ कि जब आप अपनी शर्ट के बटन लगा रहे होते हैं, तब भी आपको आकार, माप और संख्या के बारे में सोचना ही होता है!

और अन्त में, पुलआउट की बात! कक्षा के दौरान गणित को बुनने की बारीक़ियाँ – यह सिर्फ़ एक सुन्दर विचार नहीं है, बल्कि हम आपको वास्तव में यह करने का तरीक़ा बता रहे हैं! इस सुन्दर विचार के साथ पाठ तैयार करने का आनन्द लें!

हालाँकि ये सभी रोचक विचार आपको लेखों से जोड़े रख सकते हैं, फिर भी एक नज़र पिछले कवर पर ज़रूर डालें। यहाँ हमने भारत के विभिन्न क्षेत्रों में विकसित बुनाई शैलियों को प्रस्तुत किया है। क्या विविधता है! और क्या प्रतिभा है! हम इन शिल्पकारों को प्रोत्साहित करने और इस सामंजस्यपूर्ण सम्पूर्णता को बनाए रखने के लिए क्या कर सकते हैं?

**स्नेहा टाइटस**
मुख्य सम्पादक
AtRightAngles.editor@apu.edu.in

**अनुवाद :** भरत त्रिपाठी **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

**सम्पादकीय कार्यालय**
अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी,
सर्वे नम्बर 66, बुरुगुंटे विलेज, बिक्कनाहल्ली मेन रोड,
सरजापुरा, बेंगलूरु, कर्नाटक - 562 125
ई-मेल : publications@apu.edu.in
वेबसाइट : www.azimpremjiuniversity.edu.in

**डिज़ाइन**
जिंक एंड ब्रोकोली
बेंगलूरु, कर्नाटक

**हिन्दी अंक लेआउट एवं मुद्रक**
आदर्श प्रा.लि., भोपाल, मध्य प्रदेश


***एट राइट एंगल्स*** अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी का प्रकाशन है, जो स्कूली शिक्षकों के लिए गुणवत्तापूर्ण गणित शिक्षण संसाधन प्रदान करता है। इसका उद्देश्य न केवल कक्षाओं के भीतर, बल्कि स्कूली प्रक्रियाओं के व्यापक सन्दर्भ में भी, अधिक अनुभवात्मक और सार्थक शिक्षण-अधिगम प्रक्रियाओं को सुगम बनाना है। उद्देश्यपूर्ण और उत्साहपूर्ण शिक्षण के लिए, एट राइट एंगल्स भारत और उसके विविध समुदायों की वास्तविकताओं पर आधारित व्यावहारिक अन्तर्दृष्टि प्रस्तुत करता है।


***एट राइट एंगल्स*** *अंक 22, जुलाई 2025 का यह* ***हिन्दी अनुवाद*** *सितम्बर, 2025 में प्रकाशित हुआ है।*

# अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी एट राइट एंगल्स

स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

Azim Premji University

A Publication of Azim Premji University

## विशेष



## कक्षा में



## गणित का मज़ा



## समीक्षा



## पुलआउट



# भिन्नों के मायने एवं व्याख्या

नारायण मेहर

**इस लेख का उद्देश्य पाठकों को भिन्नों के विभिन्न मायने व निहित अर्थों को समझने में मदद करना है। इससे शिक्षक को शाला के प्रारम्भिक स्तर पर भिन्न की विभिन्न विशिष्ट अवधारणाओं को सिखाने, समझाने के तरीक़ों (pedagogical content knowledge) को समझने में मदद मिलेगी। उन्हें यह लेख विद्यार्थियों को पूर्ण संख्या से भिन्न की अवधारणा तक पहुँचाने में मदद करेगा।**

भिन्न एक समृद्ध गणितीय अवधारणा है जिसका परिचय विद्यालय के शुरुआती दौर में ही दिया जाता है। भिन्न की अभिव्यक्ति द्वि-स्तरीय संख्यात्मक अभिव्यक्ति होती है जो कि पूर्ण संख्याओं से अधिक जटिल होती है। इसलिए भिन्न समझना पूर्ण संख्याओं को समझने से अधिक जटिल है। भिन्न समझाने के लिए उचित सन्दर्भ में सार्थक परिचय देने की ज़रूरत होती है। जब शिक्षक ऐसा किए बिना भिन्नों का परिचय देते हैं, तो यह विषय उन विद्यार्थियों के लिए बोझिल बन जाता है जिन्हें इस अवधारणा की गहरी समझ नहीं होती। भिन्नों को रटवाकर पढ़ाने से विद्यार्थियों को अगली कक्षाओं में और भी समस्याएँ होती हैं।

आमतौर पर एक शुरुआती कक्षा में भिन्न की अवधारणा का परिचय इस प्रकार से दिया जाता है : *भिन्नों को $\frac{a}{b}$ के रूप में व्यक्त किया जाता है। यहाँ $a$ और $b$ दोनों पूर्ण संख्याएँ हैं। $a$ को भिन्न का अंश और $b$ को भिन्न का हर कहा जाता है। हर का मतलब है जितने बराबर भागों में पूर्ण को बाँटा गया है, और अंश का मतलब है जितने बराबर भागों को चुना गया है। (हर में 0 को छोड़कर बाक़ी पूर्ण संख्याएँ होती हैं।)* उदाहरण के लिए, $\frac{1}{4}$ रोटी का मतलब है उस रोटी का एक *टुकड़ा जिसे 4 बराबर टुकड़ों में तोड़ा गया है – $\frac{1}{4}$ भाग 1 टुकड़े को दर्शाता है। $\frac{1}{4}$ प्रत्येक टुकड़े की माप भी है। इसी प्रकार, $\frac{3}{4}$ एक ही रोटी से लिए गए 3 ऐसे टुकड़े हैं जिनका हर टुकड़ा $\frac{1}{4}$ रोटी के बराबर है। यानी $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ आकार के 3 टुकड़ों को दर्शाता है। जब अंश 1 के बराबर होता है (या एक भाग चुना जाता है), हम इसे इकाई भिन्न कहते हैं, और जब अंश 1 से अधिक होता है, उसे ग़ैर-इकाई भिन्न कहते हैं।*

*मुख्य रूप से तीन प्रकार की भिन्न होती हैं :*

*क) अंश < हर (जैसे, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{7}$ आदि) अंश और हर की परिभाषा से स्पष्ट है कि ऐसी भिन्न एक पूरे या 1 से छोटी होती हैं। इन्हें उचित भिन्न कहते हैं।*

*ख) अंश > हर (जैसे, $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{7}{3}$ आदि)*

*इन भिन्नों का मान 1 से अधिक होता है। उदाहरण के लिए, $\frac{5}{4}$ का अर्थ है कि एक पूरी चीज़ को चौथाई (या 4 बराबर भागों) में विभाजित किया गया है, और ऐसे 5 भाग चुने गए हैं। यह स्पष्ट है कि ऐसे 4 भागों को चुनने पर एक पूरा या 1 बनता है, और हमने एक और $\frac{1}{4}$ चुना है। ऐसी भिन्नों को, जो कि पूरे से बड़ी होती हैं, अनुचित या विषम भिन्न कहते हैं।*

*ग) अंश = हर (जैसे, $\frac{5}{5}$, $\frac{7}{7}$ आदि) इस भिन्न का मान एक के बराबर होता है।*

हैरानी की बात है! कोई आश्चर्य नहीं है कि विद्यार्थियों को भी यही लगता है...

## पूर्ण संख्याओं की तुलना में भिन्नों से सम्बन्धित अवधारणात्मक कठिनाइयाँ

### 1. भिन्न का लिखित रूप (सांकेतिक अभिव्यक्ति)

भिन्न को हमेशा दो पूर्ण (या प्राकृत धनात्मक संख्याएँ, जो गिनने वाली संख्याएँ भी कहलाती हैं – हर के रूप में शून्य को

*की-वर्ड :* *प्राथमिक गणित, भिन्न, अवधारणात्मक समझ, दृश्यीकरण*

छोड़कर 1, 2, 3,...) संख्याओं का उपयोग करके लिखा जाता है। लेकिन भिन्न का मात्रात्मक अर्थ उसके अंश और हर में लिखी गई पूर्ण या प्राकृत संख्याओं की मात्रा से बहुत अलग होता है। उदाहरण के लिए, भिन्न $\frac{2}{5}$ का अर्थ 2 या 5 या 2 और 5 के बीच की कोई संख्या नहीं है। $\frac{5}{2}$ भी $\frac{2}{5}$ से अलग है।

विद्यार्थियों को भिन्न के सांकेतिक प्रारूप और उसके मायने को समझने में दिक़्क़त आती है। इसलिए अलग-अलग और अर्थपूर्ण सन्दर्भों द्वारा विद्यार्थियों को भिन्नों से परिचित कराने के लिए काफ़ी समय लगाने की ज़रूरत है।

**2. नई शब्दावली**

अंश, हर, इकाई भिन्न, ग़ैर-इकाई भिन्न, उचित भिन्न और अनुचित (या विषम) भिन्न जैसी नई शब्दावली पर बहुत जल्दी ज़ोर दिया जाता है। इससे सिखाने की प्रक्रिया और आकलन दोनों में अर्थ के बजाय शब्दावली पर ध्यान केन्द्रित हो जाता है। इससे विद्यार्थी भिन्न के वास्तविक मायने से भटक जाते हैं।

**3. भिन्नों की तुलना और क्रम**

पूर्ण / प्राकृत संख्याओं की तुलना में भिन्नों की तुलना और क्रम अधिक जटिल और कठिन होता है। 8, 2 से बड़ा है। लेकिन $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ से बड़ा है। इससे विद्यार्थियों को काफ़ी भ्रम होता है, ख़ासकर तब जब उन्हें यह नहीं समझाया जाता कि $\frac{1}{2}$ कैसे $\frac{1}{8}$ से बड़ा है। आप इसे चित्र से ज़्यादा अच्छे से समझा सकते हैं।

दो क्रमागत पूर्ण / प्राकृत संख्याओं के बीच कोई और प्राकृत संख्या नहीं होती, लेकिन दो असमान भिन्न संख्याओं के बीच कई भिन्न होती हैं। इसलिए उन्हें क्रम देना कठिन हो जाता है। ग़ैर-इकाई वाली ऐसी भिन्नों की तुलना जिनके हर अलग हों, और भी जटिल और कठिन होती है। इनकी तुलना लघुत्तम समापवर्तक के बिना नहीं की जा सकती।

**4. भिन्नों पर संक्रियाएँ**

प्राकृत संख्याओं को जोड़ने और घटाने की संक्रिया में, इकाइयों को इकाइयों में जोड़ा या घटाया जाता है, दहाई को दहाई में जोड़ा या घटाया जाता है। उदाहरण के लिए, 35 + 54 = 89 (4 इकाइयों में 5 इकाइयाँ जोड़ी जाती हैं और 5 दहाई में 3 दहाई जोड़ी जाती हैं) जब इकाई का जोड़ दस से अधिक हो जाता है, प्राप्त दहाई संख्या को दहाई में जोड़ा जाता है।

लेकिन भिन्नों में, अंशों को अंशों से जोड़ा या घटाया नहीं जाता है और हर को हर से जोड़ा या घटाया नहीं जाता। उदाहरण के लिए, $\frac{1}{3} + \frac{3}{5} \neq \frac{4}{8}$ ।

(सिर्फ़ जब समान हर की भिन्न को जोड़ा या घटाया जाता है तब अंश और अंश को जोड़ा या घटाया जाता है और हर वही रहता है। जैसे $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$ और $\frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$)

लेकिन दिलचस्प बात यह है कि गुणा में, अंश का अंश से और हर का हर से गुणा किया जाता है।

भिन्नों में भाग देना तो और भी अधिक जटिल है। भाजक के अंश और हर को परस्पर बदलकर, उसे भाज्य के साथ गुणा किया जाता है। इन नियमों पर ध्यान केन्द्रित करने से विद्यार्थी एल्गोरिदम की भूलभुलैयाँ में भटक जाते हैं, और एल्गोरिदम सीखना अपने-आप में एक लक्ष्य बन जाता है।

मैं इस लेख में, भिन्नों के विभिन्न अर्थों और व्याख्याओं पर चर्चा करूँगा। इससे परिचित होने से शिक्षक को अपनी शिक्षण प्रक्रिया को एल्गोरिदम को याद करवाने और उपयोग करने के लिए कहने की बजाय समझ बनाने और विवेकशीलता पर केन्द्रित करने में मदद मिलेगी।

## भिन्न के विभिन्न अर्थ : उदाहरणों और दृष्टान्तों सहित

बेहर, हारेल, पोस्ट, लेश [1], कीरेन [3] और लैमन [4] बताते हैं कि भिन्नों के कई अर्थ और व्याख्याएँ होती हैं। उन्होंने भिन्नों के पाँच अलग-अलग मायनों और व्याख्याओं [2] की पहचान की है। ये नीचे दी गई हैं।

1. एक पूरी चीज़ के भाग के रूप में भिन्न या सेट (समुच्चय / समूह) के भाग के रूप में भिन्न
2. माप के रूप में भिन्न
3. विभाजन के परिणाम या प्रतिफल के रूप में भिन्न
4. अनुपात के रूप में भिन्न
5. संक्रियक (operator) के रूप में भिन्न

सोचने में ये काफ़ी अद्भुत लगता है कि एक ही भिन्न का, इनमें से कोई भी अर्थ हो सकता है। जब किसी भिन्न को बिना किसी सन्दर्भ के प्रतीकात्मक रूप से विद्यार्थियों के सामने प्रस्तुत किया जाता है, उन्हें यह समझ पाना मुश्किल हो जाता है कि उसका वास्तविक अर्थ क्या है। जब विद्यार्थियों को भिन्नों को इन विभिन्न दृष्टिकोणों से और सन्दर्भों में देखने के लिए मार्गदर्शन दिया जाता है, वे विभिन्न स्थितियों और समस्याओं का अर्थ निकाल पाते हैं। भिन्नों के साथ उनकी समझ और संक्रियाएँ तार्किक और विवेकशील हो जाती हैं।

विद्यार्थियों को भिन्नों का परिचय देने से पहले, किसी शिक्षक

को भिन्नों के विभिन्न अर्थों को जान लेना चाहिए, साथ ही प्रारम्भिक विद्यालय के विद्यार्थियों में भिन्न की समझ विकसित होने के तरीक़ों से भी। हम भिन्नों के पाँचों अर्थों पर एक-एक करके चर्चा करेंगे।

### 1. पूर्ण के भाग या सेट के भाग के रूप में भिन्न

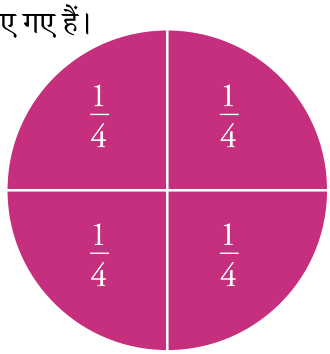
भिन्न का परिचित और सामान्य अर्थ तथा व्याख्या अंश-पूर्ण (या पूरे का एक हिस्सा) मॉडल है। यह अर्थ आमतौर पर विद्यार्थियों द्वारा विद्यालय आने से पहले ही अनुभव किया जाता है। बच्चे रोटी, चॉकलेट, चिए, कंचे, लड्डू आदि अपने भाई-बहनों या दोस्तों के बीच बराबर बाँटने के आदी होते हैं। अंश और पूर्ण के बीच का सम्बन्ध भिन्न के अंश-पूर्ण मॉडल का प्रतिनिधित्व करता है। पूर्ण या पूरा दो प्रकार के होते हैं :

#### क. सतत पूर्ण होना

सतत पूर्ण का एक उदाहरण रोटी है। यह भिन्न की एक सरल और सबसे बुनियादी समझ है जिसका परिचय भिन्नों को पढ़ाने के शुरुआती चरण में दिया जाता है। उदाहरण के लिए, यदि एक रोटी चार लोगों के बीच समान रूप से बाँटी जाती है तो प्रत्येक व्यक्ति को रोटी का एक-चौथाई हिस्सा मिलेगा। यह एक अंश का उसके पूरे के साथ सम्बन्ध दर्शाता है। चूँकि प्रत्येक व्यक्ति को रोटी के 4 बराबर भागों में से 1 मिलता है, इसलिए उन्हें रोटी का ($\frac{1}{4}$) हिस्सा मिलता है। यह एक इकाई भिन्न है। इस व्याख्या का अर्थ है कि हम रोटी के 'n' बराबर भागों में से 1 भाग चुन रहे हैं। इसे पूरे के $\frac{1}{n}$ भाग (पूरे के nवें भाग के रूप में पढ़ें) द्वारा दर्शाया जाता है।

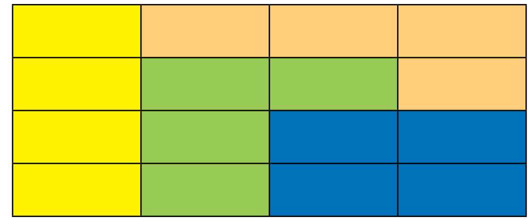
अंश-पूर्ण सम्बन्ध का अर्थ यह नहीं है कि हमेशा प्रत्येक टुकड़ा दूसरे टुकड़े के हूबहू दिखेगा या सर्वांगसम होगा। हम हिस्सों के कुछ अन्य पहलुओं की तुलना कर सकते हैं, जैसे कि टुकड़ों का क्षेत्रफल या आयतन। हो सकता है कि टुकड़े सर्वांगसम आकार के न हों, लेकिन उनका क्षेत्रफल या आयतन बराबर हो [2]।

चित्र नीचे दिए गए हैं।




चित्र-1

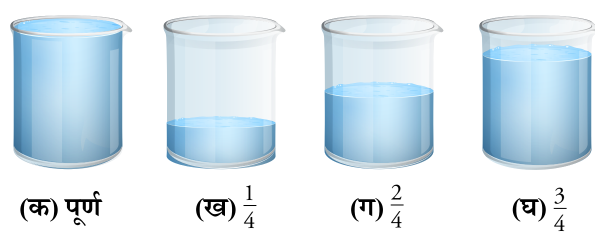
**चित्र-1** में, प्रत्येक इकाई टुकड़ा, $\frac{1}{4}$ अन्य इकाइयों के हूबहू और बराबर (सर्वांगसम) है।



चित्र-2

**चित्र-2** में, बड़े आयत को 4 बराबर भागों में विभाजित किया गया है। उन्हें चार अलग-अलग रंगों से छायांकित किया गया है। प्रत्येक इकाई टुकड़ा (उदाहरण के लिए, पीला) अन्य इकाई टुकड़ों (हरा, हल्का लाल और नीला रंग) की तरह नहीं दिखता, लेकिन क्षेत्रफल में उनके बराबर है – उनमें से प्रत्येक बड़े आयत का $\frac{1}{4}$ हिस्सा है।

**चित्र-3** में, बीकर **क** पानी से भरा है और पूर्ण को दर्शाता है। बीकर **ख, ग, घ**, बीकर **क** में मौजूद पानी के आयतन का क्रमशः $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ और $\frac{3}{4}$ भाग दर्शाते हैं।




चित्र-3

#### ख. असतत पूर्ण होना

दूसरे प्रकार का पूर्ण वह है जिसका उपयोग हम अपने दैनिक जीवन में अकसर करते हैं – हम कई चीज़ों का आधा, एक-तिहाई या एक-चौथाई भाग बनाते हैं, जैसे अण्डों, फलों के ढेर, विद्यार्थियों के समूह आदि। यह संग्रह एक सेट है, और हम उस सेट का एक हिस्सा लेते हैं। सेट के हिस्से का मतलब यह है कि प्रत्येक हिस्से में सुनिश्चित होगा कि उसमें वस्तुओं या व्यक्तियों की संख्या बराबर होगी। मैं आपको हिन्दी फ़िल्म 'शोले' का एक प्रसिद्ध दृश्य याद दिलाना चाहूँगा। मार्च करते हुए जेलर असरानी पहरेदारों से कहते हैं (दाएँ हाथ का इशारा करते हुए) आधे इधर जाओ, (बाएँ हाथ का इशारा) आधे इधर जाओ, और बाक़ी मेरे पीछे आओ! इस भिन्न का अर्थ एक सेट (पहरेदारों) का एक भाग है। मज़ाकिया अन्दाज़ में कह सकते हैं कि शायद असरानी को भिन्नों की अच्छी समझ नहीं थी, तभी उनके साथ आने के लिए कोई बचता नहीं! लेकिन, आधा एक सेट का कोई

हिस्सा होता है, शायद वे यह समझते थे – उन्हें भिन्न के अर्थ का कुछ तो बोध था।

इस पूर्ण के सेट को या तो एक पंक्ति या सारणी के रूप में व्यवस्थित किया जा सकता है या अव्यवस्थित छोड़ा जा सकता है। नीचे दिया गया चित्र एक सारणी में व्यवस्थित सेट का एक उदाहरण है।

**चित्र-4** में 12 अण्डे हैं। $\frac{1}{2}$ अण्डे एक पंक्ति में हैं। लेकिन $\frac{1}{6}$ अण्डे एक कॉलम में हैं।

**चित्र-4**

**2. माप के रूप में भिन्न**

भिन्न का यह अर्थ माप से सम्बन्धित है। उदाहरण के लिए, 124 मीटर लम्बी एक रस्सी को 5 बराबर भागों में काटा जाता है। 120 मीटर को आसानी से 5 बराबर भागों में विभाजित किया जा सकता है। इनमें प्रत्येक की लम्बाई 24 मीटर है, 4 मीटर शेष बचेगा। बचे 4 मीटर को 400 सेमी में परिवर्तित करके 5 बराबर भागों में विभाजित किया जा सकता है। इससे प्रत्येक भाग 80 सेमी लम्बा होगा। इस प्रकार, 124 मीटर को पाँच भागों में बाँटने पर प्रत्येक भाग 24 मीटर और 80 सेमी का होगा। इस तरह हम लम्बाई, भार और आयतन को तब तक उनकी छोटी इकाइयों में परिवर्तित करके बाँटते जाते हैं जब तक अन्तिम मात्रा प्राप्त नहीं हो जाती। इसे भिन्न $\frac{124}{5}$ मीटर के रूप में लिखा जा सकता है। यह भिन्न के विभाजन अर्थ को भी दर्शाता है। इसी प्रकार, $\frac{14}{10}$ को 14 लीटर तेल के सन्दर्भ में देखा जा सकता है जिसे 10 लोगों में बाँटना है। यहाँ पर 10 लीटर 10 लोगों में एक-एक लीटर बँट जाएगा। बचे 4 लीटर को मिलीलीटर में बदलेंगे। 4 लीटर के 4000 मिलीलीटर हुए। 4000 ÷ 10 = 400, तो हर 1 व्यक्ति को 1 लीटर और 400 मिलीलीटर तेल मिलेगा।

1 पूर्ण से कम या पूर्ण के बीच की मात्रा को मापने के लिए हम भिन्नात्मक इकाइयों का उपयोग करते हैं, मूल रूप से इकाई को समान उप-इकाइयों में परिवर्तित करते हैं। उदाहरण के लिए, यदि 1 मीटर कपड़े को तीन बराबर भागों में काटा जाए तो प्रत्येक भाग की लम्बाई $\frac{1}{3}$ मीटर होगी।

इसी प्रकार, यदि 3 लीटर जूस 9 लोगों में बाँटा जाए तो प्रत्येक को $\frac{3}{9}$ या $\frac{1}{3}$ लीटर जूस मिलेगा।

यह केवल लम्बाई और आयतन माप तक ही सीमित नहीं है, बल्कि वज़न, क्षेत्रफल और समय माप पर भी समान रूप से लागू होता है, जैसे 200 मिली = $\frac{1}{5}$ लीटर, 250 ग्राम = $\frac{1}{4}$ किग्रा। इसे नीचे दिए गए तरीक़े से और विस्तार से समझा जा सकता है।

52 ग्राम = $\frac{52}{1000}$ किग्रा = 52 किग्रा को 1000 भागों में विभाजित किया = यानी 52 बार $\frac{1}{1000}$ किग्रा किया।

27 मिली = $\frac{27}{1000}$ लीटर = 27 लीटर को 1000 भागों में विभाजित किया अर्थात 27 बार $\frac{1}{1000}$ लीटर किया।

**3. भाग के परिणाम के रूप में भिन्न**

कोई भिन्न किन्हीं दो संख्याओं के भाग का परिणाम यानी भागफल हो सकता है। यहाँ पूर्ण सतत भी हो सकता है या असतत भी। इसे नीचे विस्तार से समझाया गया है।

## वस्तुओं का समूह (Discrete objects)

- **क** सेट का भाग : यदि 12 आम 4 विद्यार्थियों में बराबर-बराबर बाँटे जाते हैं तो प्रत्येक विद्यार्थी को 3 या ($\frac{12}{4}$) आम मिलते हैं। चूँकि 12, 4 से भाज्य है, इसलिए भागफल एक पूर्ण संख्या है।
- **ख** सेट का भाग : यदि 12 सेब 5 विद्यार्थियों में बराबर-बराबर बाँटे जाते हैं तो प्रत्येक विद्यार्थी को $2\frac{2}{5}$ (मिश्रित भिन्न) सेब मिलते हैं।

## सतत पूर्ण

- **ग** पूर्ण का भाग : मान लीजिए सेब का 1 लीटर जूस 3 व्यक्तियों में बराबर-बराबर बाँटा जाता है। उनमें से प्रत्येक को $\frac{1}{3}$ लीटर जूस मिलता है।
- **घ** पूर्ण का भाग : मान लीजिए 1 तरबूज़ 9 व्यक्तियों में बराबर-बराबर बाँटा जाता है। उनमें से प्रत्येक को तरबूज़ का $\frac{1}{9}$ भाग मिलता है।

हालाँकि **क, ख, ग** और **घ** सभी परिदृश्यों में बराबर बँटवारा होता है। परिदृश्य **क** और **ख** एक सेट के भाग की अवधारणा के साथ सम्बन्धित हैं, और **ग** व **घ** किसी सम्पूर्ण रचना के भाग की अवधारणा से सम्बन्धित हैं। इसके अतिरिक्त, परिदृश्य **ग** भिन्न के माप अर्थ से भी सम्बन्धित है।

**4. अनुपात के रूप में भिन्न**

अनुपात एक मात्रात्मक सम्बन्ध है जो एक राशि के दूसरी

राशि के सापेक्ष माप को दर्शाता है। उदाहरण के लिए, यदि एक आयत की लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 12 सेमी और 3 सेमी है तो लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात 4:1 है। इसे भिन्न में $\frac{4}{1}$ के रूप में लिखा जा सकता है। इसका अर्थ है कि लम्बाई चौड़ाई की 4 गुना है। यह लम्बाई और चौड़ाई के बीच योगात्मक सम्बन्ध (लम्बाई, चौड़ाई से 9 सेमी अधिक है) के बजाय गुणात्मक / आनुपातिक सम्बन्ध दर्शाता है।

अंश-पूर्ण सम्बन्ध आसानी से अनुपात में परिवर्तित हो सकता है। मान लीजिए 30 गेंदें हैं। इनमें से 20 गेंदें नीली हैं और बाक़ी लाल। नीली गेंदें कुल गेंदों की संख्या का $\frac{2}{3}$ हैं। हम इसे अनुपात के रूप में लिख सकते हैं। नीली गेंदों का कुल गेंदों की संख्या से अनुपात 2:3 है। यहाँ भिन्न को अनुपात के रूप में लिखा जा सकता है, इसलिए $\frac{2}{3} = 2:3$। यह तब काम करता है जब वे एक ही इकाई में हों। (अब आप सोचें कि नीली गेंदें लाल गेंदों के अनुपात में कितनी हैं?)

अवधारणात्मक रूप से, अनुपातों में शामिल दो राशियाँ अलग-अलग माप / इकाइयों में नहीं हो सकतीं। उदाहरण के लिए, अगर एक कार को 150 किमी की यात्रा करने के लिए 10 लीटर पेट्रोल लगता है। तय की गई दूरी और उपयोग किए गए पेट्रोल की मात्रा का अनुपात 15:1 सोचना सही नहीं है। इसका मतलब है कि 15 किमी की यात्रा करने के लिए उस कार को 1 लीटर पेट्रोल की आवश्यकता होती है। यदि हम इस अनुपात को एक भिन्न में बदलें तो यह $\frac{15}{1}$ हो जाता है। यदि हम केवल भिन्न के अंश-पूर्ण मायने पर विचार करते हैं तो $\frac{15}{1}$ अर्थहीन या बेमानी है। इसके बजाय हम भिन्न के विभाजन अर्थ के बारे में सोच सकते हैं। अगर हम यह जानना चाहें कि कार पेट्रोल के प्रत्येक लीटर (इकाई) में कितनी यात्रा कर सकती है तो यह 15 किमी होगा।

**5. संक्रियक के रूप में भिन्न**

संक्रियक के रूप में, भिन्न किसी संख्या को छोटी करती / घटाती या बड़ी करती है, सिकोड़ती या फैलाती है, और किसी संख्या में गुणा या भाग करती है [4]।

संक्रियक वे परिवर्तक (transformers) होते हैं जो

- किसी रेखाखण्ड की लम्बाई बढ़ाते या घटाते हैं
- किसी आकृति या आयतन का क्षेत्रफल बढ़ाते या घटाते हैं
- वस्तुओं के सेट में वस्तुओं की संख्या बढ़ाते या घटाते हैं।

जब संक्रियक होता है :

### क. एक उचित भिन्न, यह सिकोड़ती है, घटाती है, कम करती है

एक दुकानदार ₹3 में 2 चॉकलेट बेचता है। ₹x ख़र्च करने पर एक ख़रीदार के पास कितनी चॉकलेट होंगी? इसका मतलब कि चॉकलेट की संख्या हमेशा ख़र्च की गई राशि से कम होगी, जैसा कि **तालिका-1** में दिखाया गया है। ख़रीदी जा सकने वाली चॉकलेट की संख्या ख़र्च की गई राशि का $\frac{2}{3}$ है। यहाँ चॉकलेट की संख्या ख़र्च किए गए रुपए से कम है।

**तालिका-1**

| इनपुट (रुपए) | ऑपरेटर | आउटपुट (चॉकलेट की संख्या) |
|---|---|---|
| 9 | $\frac{2}{3}$ | 6 |
| 12 | $\frac{2}{3}$ | 8 |
| 15 | $\frac{2}{3}$ | 10 |
| 18 | $\frac{2}{3}$ | 12 |

### ख. एक अनुचित या मिश्रित भिन्न, यह बड़ा करती या फैलाती है

आइए, पिछले उदाहरण को थोड़ा बदल दें। यदि एक दुकानदार ₹2 में 3 चॉकलेट बेचता है, तो ₹x ख़र्च करने के बाद ख़रीदार के पास कितनी चॉकलेट होंगी? यहाँ ख़रीदी जा सकने वाली चॉकलेट की संख्या ख़र्च की गई राशि का $\frac{3}{2}$ है। इसका अर्थ है कि चॉकलेट की संख्या हमेशा ख़र्च की गई राशि से अधिक होती है, जैसा कि **तालिका-2** में दर्शाया गया है।

**तालिका-2**

| इनपुट (रुपए) | ऑपरेटर | आउटपुट (चॉकलेट की संख्या) |
|---|---|---|
| 8 | $\frac{3}{2}$ | 12 |
| 10 | $\frac{3}{2}$ | 15 |
| 12 | $\frac{3}{2}$ | 18 |
| 6 | $\frac{3}{2}$ | 9 |

हमने अभी देखा कि भिन्न का अंश-पूर्ण वाला अर्थ उसके विभिन्न परिदृश्यों की स्पष्ट तस्वीर देने के लिए अपर्याप्त है।

$\frac{2}{5}$ मीटर कपड़ा, दुकान की $\frac{2}{3}$ किताबें अँग्रेज़ी में हैं, $\frac{9}{7}$ सेब आदि के क्रमशः माप, अनुपात और बराबर हिस्से जैसे अन्य अर्थ हैं। भिन्न के केवल अंश-पूर्ण वाले मायने से परिचित होने से, ऊपर दी गई जैसी स्थितियों के बारे में विद्यार्थियों की समझ कमज़ोर और अधूरी रह जाती है। जब विद्यार्थी भिन्न के विभिन्न अर्थों और व्याख्याओं से परिचित होते हैं, वे विभिन्न स्थितियों और समस्याओं को समझते हैं, और भिन्न की उनकी समझ समृद्ध होती है।

हमने भिन्न के विभिन्न अर्थों और व्याख्याओं पर चर्चा की। शोधकर्ता इस बात का समर्थन करते हैं कि भिन्न के अंश-पूर्ण और किसी सेट के अंश वाले अर्थ के रूप में भिन्न का परिचय प्राथमिक शाला (कक्षा-3 और 4) के आरम्भ में किया जा सकता है। भिन्न के अन्य अर्थों का परिचय माध्यमिक कक्षाओं में कराया जाना उचित होगा। माध्यमिक स्तर पर उनकी गहराई से समझ बढ़ाई जा सकती है। इसका यह मतलब नहीं है कि प्राथमिक कक्षाओं में उनका हल्का परिचय भी नहीं दिया जाना चाहिए। यह महत्त्वपूर्ण है कि शिक्षक भिन्न के विभिन्न अर्थों और व्याख्याओं से अवगत हों, उन्हें समझें। इससे वे अपने शिक्षण की योजना बनाते समय, उदाहरण चुनते वक़्त, रचनात्मक आकलन और उपचारात्मक शिक्षण करते समय, इस व्यापक समझ को ध्यान में रख सकेंगे। लेकिन इसका ध्यान रखा जाना चाहिए कि किसी भी हालत में विद्यार्थियों पर परिभाषाओं का बोझ न डाला जाए। उदाहरण के लिए, नीचे दिया गया कार्य केवल शिक्षकों के लिए है। यह प्राथमिक विद्यालय के विद्यार्थियों पर बोझ डालने के लिए नहीं है।

ऊपर दी गई चर्चा के आधार पर, यहाँ शिक्षकों के लिए एक कार्य दिया गया है (**तालिका-3**)। प्रत्येक इबारती सवाल देखें, उसके अर्थों और व्याख्याओं का विश्लेषण करें, और नीचे दी गई तालिका से सम्बन्धित ख़ाने में सही का निशान लगाएँ। याद रखें कि ये अर्थ और व्याख्याएँ एक-दूसरे से सम्बन्धित भी हो सकती हैं।

**तालिका-3**

| स.क्र. | इबारती सवाल / सन्दर्भ | एक पूरे का भाग / सेट | | माप | बराबर बाँटना | संक्रियक | अनुपात |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | पूर्ण सतत के रूप में | पूर्ण वस्तुओं के समूह रूप में | | | | |
| 1 | वामशी और ध्रुव के बग़ीचे बिल्कुल एक जैसे आकार के हैं। वामशी ने अपने बग़ीचे की $\frac{1}{6}$ जगह टमाटर उगाने में इस्तेमाल की और ध्रुव ने अपने बग़ीचे का $\frac{1}{7}$ भाग आलू बोने में लगा दिया। किसके बग़ीचे में ज़्यादा जगह बची है? आपके उत्तर का आधार क्या है? | | | | | | |
| 2 | श्रीराम एक पुस्तकालय चलाते हैं जिसमें 420 किताबें हैं। $\frac{1}{3}$ किताबें विज्ञान की हैं और $\frac{1}{4}$ गणित की। गणित और विज्ञान की कितनी-कितनी किताबें हैं? किताबों का कितना भाग अन्य श्रेणियों में है? | | | | | | |
| 3 | एक कद्दू का वज़न $2\frac{3}{4}$ किलोग्राम और एक तरबूज़ का वज़न 2340 ग्राम है। क्या ज़्यादा भारी है – कद्दू या तरबूज़? | | | | | | |
| 4 | रबीना ने एक विशेष पेय बनाने के लिए 3 कप जूस को 4 कप पानी में मिलाया। पेय का कितना भाग जूस है? | | | | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | मुथुलक्ष्मी अपने मासिक वेतन का $\frac{2}{5}$ हिस्सा घरेलू ख़र्चों पर व्यय करती हैं। उन्होंने कितना हिस्सा बचाया? | | | | | | |
| 6 | तीन बराबर आकार के पराठे 11 विद्यार्थियों में बराबर-बराबर बाँटे गए। उनमें से प्रत्येक को पराठे का कितना हिस्सा मिला? | | | | | | |

## References


1. Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 296–333). Macmillan.
2. Chapin,S., & Johnson, A. (2006). *Fractions. In Math matters: Understanding the math you teach (Grades K-6)* (pp.99-112). Math Solutions Publications.
3. Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. A. Hiebert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162–181). Lawrence Erlbaum.
4. Lamon, S. J. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* Routledge.


**नारायण मेहर** अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी, बेंगलूरु में शिक्षक-शिक्षा समूह में संकाय सदस्य हैं। यूनिवर्सिटी में आने से पहले उन्होंने दिल्ली के मिराम्बिका फ्री प्रोग्रेस स्कूल और गुड़गाँव के हेरिटेज एक्सपीरियंसल लर्निंग स्कूल (HXLS) में गणित पढ़ाया है। HXLS में काम करते हुए उन्होंने दिल्ली स्थित एक ग़ैर-लाभकारी संगठन, जोड़ो ज्ञान, के साथ मिलकर काम किया जो मुख्य रूप से गणित शिक्षण के नवीन तरीक़ों पर काम करता है। उन्होंने IAAT (I AM A TEACHER), गुड़गाँव में शिक्षक और शिक्षक-प्रशिक्षक के रूप में काम किया। उनकी रुचि का क्षेत्र गणित शिक्षा है। उन्हें व्यावहारिक कार्य और शिल्प में भी रुचि है जिसमें स्थानिक सोच और तर्क की आवश्यकता होती है। उनसे narayana.meher@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

**अनुवाद :** अंजली नरोन्हा **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अतुल अग्रवाल

### संख्याओं में कला

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 9 | 12 |
| 27 | 30 | 33 |
| 48 | 51 | 54 |
| 69 | 72 | 75 |

**चित्र-1**

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 6 | 9 |
| 24 | 27 | 30 |
| 45 | 48 | 51 |
| 66 | 69 | 72 |

**चित्र-2**

चित्र-1 और चित्र-2 में हरे रंग से छायांकित चार संख्याओं पर ध्यान दें।

दोनों ही स्थितियों में, जब हम चारों संख्याओं को जोड़ते हैं और योगफल को 4 से भाग देते हैं, हमें चतुर्भुज के केन्द्र में स्थित नीले रंग से छायांकित संख्या प्राप्त होती है।

क्या आप इन संख्याओं को जोड़ने वाला कोई पैटर्न ढूँढ़ सकते हैं? क्या आप संख्याओं के किसी दूसरे सेट में ऐसे पैटर्न ढूँढ़ सकते हैं? किसी अन्य ग्रिड में? आपकी ग्रिड में ये एक-दूसरे से कैसे सम्बन्धित हैं?

अपने जवाब AtRightAngles.editor@apu.edu.in पर भेजें।

रचनाकार : कैरेलिन क्रिस्टोफर

carelinchristopher@gmail.com

# आकार में आना!

आकांक्षा और मैथ स्पेस

**क्या आपने एक प्राइमरी स्कूल में, विद्यार्थियों को आकृतियों से परिचित कराने के लिए आकारों के 2-D कटआउट या पेपर-फ़ोल्डिंग जैसी सामग्रियों और गतिविधियों का इस्तेमाल किया है? अगर आपने ऐसा किया होगा, तो आपके पास कक्षा में आगे बढ़ने के लिए एक बहुत ही स्पष्ट और निश्चित पाठ योजना रही होगी। अब, क्या आप अपने विद्यार्थियों को आपके द्वारा बनाई गई पाठ योजना से कुछ अलग करने देंगे? ज़्यादातर शिक्षक ऐसा करने से हिचकिचाएँगे। क्योंकि अकसर हमें लगता है कि अगर हम ऐसा होने देते हैं, तो कक्षा को उस पर वापस लाना मुश्किल हो सकता है जो हम विद्यार्थियों को सिखाना चाहते हैं।**

**इस लेख में एक ऐसा उदाहरण प्रस्तुत किया गया है, जहाँ शिक्षक ने विद्यार्थियों के सवालों से कक्षा को दिशा देने का साहस किया। यह विवरण शिक्षक के अपने शब्दों में है, जिसमें उन्होंने कक्षा-3 में आकृतियों के साथ काम करने का अपना अनुभव साझा किया है। मैथ स्पेस के एक साथी ने पूरी प्रक्रिया का अवलोकन किया और इसका दस्तावेज़ीकरण करने में मदद की। आइए देखें कि क्या-क्या हुआ, और क्या हम इससे कुछ सीख सकते हैं।**

मेरी मूल योजना इस प्रकार थी :

पाठ के उद्देश्य : यूनिट के आख़िर तक विद्यार्थियों को निम्नलिखित कार्य करने में सक्षम होना चाहिए :

- वृत्त और त्रिभुज, वर्ग या आयत के बीच अन्तर करना।
- त्रिभुज और आयत के बीच समानताएँ और अन्तर कर पाना।
- यह समझना कि विभिन्न आकृतियों को मिलाकर परिचित वस्तुओं की आकृतियाँ कैसे बनाई जा सकती हैं।

तदनुसार, दिन-वार गतिविधि योजना इस प्रकार थी :

**दिन 1 :** विभिन्न चयनित आकृतियों को ट्रेस करें और उन्हें काटें। फिर, नीचे दिए गए सवालों का इस्तेमाल करके, आकृतियों के कटआउट को 4 समूहों में बाँटें – वृत्त, वर्ग, आयत और त्रिभुज :

- आकृतियों को ट्रेस करने पर हमें किस प्रकार की रेखाएँ दिखाई देती हैं?
- किन आकृतियों को ट्रेस करने पर सीधी/घुमावदार रेखाएँ बनती हैं?
- किन आकृतियों की भुजाएँ बराबर/ग़ैर-बराबर हैं?
- वृत्त, वर्ग, आयत या त्रिभुज से किस प्रकार भिन्न है?
- त्रिभुज, आयत के समान कैसे है? यह आयत से किस प्रकार भिन्न है?

***की-वर्ड :*** *आकृतियाँ, गुण, छँटाई, समानताएँ, अन्तर, कक्षा गतिविधि*

आकृतियों के बारे में एक कविता करके इस सत्र को ख़त्म करें।

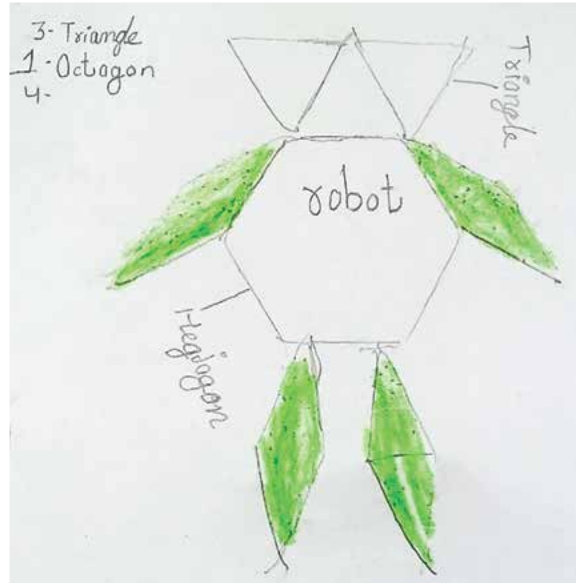
योजना के मुताबिक़ यह पाठ बहुत ही सुन्दर ढंग से चला और अगले दिन का ज़्यादातर हिस्सा भी, जिसकी योजना नीचे दी गई है।

**दिन 2 :** विद्यार्थियों को 5-5 के समूहों में बाँटें, और प्रत्येक समूह को कई किटों में से आकृतियों का एक रेंडम ढेर (कलेक्शन) दें, जैसे :

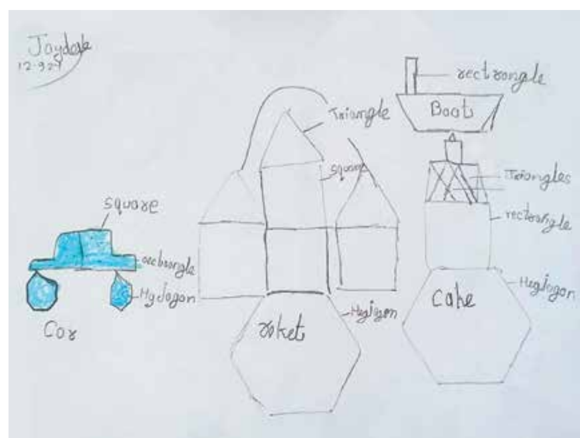
- रंगोमेट्री[1] – एथिल विनाइल एसीटेट (EVA) से बनी 2D आकृतियों का एक ढेर, जो पानी में डुबाने पर बोर्ड पर चिपक जाती हैं – जोड़ो ज्ञान द्वारा विकसित।
- टेसेलेशन किट – समान भुजाओं वाले सम बहुभुजों (पंचभुज, षट्भुज आदि) का ढेर।
- आकार परिवार – 5 आकृतियों (वृत्त, अर्धवृत्त, वर्ग, आयत, समबाहु त्रिभुज – प्रत्येक अलग रंग में और प्रत्येक 5 आकारों में) का ढेर।
- कक्षा में पाई गईं बेतरतीब आकृतियाँ – इनमें से एक वलय (डोनट आकार की) थी।

समूहों को परिचित वस्तुओं की आकृतियाँ बनाने के लिए कहें और किट का इस्तेमाल करके वही आकृतियाँ काग़ज़ पर बनाने को कहें। फिर इन पर चर्चा करें :

- आपने नाव बनाने के लिए किन आकृतियों का इस्तेमाल किया?
- आपने उस आकृति का इस्तेमाल क्यों किया?
- आपके द्वारा चुनी गई आकृति और छोड़ी गई आकृति में क्या अन्तर है?
- चुनी आकृति क्यों ज़्यादा उपयुक्त है?




**चित्र-1**




**चित्र-2**

विद्यार्थियों की क्षमताओं के सन्दर्भ में समूह विविध थे। प्रत्येक समूह को पाँच आकृतियाँ बनानी थीं – कार, नाव, रॉकेट, केक और रोबोट। हरेक आकृति के लिए उन्हें 5 मिनट का समय दिया गया। प्रत्येक समूह के लिए आकृतियों का क्रम मेरे द्वारा निर्धारित किया गया था ताकि यह सुनिश्चित हो सके कि कोई भी दो समूह एक ही आकृति पर एक साथ काम नहीं कर रहे हों। इन वस्तुओं को विद्यार्थियों की उनके बारे में जानकारी और बनाने में आसानी के आधार पर भी चुना गया था। इसका मक़सद यह दिखाना था कि हमारे आस-पास की वस्तुओं को अलग-अलग आकृतियों को एक साथ रखकर दर्शाया जा सकता है। जैसा कि अमूमन समूह कार्य में होता ही है इसमें भी अपेक्षित 25 मिनट से ज़्यादा वक़्त लगा। उन्हें व्यवस्थित होने और एक साथ काम करने में समय लगा, कुछ समूहों को अधिक सामग्री चाहिए थी। उन्हें दूसरे समूहों को दी गई आकृतियों में भी दिलचस्पी थी, और प्रत्येक समूह ने बारी-बारी से हर आकृति को बनाया। हालाँकि, जब उन्होंने चित्र बनाना शुरू किया, तो वे पूरी तरह से उसमें रम गए। फिर, उन्होंने कक्षा की शुरुआत में दिए गए काग़ज़ पर वही आकृतियाँ बनाईं। कुछ ने हाथ से चित्र बनाए, जबकि कुछ ने असली आकृतियों को ट्रेस करके बनाया। वे कैसे बनाएँ, यह फ़ैसला उन पर छोड़ दिया गया।

[1]एट राइट एंगल्स के जुलाई 2023 अंक में इसकी समीक्षा की गई है।

मैंने देखा कि विद्यार्थियों की दूसरे समूहों द्वारा बनाई गई आकृतियों में गहरी रुचि थी। उन्होंने अपने विचारों को क्रियान्वित करने के लिए दूसरे समूहों के साथ आकृतियों का आदान-प्रदान किया। वे एक-दूसरे से प्रेरणा ले रहे थे और कक्षा की व्यवस्था को भंग किए बिना संसाधनों का आदान-प्रदान कर रहे थे। चूँकि हमारे पास समय कम था, इसलिए चर्चा अगले दिन के लिए मुल्तवी कर दी गई। इसका मतलब था कि मूल योजना को अलग रखना, जो इस प्रकार थी :

**दिन 3 :** टैनग्राम – दिए गए टैनग्राम सेट की आकृतियों का इस्तेमाल करके बढ़ती जटिलता वाली आकृतियाँ बनाएँ।

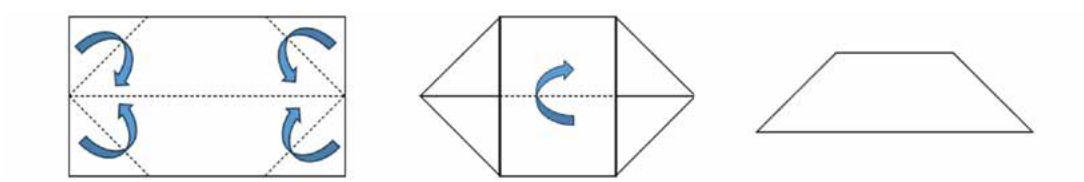
**दिन 4-6 :** आकृतियों के साथ अलग-अलग तरह की जाँच-पड़ताल और चर्चाएँ, उसके बाद सातवें दिन रचनात्मक आकलन के लिए पाठ्यपुस्तक अभ्यास।

तीसरे दिन की शुरुआत विद्यार्थियों द्वारा बनाए गए चित्रों पर चर्चा से हुई। चूँकि इन आकृतियों में ऐसे कई बहुभुज और दूसरी आकृतियाँ शामिल थीं जो उनके लिए नई थीं, तो इससे सवालों की बाढ़ आ गई और इसने चर्चा को एक अलग दिशा में मोड़ दिया।

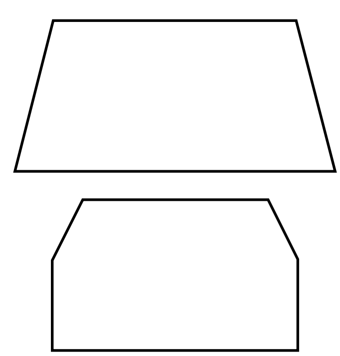
हम अलग-अलग चार-भुजाओं वाली आकृतियाँ ढूँढ़ने लगे। एक विद्यार्थी ने एक ऐसी आकृति खोजी जो आधे षट्भुज (षट्कोण) जैसी दिखती थी! क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि वह चार-भुजाओं वाली आकृति कौन-सी थी?

**चित्र-3**

अब इस अवलोकन ने चर्चा को सममिति (symmetry) की ओर मोड़ दिया और यह दिखाने के लिए कि यह आकृति एक षट्भुज का आधा कैसे है, काग़ज़ मोड़ने का प्रयोग किया गया। हमने काग़ज़ का एक आयताकार टुकड़ा लिया और उसे क्षैतिज मध्य रेखा के साथ मोड़ा। फिर हमने मुड़े काग़ज़ को खोला और चारों कोनों को इस तरह मोड़ा कि वे क्रीज़ (सल – जहाँ से पेपर को मोड़ा गया था) को छुएँ। फिर, हमने क्रीज़ से काग़ज़ को मोड़ा, और वही आकृति प्राप्त हुई!



**चित्र-4**



**चित्र-5**

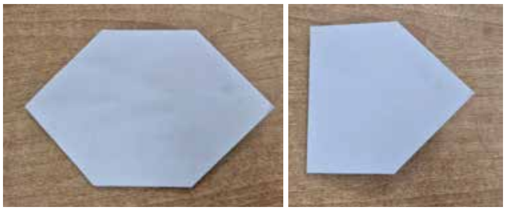
और फिर, विद्यार्थी खुद से इसे करने में लग गए! एक विद्यार्थी इस विचार पर अटक गया कि समद्विबाहु समलम्ब आधे षट्भुज की बजाय आधे अष्टभुज जैसा दिखता है। आप कैसे दिखा सकते हैं कि **चित्र-5** में दिया गया चतुर्भुज दरअसल षट्भुज का आधा है?

"षट्भुज की सभी भुजाएँ (और कोण) बराबर होने चाहिए," जैसी ग़लत धारणाएँ या भ्रम सामने आए और उन पर चर्चा की गई।

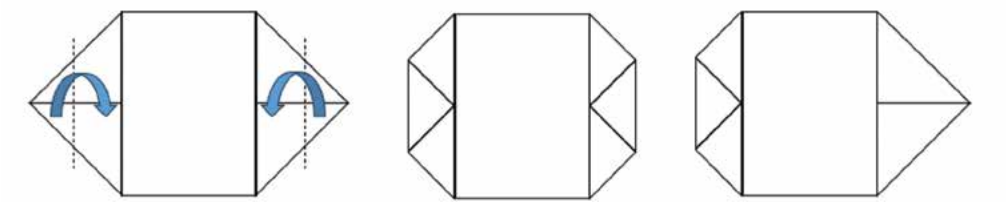
फिर, विद्यार्थियों ने काग़ज़ को विभिन्न तरह से मोड़ते हुए प्रयोग करना शुरू किया और जल्द ही एक अष्टभुज बना लिया। एक विद्यार्थी ने यह पता लगाया कि कैसे एक फ्लैप (तह) को खोलकर अष्टभुज को सप्तभुज में बदला जा सकता है। जब एक बार किसी विद्यार्थी ने यह कर लिया, तो कई इसे दोहराने की कोशिश में लग गए। इन आकृतियों (सात भुजाओं और आठ भुजाओं वाली) के नाम जानने की उनकी उत्सुकता ने तयशुदा गतिविधि को जारी रखना नामुमकिन बना दिया। इसलिए, मैंने आठ के लिए ऑक्टा (अष्टक) शब्दावली का इस्तेमाल किया और उदाहरण बतौर 'ऑक्टोपस' शब्द को चर्चा में लाई। इस प्रकार, काग़ज़ मोड़ने की गतिविधि ने अपना अलग ही रूप धारण कर लिया, जिसकी शुरुआत और संचालन पूरी तरह से विद्यार्थियों ने किया! यहाँ इस गतिविधि से सम्बन्धित कुछ चित्र दिए गए हैं।

**चित्र-6 :** मूल षट्भुज

**चित्र-7 :** षट्भुज को खोला और अष्टभुज बनाने के लिए नए मोड़ बनाए गए



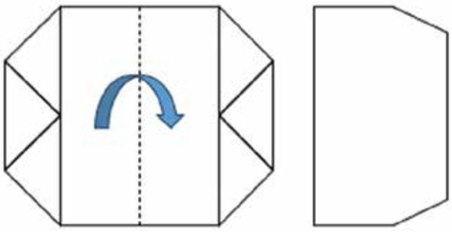
**चित्र-8 :** एक और षट्भुज जिसे पंचभुज में बदला



**चित्र-9 :** मोड़ने का विवरण

इन आकृतियों को देखकर, एक अन्य विद्यार्थी ने यूँ ही यह टिप्पणी कर दी कि षट्भुज थोड़ा-सा वृत्त जैसा दिखता है। और अन्य को लगा कि अष्टभुज के लिए भी यही बात सही है। जैसे-जैसे चर्चा आगे बढ़ी, बोर्ड विभिन्न बहुभुजों से भर गया।

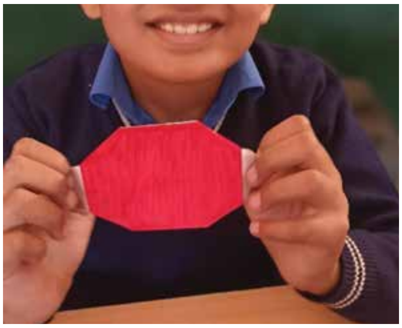
जैसे-जैसे विद्यार्थियों की भागीदारी और उत्साह बढ़ता गया, सभी की सुने जाने की चाह बढ़ती गई – कोई सवाल पूछना चाहता था या कोई अपना अवलोकन साझा करना चाहता था। हरेक सवाल का जवाब देना नामुमकिन हो गया। वे उतावले हो रहे थे। इसलिए, मुझे रुकना पड़ा। मैंने उन्हें उनके सवाल लिखने के लिए कहा। लेकिन तब तक कक्षा ख़त्म हो चुकी थी। अब सवाल लिखकर लाना उनका होमवर्क बन गया। अनुमान लगाइए कि कक्षा-3 के इन विद्यार्थियों ने अपना होमवर्क कितनी ईमानदारी से किया होगा!

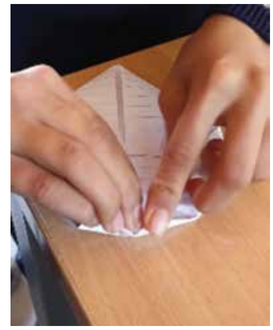


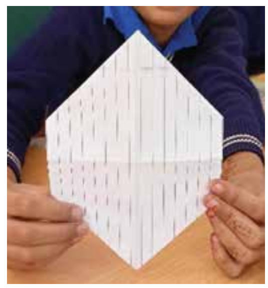
**चित्र-10**

सोच-विचार करने पर, हमें निम्नलिखित बातें समझ में आईं :

1. हालाँकि कक्षा में शोरगुल था, लेकिन यह अपने निष्कर्षों/सवालों को साझा करने की अधिक उत्सुकता के कारण था। यानी, यह विद्यार्थियों की अपने अभ्यास/सीख में गहरी संलग्नता और सक्रिय भागीदारी की वजह से था। इसीलिए, यह ग़ैर-ज़रूरी भटकाव और ख़लल से बहुत अलग था। हमारे लिए सीख यह थी कि जहाँ शोरगुल को नियंत्रित करना ज़रूरी था, वहीं विद्यार्थियों को बहुत ज़्यादा शोर मचाने के लिए डाँटा भी नहीं जाना चाहिए।
2. विद्यार्थियों को स्वतंत्रता देना मददगार साबित हुआ। जो कर सकते थे, उन्होंने हाथ से चित्र बनाए, और जिन्हें ज़रूरत थी, उन्होंने ट्रेस करके ज़्यादा सटीक आकृतियाँ बनाईं और तीसरे दिन, उनकी रचनात्मकता, जिज्ञासा, अवलोकन और सवालों ने कक्षा की अगुवाई की।
3. वे एक-दूसरे से सीखने में संकोच नहीं कर रहे थे और इस साझा सीख ने उन्हें तेज़ी से आगे बढ़ने में मदद की।
4. उन्होंने यह पता लगाया कि मोड़कर एक आकृति को दूसरी आकृति में कैसे बदला जाए, जिससे उन्होंने खोज का मीठा स्वाद चखा।
5. उनकी खोज और जिज्ञासा उन्हें उनकी कक्षा के स्तर से बहुत आगे ले गई।
6. उन्होंने बिना किसी हिचकिचाहट के अपने अवलोकन व्यक्त किए और इस प्रकार शिक्षक उस पर आगे बढ़ सके। इससे भी महत्त्वपूर्ण बात, उनके भ्रम को दूर कर सके। इसीलिए, कई मायनों में, ये कक्षाएँ बाल-केन्द्रित थीं।








7. दूसरे दिन की गतिविधि के लिए ज़्यादा समय रखकर योजना को बेहतर बनाया जा सकता है।
8. अगर बहुत-से विद्यार्थी एक साथ बोलना चाहते हैं, तो शिक्षक को तुरन्त उन्हें लिखने के लिए प्रेरित करना चाहिए। यह ज़रूरी है कि शिक्षक उन्हें स्पष्ट बताएँ कि इस तरह, वे सभी के विचार जान सकते हैं और फिर उसके अनुसार जवाब दिए जा सकते हैं। इससे विद्यार्थियों को यह समझने में मदद मिलेगी कि लेखन उनके विचारों को शिक्षक तक पहुँचाने में कैसे मदद करता है, जो सीमित कक्षा समय में मौखिक रूप से व्यक्त करना मुमकिन नहीं है। आमतौर पर, जब विद्यार्थी किसी भी काम के पीछे का कारण समझ जाते हैं, तो वे कम विरोध करते हैं। ख़ासकर अगर कारण उनकी बात सुनी जाने की ज़रूरत से जुड़ा हो। प्रिपरेटरी स्टेज से ही उन्हें अपने विचार लिखने के लिए कहना एक अच्छा ख़्याल है। ऐसी आदतें बचपन में आसानी से विकसित की जा सकती हैं और बाद में इनके कई फ़ायदे होंगे। विद्यार्थियों को यह आदत डालने का एक अच्छा तरीक़ा है कि बोर्ड पर एक सूची बनाएँ, जिससे विद्यार्थियों को व्यक्तिगत रूप से अपने सुझाव साझा करने और फिर सामूहिक रूप से सूची को सम्पादित करने का समय मिल सके।

अगर आप भी आकृतियों के साथ ऐसा ही मज़ा लेना चाहते हैं, तो आपके पास ऐसी वस्तुओं का संग्रह ज़रूर होना चाहिए जिनसे आकृतियाँ ट्रेस की जा सकें। ये आकृतियाँ काग़ज़ से भी बनाई जा सकती हैं। पंचभुज, षट्भुज (षट्कोण) आदि नामों से परिचित कराना ज़रूरी नहीं है। शुरुआत में आप पाँच भुजाओं वाली आकृतियाँ, छह भुजाओं वाली आकृतियाँ... भी कह सकते हैं। हमें उम्मीद है कि जल्द ही हम काग़ज़ मोड़ने की ऐसी ही गतिविधियों पर आधारित एक वर्कशीट आपसे साझा करेंगे।

---

**आकांक्षा** 2023 में अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन, बाड़मेर से जुड़ीं और पिछले 7 साल से ज़्यादा समय से गणित पढ़ा रही हैं। उन्होंने शिक्षा व अँग्रेज़ी साहित्य में स्नातकोत्तर की डिग्री प्राप्त की है और विज्ञान व शिक्षा में स्नातक की डिग्री ली है। आकांक्षा को युवा विद्यार्थियों के साथ जुड़ना और गणित सीखने को मज़ेदार बनाने के नए तरीक़े तलाशना पसन्द है। उनसे aakanksha.agarwal@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

**मैथ स्पेस** अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी में एक गणित प्रयोगशाला है जो स्कूलों, शिक्षकों, अभिभावकों, बच्चों, स्कूली शिक्षा के क्षेत्र में कार्यरत ग़ैर-सरकारी संगठनों और शिक्षक प्रशिक्षकों की ज़रूरतों को पूरा करती है। यह गणित के लिए विभिन्न शिक्षण-अधिगम सामग्रियों [mat(h) erials] की खोज करती है - उनके फैलाव के साथ-साथ कबाड़ से बनाए जा सकने वाले कम लागत वाले संस्करणों की सम्भावना भी तलाशती है। यह दोनों पक्षों के लोगों को सम्बोधित करने की कोशिश करती है, जो गणित से डरते हैं या नफ़रत करते हैं, साथ ही वे भी जो इससे जुड़ना पसन्द करते हैं। यह एक ऐसी जगह है जहाँ कई लोगों के साथ बातचीत के ज़रिए विचार पैदा होते हैं और विकसित होते हैं। मैथ स्पेस से mathspace@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।
Math Space: https://sites.google.com/apu.edu.in/mathspace/home

**अनुवाद :** सीमा **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता

# आकृतियाँ बनाना : परिमाप और क्षेत्रफल की एक रोचक पड़ताल

गरिमा भट्ट

**कक्षा-गतिविधि पर एक चिन्तन : यह कक्षा-5 में किए गए एक गणित पाठ का विवरण स्वयं शिक्षक के शब्दों में है। पाठ परिमाप और क्षेत्रफल की अवधारणाओं को समझने पर केन्द्रित था।**

## गतिविधि का परिचय

मैंने परिमाप और क्षेत्रफल की इकाई को एक व्यावहारिक गतिविधि के ज़रिए कक्षा में पढ़ाना शुरू किया। इस गतिविधि की शुरुआत से पहले, यह सुनिश्चित किया कि विद्यार्थियों को कुछ मूलभूत बातों की स्पष्ट समझ हो :

- जैसे कि वे वर्ग, आयत और त्रिभुज जैसी बुनियादी द्वि-आयामी आकृतियों को ठीक से पहचान सकें।
- वे बहुभुजों की भुजाओं की लम्बाई मापना जानते हों।
- लम्बाई मापने की सामान्य इकाइयों (सेंटीमीटर और इंच) को समझते हों।
- वे जोड़ और गुणा जैसी संक्रियाओं में निपुण हों, इन दोनों के बीच का अन्तर समझते हों और इनका इस्तेमाल वे सरल गणनाओं में कर पाते हों, क्योंकि ये परिमाप और क्षेत्रफल निकालने के लिए ज़रूरी हैं।

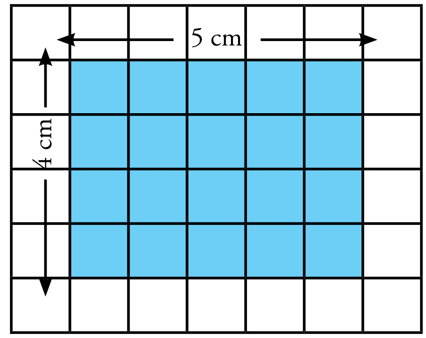
इस पाठ का लक्ष्य यह था कि विद्यार्थी यह समझ सकें कि वे अपने दैनिक जीवन में दिखाई देने वाली अलग-अलग आकृतियों के परिमाप और क्षेत्रफल कैसे निकाल सकते हैं। पाठ की शुरुआत में, मैंने विद्यार्थियों से कहा कि वे अपने आस-पास की ऐसी चीज़ों के बारे में सोचें जिनके स्पष्ट आकार होते हैं – जैसे उनकी किताबें, डेस्क या फ़र्श की टाइलें। इससे कक्षा में एक जीवन्त बातचीत शुरू हुई, जिसमें विद्यार्थियों ने यह साझा किया कि इन आकृतियों को गणितीय रूप से कैसे मापा जा सकता है।

इसके बाद, हमने परिमाप और क्षेत्रफल की अवधारणाओं का पुनरावलोकन और ज़रूरी प्रमुख शब्दों को सन्दर्भ के लिए बोर्ड पर लिखा। विद्यार्थियों ने उदाहरणों और समूह चर्चा के ज़रिए यह समझने की कोशिश की कि परिमाप का मतलब किसी आकृति के चारों ओर की कुल लम्बाई होता है, जबकि क्षेत्रफल उस आकृति के भीतर के हिस्से का माप है। हमने बातचीत को सरल और परिचित आकृतियों (जैसे वर्ग, आयत और त्रिभुज) पर केन्द्रित रखा और हर आकृति पर एक समूह के तौर पर विचार किया। जैसे-जैसे विद्यार्थी अपने अनुभव और सोच साझा करते गए, हमने उनके विचारों को इन अवधारणाओं की समझ को स्पष्ट और गहरा करने के लिए उपयोग किया, जिससे चर्चा अधिक संवादात्मक हो गई।

*की-वर्ड : परिमाप, क्षेत्रफल, कक्षा-गतिविधि, आकृतियाँ, संक्रियाएँ, अनुमान, बाड़ (घेरा)*

## गतिविधि की योजना और क्रियान्वयन

परिचय के बाद, विद्यार्थियों को कक्षा में उपलब्ध वस्तुओं में से चुनकर ग्राफ़ पेपर पर ट्रेस करने को कहा गया। विद्यार्थियों ने कई तरह की आकृतियाँ चुनीं, जैसे वर्ग के आकार की किताबें, आयताकार डिब्बे, गोल प्लेटें और कुछ अनियमित आकार की पत्तियाँ। ट्रेस करते समय, उन्होंने इस पर चर्चा की कि ग्राफ़ (ग्रिड) पेपर किस तरह उन्हें आकृति को बनाने में मदद कर सकता है और किस तरह वे छोटे वर्गों का उपयोग करके क्षेत्रफल का अनुमान लगा सकते हैं।



चित्र-1

हमने एक उदाहरण के रूप में एक आयत का विश्लेषण किया, जो आड़े में 5 और खड़े में 4 वर्गों में फैला था।

विद्यार्थियों ने इसकी परिधि $5 + 4 + 5 + 4 = 18$ सेमी और क्षेत्रफल $5 \times 4 = 20$ सेमी$^2$ के रूप में निकाला। (हम 1 वर्ग सेमी वाले ग्रिड का उपयोग कर रहे थे।)

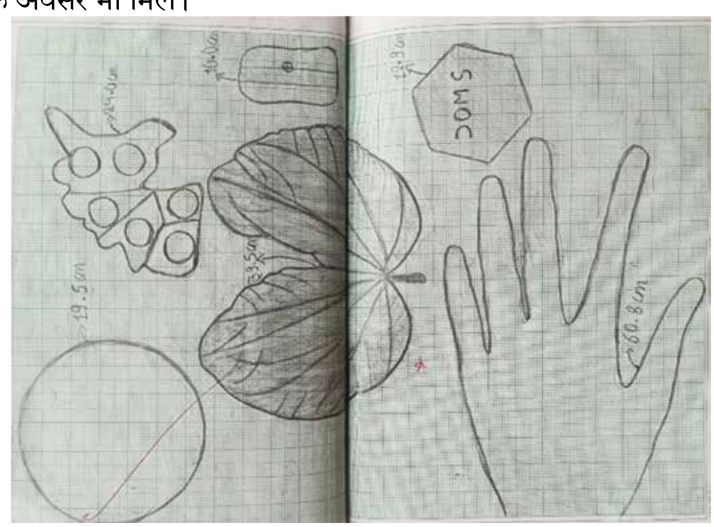
इस दौरान, विद्यार्थियों ने परिमाप मापने के तरीक़े के बारे में अपने विचार साझा किए, कुछ को याद आ गया कि यह सभी भुजाओं की कुल लम्बाई होती है। इस उदाहरण ने उन्हें यह याद दिलाने में मदद की कि कैसे ग्राफ़ की मदद से रेखाओं पर बने वर्गों को गिनकर नियमित आकृतियों की भुजाओं को मापा जा सकता है।

हर विद्यार्थी को ग्राफ़ पेपर, स्केल और पेंसिल दी गई और उन्हें चुनी हुई वस्तुओं की बाहरी रेखा सावधानीपूर्वक खींचने के लिए प्रेरित किया गया। कार्य करते समय उन्होंने एक-दूसरे से अपने-अपने तरीक़ों पर चर्चा की और रेखांकित आकृतियों की परिमाप और क्षेत्रफल की गणना करने के तरीक़े के बारे में विचार साझा किए।

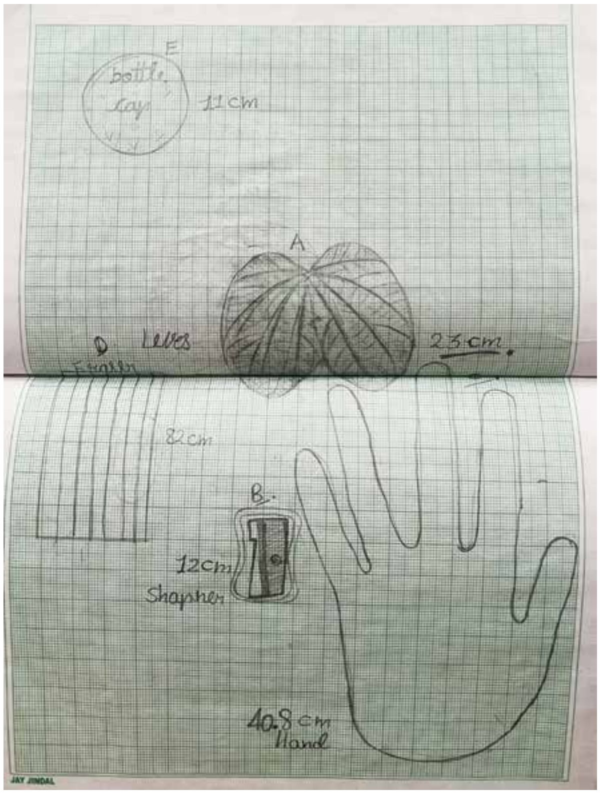
मैं कक्षा में घूम-घूमकर उनके कार्यों और रणनीतियों का अवलोकन करती रही। ज़रूरत पड़ने पर सहायता कर रही थी और उनके प्रश्नों के उत्तर दे रही थी। इस प्रक्रिया ने उन्हें न केवल ख़ुद से सीखने का अवसर दिया, बल्कि उन्हें अवधारणाओं की पड़ताल करते समय मार्गदर्शन और स्पष्टीकरण के अवसर भी मिले।

## विद्यार्थियों की भागीदारी और शिक्षक के अवलोकन

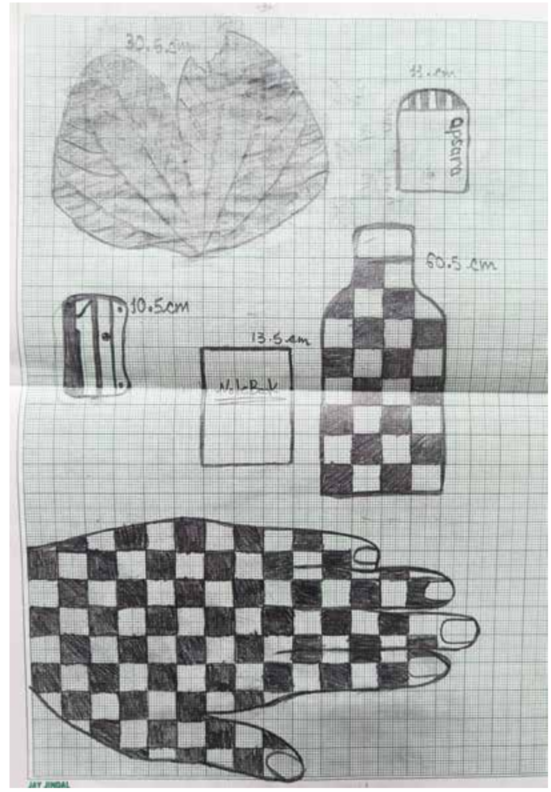
जब विद्यार्थियों ने कार्य करना शुरू किया, तो यह देखकर अच्छा लगा कि वे अपने सीखे हुए ज्ञान को लागू करने को लेकर कितने उत्साहित थे। कुछ विद्यार्थियों ने क्षेत्रफल निकालने के लिए ग्रिड के इस्तेमाल को लेकर संशय ज़ाहिर किया। उन्होंने अपने विचार समूह में साझा किए और इस चर्चा के माध्यम से, वे अवधारणा की अपनी समझ को और निखार पाए। इस प्रकार के सहयोगात्मक संवाद ने उन्हें अधिक आत्मविश्वास के साथ आगे बढ़ने में मदद की। यह अनुभव प्रेरणादायक रहा कि किस तरह ख़ुद करने की गतिविधि और साथियों की प्रतिक्रिया ने उन्हें इस गतिविधि में गहराई से जोड़ दिया।


चित्र-2

एक छात्रा ने अपने हाथ की आकृति को ग्राफ़ पेपर पर उकेरते हुए पूछा, "अगर आकृति के किनारे टेढ़े-मेढ़े या घुमावदार हों तो परिमाप कैसे निकालेंगे?" इस सवाल ने विद्यार्थियों को अनियमित आकृतियों को मापने के तरीक़ों पर चर्चा के लिए प्रेरित किया। उन्होंने कई उपायों पर बात की। जैसे धागे से आकृति की बाहरी रेखा को नापना और फिर उस धागे की लम्बाई को स्केल से मापकर परिमाप का अनुमान लगाना। जैसे-जैसे हमने समझा कि वक्र रेखाओं पर सीधा स्केल क्यों




चित्र-3

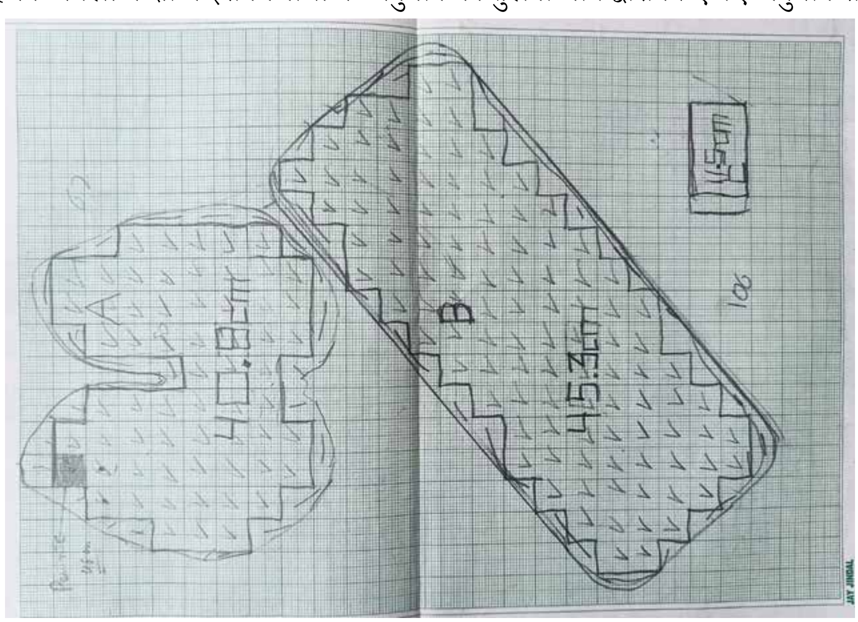



चित्र-4

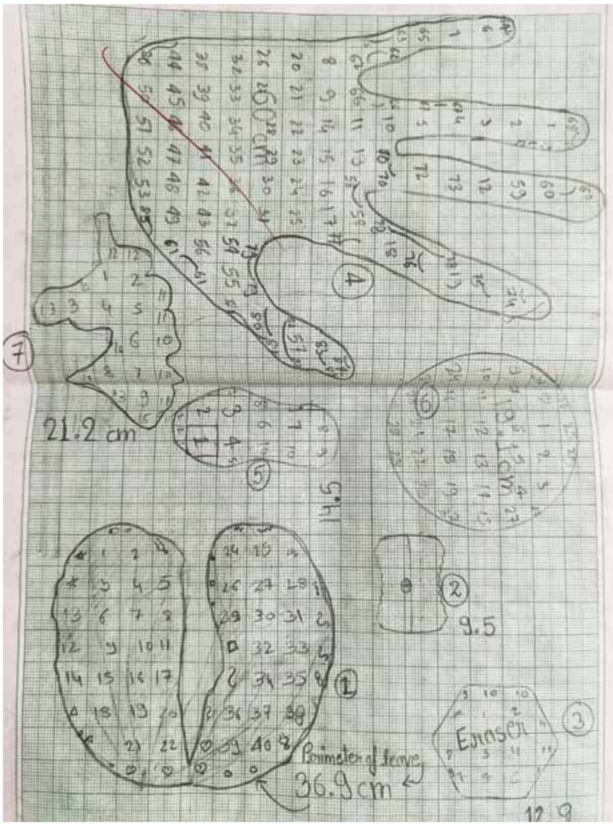
काम नहीं करता, विद्यार्थियों ने भी अपने ख़ुद के उदाहरण साझा किए जहाँ धागे से मापने की विधि कारगर साबित हो सकती थी। इससे परिमाप का अनुमान लगाने की उनकी समझ और गहरी हुई।

तभी मैंने एक आश्चर्यजनक बात देखी। बगल की मेज़ पर बैठा एक छात्र अपने ग्राफ़ पेपर पर एक पत्ती की आकृति बना रहा था। उसका घेरा पता करने के लिए उसने धागे का प्रयोग नहीं किया; दरअसल, उसने परिमाप निकालने के लिए पत्ती के अन्दर की तरफ़ के वर्ग की भुजाएँ ग्राफ़ पेपर पर बना ली थीं (**चित्र-5**)।

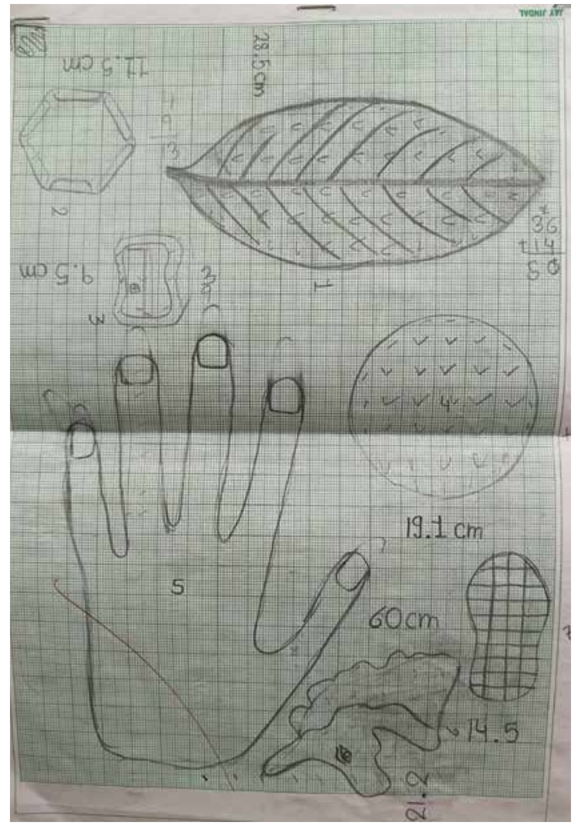
यह तरीक़ा अप्रत्याशित था, लेकिन इसने मुझे सभी विद्यार्थियों के साथ परिधि के अनुमान पर चर्चा करने का सुनहरा अवसर दिया। (हमने अगली कक्षा में इस विद्यार्थी के अनुमान की तुलना धागे द्वारा किए गए अनुमान से भी की।)




चित्र-5




चित्र-6



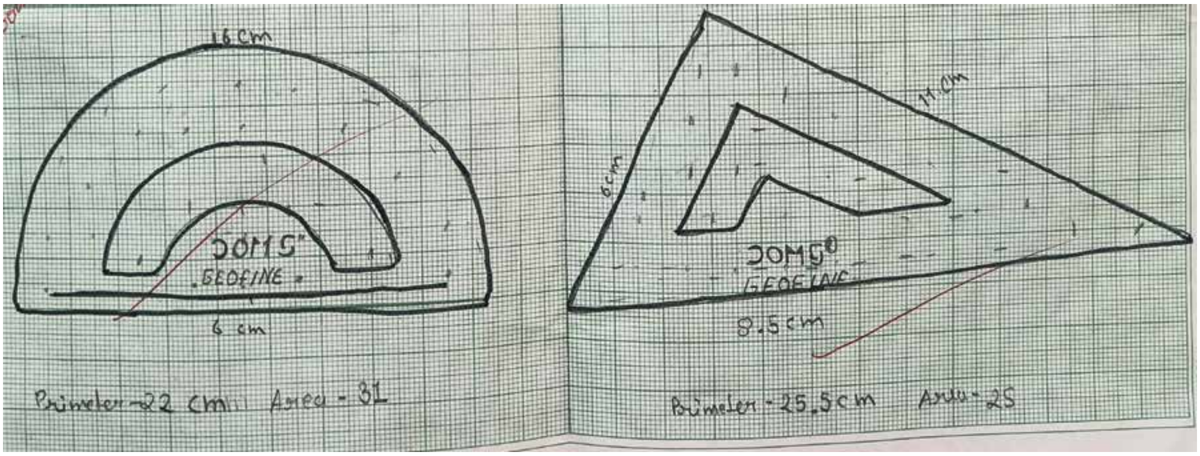

चित्र-7

विद्यार्थियों ने अपनी अनियमित आकृतियों की परिधि नापने के लिए धागे का इस्तेमाल किया। उन्होंने उस माप की तुलना अपने पहले किए गए अनुमानों से भी की, जो उन्होंने स्केल या सीधे (सपाट) खण्डों के माध्यम से किए थे। उन्होंने पाया कि उनके अनुमान आमतौर पर धागे से मापी गई लम्बाई से अधिक थे। इस अनुभव से यह समझ उभरी कि घुमावदार किनारों को सीधे उपकरण से मापने की कोशिश करने पर माप ज़्यादा आ सकता है, जबकि धागे जैसे लचीले साधन असली माप के ज़्यादा क़रीब होते हैं। इससे विद्यार्थियों को मापी जा रही वस्तु की प्रकृति (बनावट) के आधार पर उपयुक्त उपकरण चुनने के महत्त्व को समझने में मदद मिली।

बातचीत के दौरान कई विद्यार्थियों ने बताया कि उन्होंने परिधि का अनुमान लगाने के लिए धागे का उपयोग किया था, जिससे यह स्पष्ट हुआ कि वे अनियमित आकृतियाँ मापने की इस विधि में रुचि ले रहे थे। इस गतिविधि ने जहाँ उनकी उत्सुकता और रचनात्मक सोच को बढ़ावा दिया, वहीं इसकी सटीकता पर भी चर्चा शुरू हुई। विद्यार्थियों ने यह सवाल उठाया कि क्या धागा वास्तव में अनियमित आकृतियों की परिधि मापने का सबसे भरोसेमन्द तरीक़ा है। उन्होंने महसूस किया कि यह तरीक़ा भी सही माप के लिए आवश्यक परिशुद्धता प्रदान नहीं करता। इसने मुझे यह सोचने पर मजबूर कर दिया कि क्या मैंने भुजाओं की माप के लिए ग्रिड रेखाओं के उपयोग का उद्देश्य स्पष्ट रूप से बताया था। हमने पहले ही ग्रिड पद्धति को एक अधिक व्यवस्थित और सटीक तरीक़ा माना था, जिसमें विद्यार्थी भुजाओं पर इकाइयों को गिनकर परिधि का मापन कर सकते हैं – विशेष रूप से नियमित आकृतियों के लिए यह तरीक़ा अधिक भरोसेमन्द साबित होता है।

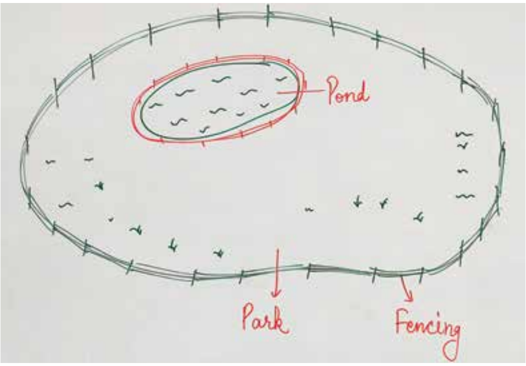
कई विद्यार्थियों के मन में क्षेत्रफल की गणना करते समय आंशिक वर्गों से निपटने के तरीक़े के बारे में भी प्रश्न थे। एक ने पूछा, “मैं उन वर्गों की गणना कैसे करूँ जो आकृति द्वारा केवल आंशिक रूप से ढँके हैं?” मैंने उन्हें करके दिखाया कि पहले पूरे वर्गों को गिनना चाहिए और फिर अधूरे वर्गों का अनुमान लगाकर कुल क्षेत्रफल का अन्दाज़ा लगाया जा सकता है। मैंने उन्हें सटीकता पर ज़ोर देने की बजाय इस बात पर ध्यान देने के लिए प्रेरित किया कि वे अनुमान के ज़रिए सटीक माप के क़रीब पहुँच सकें।

कक्षा की पिछली बेंच से एक छात्रा ने मुझे आवाज़ दी और पूछा, "अगर आकृति ऐसी हो तो क्या होगा? क्या अन्दर की रेखा भी परिमाप में गिनी जाएगी?" जब मैंने उसकी आकृति देखी, तो वह उसके ज्योमेट्री बॉक्स का सेट-त्रिभुज (**चित्र-8**) था। उसने क्षेत्रफल ठीक से निकाला था, लेकिन परिमाप को लेकर उलझन में थी। यह एक ऐसा सवाल था जो बाक़ी विद्यार्थियों के लिए भी ज़रूरी हो सकता था, इसलिए मैंने अन्य शिक्षकों से बात करने के बाद इसे अगली कक्षा में सबके साथ मिलकर स्पष्ट किया।




**चित्र-8**

सन्दर्भ समझाने के लिए, मैंने बोर्ड पर पार्क और तालाब का एक चित्र बनाया। फिर मैंने सवाल किया, "अगर हमें इस पार्क के चारों ओर बाड़ (घेरा) बनानी हो, तो बाड़ की कुल लम्बाई क्या होगी?" विद्यार्थियों ने जवाब दिया कि पार्क को बाहर से घेरना ज़रूरी है, लेकिन बच्चों को तालाब में जाने से रोकने के लिए तालाब के चारों ओर भी बाड़ होनी चाहिए। इसलिए कुल लम्बाई में बाहर और अन्दर दोनों बाड़ को शामिल करना होगा।




**चित्र-9**

जब विद्यार्थियों ने तालाब के चारों ओर अन्दरूनी बाड़ लगाने की ज़रूरत पर बात की, तो मैंने उन्हें बताया कि यह इस बात पर निर्भर करता है कि बाड़ किस उद्देश्य से लगाई जा रही है। मैंने समझाया कि अगर मक़सद पार्क और उसके आस-पास की सुरक्षा करना है, तो बाड़ केवल पार्क की बाहरी परिधि पर लगनी चाहिए, तालाब के चारों ओर नहीं। लेकिन अगर हम तालाब को अलग से सुरक्षित करना चाहें (जैसे कि बच्चों को उससे दूर रखना हो) तब तालाब के चारों ओर भी बाड़ ज़रूरी हो सकती है।

## गतिविधि पर शिक्षक के विचार

जब मैं इस गतिविधि को पीछे मुड़कर देखती हूँ, तो मुझे लगता है कि यह विद्यार्थियों और मेरे, दोनों के लिए एक मूल्यवान शिक्षण अनुभव था। पाठ का सबसे सफल पहलू यह था कि कैसे विद्यार्थी विभिन्न प्रकार की रोज़मर्रा की वस्तुओं के साथ जुड़े। ऐसा महसूस हुआ कि उन्हें आकृतियाँ ट्रेस करना और गणित की अवधारणाओं को वास्तविक चीज़ों पर आज़माना बहुत अच्छा लगा। ग्राफ़ पेपर ने इस प्रक्रिया को आसान बना दिया। इससे वे आकृतियों को स्पष्ट रूप से देख पाए और वर्गों की गिनती कर पाए, जिससे उन्हें क्षेत्रफल समझने में मदद मिली – यहाँ तक कि अनियमित आकृतियों के लिए भी। विद्यार्थियों की यह स्वतंत्र पड़ताल और अवधारणा का अनुप्रयोग दर्शाता है कि जब उन्हें सक्रिय भागीदारी के माध्यम से सीखने के अवसर दिए जाते हैं, तो सीखना और अधिक कारगर हो जाता है।

## विद्यार्थियों की प्रतिक्रियाएँ और प्रगति

पूरी गतिविधि के दौरान, यह स्पष्ट था कि विद्यार्थी मगन थे और सीखने को उत्सुक थे। उन्होंने ट्रेसिंग और मापन कार्यों में सक्रिय रूप से भाग लिया और साथ ही विचारशील प्रश्न भी पूछे। उनके कुछ उत्तरों से यह भी पता चला कि वे वास्तव में समझ में प्रगति कर रहे हैं।

विद्यार्थी-1 ने कहा, "मैंने अपनी डिक्शनरी को ट्रेस किया और ग्राफ़ पेपर पर बने वर्गों को गिना। लम्बाई और चौड़ाई को गुणा करके क्षेत्रफल निकाला और सभी किनारों की लम्बाई जोड़कर परिमाप निकाला।"

विद्यार्थी-2 ने बताया, "मुझे अपनी बोतल के ढक्कन को लेकर थोड़ी परेशानी हुई क्योंकि मुझे गोलाई का परिमाप निकालना नहीं आता था, लेकिन धागे का इस्तेमाल करने के बाद, मुझे समझ आ गया। मैंने पहले धागे से वृत्त की परिधि नापी, फिर स्केल से उसकी लम्बाई निकाली।"

विद्यार्थी-3 ने कहा, "मैंने एक षट्कोण के आकार की रबड़ की आकृति बनाई। क्षेत्रफल निकालने के लिए मुझे उसे छोटे वर्गों में बाँटना पड़ा और आंशिक वर्गों को गिनना पड़ा। मुश्किल था, लेकिन काम कर गया!"

इन उत्तरों से मुझे यह समझ आया कि विद्यार्थी न सिर्फ़ अपने ज्ञान का इस्तेमाल कर रहे थे, बल्कि जटिल आकृतियों को समझने और हल करने के लिए सोच-समझकर क़दम भी उठा रहे थे।

## निष्कर्ष

अन्त में, यह देखना रोमांचक था कि विद्यार्थियों ने चुनौतियों का सामना कैसे किया, चाहे वह अनियमित आकृतियों को मापना हो या क्षेत्रफल के लिए आंशिक वर्गों को गिनना हो। अपनी पड़ताल और समस्या-समाधान के ज़रिए उन्होंने परिमाप और क्षेत्रफल की अवधारणाओं को गहराई से समझा। आगे मैं विद्यार्थियों को जटिल आकृतियों की पड़ताल करने और परिमाप और क्षेत्रफल की गणना करने के अपने कौशल को निखारने के और अवसर देने की योजना बना रही हूँ, ताकि वे अपने तरीक़े और अपनी गति से अभ्यास कर आत्मविश्वास हासिल कर सकें। यह गतिविधि व्यावहारिक शिक्षा की शक्ति की बड़ी मिसाल थी और यह भी कि जब बच्चे स्वयं पहल करते हैं, तो वे अपनी सोच और कल्पनाशक्ति से हमें चकित कर सकते हैं।

**गरिमा भट्ट** दिसम्बर, 2022 से अज़ीम प्रेमजी स्कूल, उधम सिंह नगर में पढ़ा रही हैं। उन्होंने एसएसजे विश्वविद्यालय, अल्मोड़ा से भौतिकी में एमएससी और बीएड की डिग्री प्राप्त की है। वर्तमान में वे प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण पर काम कर रही हैं। उनका दृढ़ विश्वास है कि गणित को बच्चों के लिए रोचक, आनन्ददायक और अर्थपूर्ण बनाना चाहिए। उन्हें ऐसा कक्षा माहौल तैयार करना पसन्द है, जिसमें बच्चे गतिविधियों, खेलों और जीवन से जुड़े अनुभवों के ज़रिए गणितीय सोच को समझ सकें और इससे उनमें आत्मविश्वास और जिज्ञासा बढ़े। गरिमा से garima.bhatt@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

**अनुवाद :** प्रमोद मैथिल **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

# विभिन्न तरह की एल्गोरिदम को समझना

अनुष्का टोणपि

**नवम्बर 2024 के अंक में प्रकाशित लेख [1] में हमने एल्गोरिदम की अवधारणा एवं इसके महत्त्व को जाना व समझा था। हमने देखा था कि अपने दैनिक जीवन में हम इसका किस तरह उपयोग करते हैं। इस लेख में हम इसके विभिन्न प्रकारों को जानेंगे व समझेंगे, और कक्षा में इन्हें प्रदर्शित करने लिए कुछ गतिविधियाँ सुझाएँगे।**

एल्गोरिदम निर्देशों की एक सूची है जो किसी समस्या को हल करने या किसी कार्य को पूरा करने में मदद करती है। हमने पहले भी चर्चा की है कि किसी समस्या को हल करने के लिए कई एल्गोरिदम का प्रयोग किया जा सकता है। लेकिन क्या आपको पता था कि कई अलग-अलग प्रकार की एल्गोरिदम हैं जो किसी समस्या को हल करने के लिए विभिन्न तरीक़ों/विधियों का प्रयोग करती हैं? कुछ आपको चुनाव करने में मदद करती हैं, कुछ सबसे तेज़ रास्ता ढूँढ़ने में मदद करती हैं, और कुछ वस्तुओं को सही क्रम में रखती हैं। इस लेख में, हम मज़ेदार और इंटरैक्टिव तरीक़ों से सबसे आम प्रकार की एल्गोरिदम के बारे में जानेंगे।


**चित्र-1** (Source: AI)

### 1. छँटाई एल्गोरिदम (Sorting algorithms) : चीज़ों को एक क्रम/श्रेणी में रखना

चलिए शुरुआत उसी से करते हैं जो हम सब करते हैं – व्यवस्थित करना! छँटाई एल्गोरिदम हमें वस्तुओं को एक ख़ास क्रम में व्यवस्थित करने में मदद करती है, जैसे कि सबसे छोटी से सबसे बड़ी, या वर्णानुक्रम अनुसार।

**छँटाई करना क्यों महत्त्वपूर्ण है** : जब आप अपनी किताबों को ऊँचाई के अनुसार, कपड़ों को रंग के अनुसार, या अपने क्रेयॉन को किसी इन्द्रधनुषी पैटर्न

**चित्र-2**

*की-वर्ड : गणनात्मक सोच, प्रक्रियाएँ, खोजना, छँटाई, एल्गोरिदम*

में व्यवस्थित कर रहे होते हैं, तो आप छँटाई कर रहे होते हैं। उदाहरण के लिए, कम्प्यूटर छँटाई का उपयोग ईमेल को तारीख़ के अनुसार, स्प्रेडशीट में संख्याओं, या खेलों में उच्च स्कोर के अनुसार व्यवस्थित करने के लिए करता है। **चित्र-2** में आप इन्द्रधनुष के रंगों के क्रम में व्यवस्थित छह क्रेयॉन देख सकते हैं।

वस्तुओं की छँटाई करने के कई अलग-अलग तरीक़े होते हैं। आगे छँटाई एल्गोरिदम की सूची दी गई है :

- **बुलबुले की तरह छँटाई (Bubble Sort) :** इस एल्गोरिदम में दो वस्तुओं के क्रमों/श्रेणी की आपस में तुलना की जाती है, और अगर वे ग़लत क्रम में होती हैं तो उनके क्रम/स्थान की अदला-बदली की जाती है। हर चरण में सबसे बड़ी वस्तु अन्त तक पहुँचा दी जाती है। उदाहरण के लिए, मान लीजिए हमारे पास बेतरतीब क्रम में कुछ संख्याएँ हैं : 1, 3, 4, 5, 2; और हम उन्हें आरोही क्रम (कम से ज़्यादा) में व्यवस्थित करना चाहते हैं। तब पहले चरण में हम पहली दो संख्याओं 1 और 3 पर विचार करते हैं। चूँकि वे क्रम में हैं, इसलिए हम उनकी जगह आपस में नहीं बदलेंगे। इसी तरह, हम अगली दो संख्याओं 3 और 4, या यहाँ तक कि 4 और 5 को भी आपस में नहीं बदलेंगे। लेकिन 5 और 2 क्रम में नहीं हैं, इसलिए हम 5 और 2 की जगह एक दूसरे से बदल देंगे। इस तरह हमें 1, 3, 4, 2, 5 मिलेंगे। अब तुलना की यही प्रक्रिया फिर दोहराएँगे। यानी एक बार फिर, शुरुआत से संख्या जोड़ों की आपस में तुलना करते जाएँगे। हम पाते हैं कि 4 और 2 क्रम में नहीं है तो उन्हें हम आपस में बदल देंगे। इस तरह हमें 1, 3, 2, 4, 5 मिलते हैं। अगले चरण की तुलना में, हम 3 और 2 को आपस में बदल देते हैं जिससे हमें 1, 2, 3, 4, 5 मिलते हैं। ध्यान दें कि कैसे संख्या 2 बाईं ओर खिसकती जाती है और 5 (सबसे बड़ी संख्या) अन्त में सरकती जाती है।
- **चुनना (Selection Sort) :** यह एल्गोरिदम पूरी सूची में से सबसे छोटी वस्तु को ढूँढ़कर उसे सबसे शुरू में रख देती है। फिर अगले चरण में अगली सबसे छोटी वस्तु को तलाशती है और उसे दूसरे क्रम पर रखती है, और इसी तरह यह पूरी छँटाई करती है। अब हम अपने पुराने उदाहरण को लेते हैं, लेकिन इस बार संख्याएँ अलग तरीक़े से गड्डमड्ड करते हैं : 5, 3, 4, 1, 2। सबसे छोटी वस्तु 1 है, इसलिए हम उसे बाईं ओर सबसे ऊपर रखते हैं : 1, 5, 3, 4, 2। फिर शेष वस्तुओं में से अगली सबसे छोटी वस्तु 2 है, जो 1 के बाद आती है : 1, 2, 5, 3, 4। इसी प्रकार, 3 और 4 भी अपने-अपने स्थानों पर तब तक रखते जाते हैं जब तक हमें पूरी तरह से क्रमबद्ध स्थिति 1, 2, 3, 4, 5 प्राप्त नहीं हो जाती।
- **प्रविष्ट (Insertion Sort) :** पहले से छँटी हुई सूची में प्रत्येक वस्तु को उसके सही स्थान पर प्रविष्ट करें। जैसे कि ताश खेलते समय हम अपने पत्तों को क्रम में जमाते हैं। मान लीजिए हमारे पास पहले वाले उदाहरणों में ली गई संख्याएँ ही हैं, लेकिन इस बार उनका क्रम है : 3, 1, 4, 2, 5।

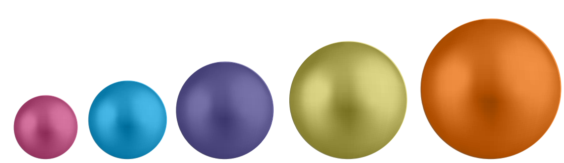
**प्रविष्ट** : मिश्रित ताश के पत्तों को क्रम में लगाना!

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| चरण-1 | 3 | | | | 1 | 4 | 2 | 5 |
| चरण-2 | 1 | 3 | | | 4 | 2 | 5 | |
| चरण-3 | 1 | 3 | 4 | | 2 | 5 | | |
| चरण-4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | |
| चरण-5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | |

**चित्र-3 : प्रविष्ट** : यहाँ हरा रंग उन ताश के पत्तों को दर्शा रहा है जो हाथ में हैं, और गुलाबी उन पत्तों को जो बाएँ से दाएँ के क्रम में उठाए जा रहे हैं।

**कक्षा में की जाने वाली गतिविधि :** 1 से 10 तक के संख्या कार्ड लेकर उन्हें फेंट लें। अब हरेक छँटाई विधि को आज़माएँ। कौन-सी विधि कम चरणों में पूरी होती है? कौन-सी विधि ज़्यादा आसान है?

दी गई तीनों छँटाई एल्गोरिदम को अलग-अलग आकार की पाँच गेंदों के साथ आज़माएँ जिन्हें सबसे छोटी (अवरोही) से बड़ी के क्रम में व्यवस्थित करना है।



**चित्र-4 :** सबसे छोटी से सबसे बड़ी गेंदें जो छाँटी गई सूची में हैं।

कौन-सी एल्गोरिदम सबसे तेज़/सबसे आसान है?

## 2. खोजना एल्गोरिदम (Searching algorithms) : जो आपको चाहिए उसे ढूँढ़ना

कल्पना कीजिए कि आप अपने स्कूल बैग में अपनी गणित की नोटबुक ढूँढ़ रहे हैं। आप हर वस्तु को तब तक देखते हैं जब तक आपको वह मिल न जाए। यह एक रैखिक खोज है!

रैखिक खोज वह होती है जब किसी विशिष्ट वस्तु को खोजने के लिए कई प्रकार की वस्तुओं को ध्यान से छाँटा जाता है।

**खोजना एल्गोरिदम के प्रकार :**

**रैखिक खोज (Linear Search) :** प्रत्येक वस्तु को एक-एक करके देखना। यह धीमी है, लेकिन ग़ैर-क्रमबद्ध/ग़ैर-श्रेणीबद्ध की गई सूचियों के लिए काम करती है।

**द्विआधरी खोज (Binary Search)** : यह सिर्फ़ क्रमबद्ध/श्रेणीबद्ध की गई सूचियों के लिए काम करती है। मान लीजिए आप सबसे छोटी से सबसे बड़ी के क्रम में व्यवस्थित संख्याओं की सूची में से किसी एक ख़ास संख्या को ढूँढ़ रहे हैं। यदि आपकी संख्या छोटी है तो सूची के बाएँ ओर के आधे हिस्से में ढूँढ़ें; यदि वह बड़ी है तो सूची के दाएँ ओर के आधे हिस्से में ढूँढ़ें। इस प्रक्रिया को तब तक दोहराते रहें जब तक आपको वांछित संख्या न मिल जाए। ध्यान दें कि यह एल्गोरिदम केवल संख्याओं के लिए ही नहीं, और भी कई वस्तुओं के लिए काम करता है! मान लीजिए आप अपने अँग्रेज़ी शब्दकोश में 'Parrot' शब्द का अर्थ देखना चाहते हैं। चूँकि शब्दकोश बहुत मोटा है और वर्णमाला क्रम के अनुसार व्यवस्थित हज़ारों शब्दों से भरा है। आप जानते हैं कि शुरुआत से पन्ने पलट-पलटकर ढूँढ़ने में काफ़ी समय लगेगा। इसलिए आप चतुराई से काम लेते हैं। आप शब्दकोश को ठीक बीच से खोलते हैं और उस पन्ने पर 'Lion' शब्द पाते हैं। आप जानते हैं कि वर्णमाला के क्रम में 'Parrot' शब्द 'Lion' शब्द के बाद आता है, इसलिए आप शब्दकोश के पहले भाग को नज़रअन्दाज़ कर देते हैं और केवल दूसरे भाग में शब्द तलाशेंगे। अब आप इस नए खण्ड के बीच में (शब्दकोश के आधे के आधे भाग में) जाते हैं और वहाँ 'Tiger' शब्द पाते हैं। चूँकि 'Parrot', 'Tiger' से पहले आता है, इसलिए अब आप 'Tiger' के बाद के सभी पन्नों को नज़रअन्दाज़ कर देते हैं और केवल 'Lion' व 'Tiger' के बीच आने वाले पन्नों को देखते हैं। आप यही प्रक्रिया दोहराते रहते हैं, हर बार बचे हुए भाग के बीच में खोलकर देखते हैं कि कौन-सा आधा भाग रखना है, जब तक कि आपको अन्ततः 'Parrot' शब्द मिल नहीं जाता।

**इसे आज़माएँ :** 1 से 50 तक संख्या लिखे हुए पत्तों के एक बेतरतीब ढेर में 27 संख्या वाला एक पत्ता छिपाएँ। फिर उसी पत्ते को पत्तों के एक क्रमबद्ध ढेर में सही जगह पर रखें। दोनों तरीक़ों से उसे ढूँढ़ने का प्रयास करें। अपनी इस खोज को विस्तार से बताएँ। किस ढेर में ढूँढ़ना आसान था? कौन-सी खोज तेज़ थी?

### 3. लालची एल्गोरिदम (Greedy algorithms): सबसे अच्छे को तुरन्त चुनना

इस उम्मीद में, कि सभी अच्छे विकल्प मिलकर सर्वोत्तम समग्र समाधान प्रदान करेंगे, लालची एल्गोरिदम हर चरण में जो सर्वोत्तम विकल्प चुन सकती है उसे चुनती है।

**उदाहरण :** कल्पना कीजिए कि आप अलग-अलग आकार के पेपरमिंट्स इकट्ठा कर रहे हैं। आप साइज़ में सबसे बड़ा पेपरमिंट चुनना चाहते हैं, लेकिन केवल तीन ही चुन सकते हैं। एक लालची रणनीति जो सबसे बड़ा नज़र आ रहा है उसे अन्य सभी से तुलना किए बिना तुरन्त चुन लेगी।

**चित्र-5** : पेपरमिंट्स

**गतिविधि** : मान लीजिए कि आपका जन्मदिन है और उपहार के तौर पर ख़रीदने के लिए आपको खिलौने चुनना है। आपके बक्से में सीमित जगह है – केवल तीन खिलौनों के लिए। सम्भावित 5 खिलौनों की एक सूची बनाइए। आपको हर एक खिलौने के साथ खेलने में कितना मज़ा आता है, इस आधार पर उन्हें 1 से 10 तक एक अंक दीजिए। उदाहरण के लिए, अगर आपको पहेलियों से खेलना पसन्द है तो पहेली वाले खिलौने को 10 में से 9 अंक दीजिए, और अगर आपको खिलौने वाली कारों से खेलना पसन्द नहीं है तो कार को 10 में से 3 अंक दीजिए। यदि आप सबसे ज़्यादा अंक पाने वाले खिलौनों को चुनने के लिए लालची एल्गोरिदम का इस्तेमाल करते हैं तो आपके पास तीनों पहेलियों वाले खेल हो सकते हैं। अब चुनाव का एक और प्रयास करें जिसमें किसी खिलौने का दोहराव न हो। आपको एक अलग तरह का लालची समाधान मिलेगा (क्योंकि पिछले समाधान में केवल अधिकतम आनन्द प्राप्त करने और इसे जितना हो सके उतना अधिक बनाने के लिए उच्चतम स्कोर वाले खिलौने शामिल करते जाना था)।

अपने जीवन की किसी अन्य स्थिति के बारे में सोचिए जहाँ आप किसी समस्या को हल करने के लिए लालची एल्गोरिदम का उपयोग कर सकें।

### 4. पुनरावर्ती एल्गोरिदम (Recursive algorithms) : छोटी-छोटी समस्याओं को हल करके समस्या का समाधान करना

पुनरावर्ती एल्गोरिदम किसी समस्या का समाधान उसी समस्या के छोटे-छोटे संस्करण को हल करके करती है। यह उसी प्रकार है जिस प्रकार आप अपने छोटे भाई-बहन से मदद माँगते हैं और वह उनसे भी छोटे भाई-बहन से, और यह सिलसिला चलता रहता है।

**उदाहरण :** रशियन मैट्रियोश्का गुड़िया वे गुड़ियाँ हैं जो एक के अन्दर एक रहती हैं। किसी समस्या को मैट्रियोश्का गुड़ियों के एक सेट के रूप में सोचिए, उस एक समस्या के अन्दर छोटी-छोटी समस्याएँ बसी हुई हैं।

**चित्र-6 :** मैट्रियोश्का गुड़ियाँ
(source: Macalester College, Russian studies)

**गतिविधि :** जिस तरह नीचे दिखाया गया है उस तरह कप की एक मीनार बनाइए।

**चित्र-7 :** कप की एक मीनार

अब कपों को हटाने का कोई तरीक़ा सोचने की कोशिश कीजिए। सबसे नीचे बाईं ओर वाले कप को हटाने के लिए, आपको उसके ऊपर वाले कपों को हटाना होगा, और उन कपों को हटाने के लिए, आपको सबसे ऊपरी कप को हटाना होगा। इस तरह, कपों को हटाने की समस्या एक पुनरावर्ती एल्गोरिदम का उपयोग करके एक सरल समस्या में बदल जाती है, और जब आप समस्या का सबसे छोटा भाग हल कर लेते हैं, बाक़ी भाग क्रमिक रूप से हल होते जाते हैं। यानी जब आप ऊपरी कप को हटाते हैं, आप कपों की अगली पंक्ति हटाने के लिए आगे बढ़ सकते हैं, और अन्तत: कपों की आख़िरी पंक्ति हटा सकते हैं।

पुनरावर्ती एल्गोरिदम का उपयोग करके हल की जाने वाली समस्याएँ बड़ी कक्षाओं के लिए अधिक उपयुक्त हैं, इसलिए यहाँ उनके उदाहरण नहीं दिए जा रहे हैं।

### 5. हर सम्भव प्रयास करें (Brute force) : हर सम्भावना को आज़माना

हर सम्भव प्रयास का मतलब है हर सम्भावना को करके देखना। यह एक चतुर तरीक़ा तो नहीं है, लेकिन समाधान ज़रूर सुनिश्चित करता है।

**उदाहरण :** मान लीजिए किसी दरवाज़े पर एक ताला लगा हुआ है, और आपके पास चाबियों का एक सेट है जिसमें कुल 10 चाबियाँ हैं। आपको पता नहीं है कि किस चाबी से दरवाज़ा खुलेगा, इसलिए आपको हर एक चाबी को आज़माना होगा, और उस ताले में हर चाबी लगाकर पता लगाना होगा कि किससे दरवाज़ा खुलेगा।

**गतिविधि :** विद्यार्थियों को 1 से 20 तक की संख्या में से कोई एक संख्या सोचने दीजिए और उनके साथी को हर सम्भव प्रयास विधि का उपयोग करके सोची गई संख्या का अनुमान लगाने दीजिए।

सही संख्या पता करने में कितने अनुमान लगे?

### निष्कर्ष : एक एल्गोरिदम की तरह सोचें!

एल्गोरिदम हर जगह मौजूद हैं। वे हमें अधिक व्यवस्थित, अधिक कुशल, और अधिक रचनात्मक बनने में मदद कर सकती हैं। विभिन्न प्रकार की एल्गोरिदम सीखकर आप एक बेहतर विचारक और समस्या समाधानकर्ता बन सकते हैं, क्योंकि आप इन एल्गोरिदम की मदद से किसी समस्या को हल करने के लिए विभिन्न तरीक़ों का उपयोग कर सकते हैं।

अगली बार जब आप किसी मुश्किल चुनौती का सामना करें तो ख़ुद से पूछें : क्या मैं इसे चरणों में तोड़ सकता हूँ? क्या मैं लालची, हर सम्भव प्रयास या पुनरावर्ती एल्गोरिदम जैसी विभिन्न विधियाँ आज़मा सकता हूँ?

क्योंकि जब आप एक एल्गोरिदम की तरह सोचते हैं, कोई भी समस्या बहुत बड़ी नहीं लगती!

**सम्पादक की टीप :** किसी के मन में यह ख़्याल आ सकता है कि क्या इन एल्गोरिदम को प्राथमिक कक्षाओं में ही पढ़ाना शुरू कर दिया जाना चाहिए? हम निश्चित रूप से तलाश करने के लिए एल्गोरिदम का नाम बताने और परिभाषा देने की सिफ़ारिश नहीं करेंगे; हालाँकि, आपने देखा होगा कि उपयोग किए गए अधिकांश उदाहरण प्राथमिक विद्यालय के बच्चों के दैनिक जीवन से हैं। ऐसे कार्यों की रूपरेखा तैयार करना दिलचस्प होगा जिनमें खोजने की आवश्यकता होती है – यदि विद्यार्थी इन विभिन्न विधियों का उपयोग कर सकें, और कार्य के बाद चिन्तन व चर्चा के दौरान उनकी तुलना कर सकें तो वे कम्प्यूटेशनल सोच के विचारों को ग्रहण कर सकेंगे। वे एक मज़ेदार तरीक़े से और बिना किसी डर के इसकी प्रासंगिकता को समझ सकेंगे।

## Reference


1. Tonapi, A. (2024). Introduction to algorithms. *At Right Angles, (20),* 14–19. https://bit.ly/3XJ6E1e



**अनुष्का टोणपि** बेंगलूरु के अल्पाइन पब्लिक स्कूल में ग्यारहवीं कक्षा की छात्रा हैं। वे न्यूयॉर्क एकेडमी ऑफ़ साइंसेज की एक युवा सदस्य हैं और स्पिरिट ऑफ़ रामानुजन फ़ेलोशिप पुरस्कार विजेता हैं। उन्हें गणित के प्रश्न हल करने में मज़ा आता है। थ्योरिटिकल कम्प्यूटर साइंस में उनकी रुचि है। अनुष्का को शतरंज खेलना बहुत पसन्द है। वे अपने ख़ाली समय में कर्नाटक संगीत का अभ्यास करती हैं। उनसे Anushka.tonapi@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।


**अनुवाद :** प्रियेश गुप्ता **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अतुल अग्रवाल

# डेटा संग्रहण : उच्च प्राथमिक विद्यार्थियों द्वारा किया गया एक प्रयोग

निधि, अश्वत, व्यान, विनय

**हम अपनी साप्ताहिक 'गणित मन्थन' कक्षा में हर हफ़्ते स्कूली विद्यार्थियों के साथ मिलकर गणितीय अन्वेषण पर काम करते हैं। एक बार मैंने प्रायिकता (probability) से जुड़ा एक सवाल उन विद्यार्थियों के सामने रखा, जिन्हें इस विषय की केवल प्राथमिक जानकारी थी और उनका इस विषय से अब तक औपचारिक तौर पर परिचय नहीं हुआ था। सवाल कुछ ऐसा था : तुम फ़ोन पर अपने एक दोस्त से बात कर रहे हो, जो कि एक लड़का है। वह तुमसे पूछता है : "मेरा एक सहोदर (सिब्लिंग) है। क्या तुम अन्दाज़ा लगा सकते हो कि वह लड़का है या लड़की?" मैंने अपने विद्यार्थियों से पूछा कि अगर तुम्हें यह अनुमान लगाना हो कि उसका सहोदर कौन है – लड़का या लड़की, तो तुम क्या बताओगे?**

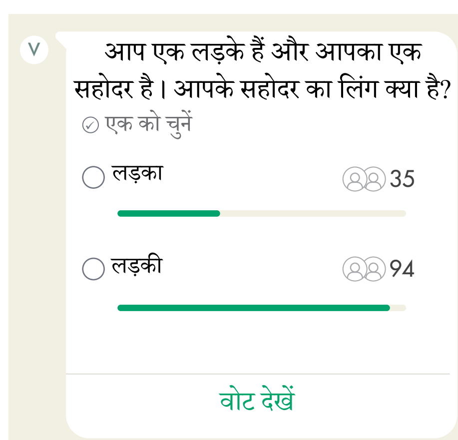
**इस लेख में तीन विद्यार्थियों के अनुभव को उनकी ही ज़ुबानी पेश किया गया है। इसमें तीनों ने बताया है कि किस तरह से प्रयोगसिद्ध आँकड़ों का उपयोग करके उन्होंने इस समस्या को हल किया। मुझे उम्मीद है कि गणित के शिक्षक इस गतिविधि से यह समझ पाएँगे कि विद्यार्थियों के लिए प्रासंगिक उदाहरणों के माध्यम से डेटा संग्रह और डेटा प्रबन्धन को किस तरह रोचक व दिलचस्प बनाया जा सकता है। इस लेख से यह भी समझा जा सकता है कि डेटा या आँकड़ों का विश्लेषण करने से पहले उसके संग्रहण की प्रक्रिया के बारे में किस प्रकार चर्चा की जा सकती है, वह भी उच्च प्राथमिक स्तर के विद्यार्थियों की सीखने की क्षमता के दायरे में रहकर। – *विनय नायर***

*कक्षा में सवाल पूछा गया था, "मैं एक लड़का हूँ और मेरा एक सहोदर है। वह लड़का है या लड़की?"*

जब हमने कक्षा में पहली बार यह सवाल सुना, तो हममें से अधिकांश को लगा कि लड़का या लड़की होने की सम्भावना तो बराबर है।

लेकिन हमारी इस सोच की पुष्टि करने के लिए हमें आँकड़े जुटाने को कहा गया, ताकि देखा जा सके कि क्या हमारे संकलित आँकड़े भी इसी निष्कर्ष तक पहुँचते हैं। इस तरह हमने सांख्यिकी और गणित का इस्तेमाल किया। नीचे बताया गया है कि इस कार्य को अंजाम देते समय हममें से प्रत्येक ने किस प्रक्रिया का पालन किया।

**व्यान :** मैंने यह प्रयोग एक व्हाट्सएप पोल के ज़रिए किया। यह पोल ऐसे समूह में साझा किया गया, जिसमें 129 सदस्य लड़के थे और हर किसी का केवल एक ही सहोदर (लड़का या लड़की) था। मुझे कुल 129 जवाब

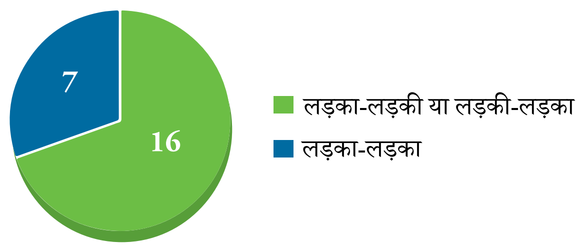



प्राप्त हुए। इनमें 94 ने बताया कि उनका सहोदर एक लड़की है। प्रायिकता की जो बुनियादी समझ मुझे थी, उसके आधार पर लड़के का सहोदर लड़की होने की सम्भावना 94/129 यानी लगभग 2/3 पाई गई।

*की-वर्ड : डेटा संग्रह, प्रयोगों की डिज़ाइनिंग, प्रायिकता*

**अश्वत :** मैंने अपनी माँ से हमारे उन पुरुष रिश्तेदारों की जानकारी देने को कहा, जिनका केवल एक ही सहोदर है। मैंने दो कॉलम बनाए। पहले कॉलम में लड़का-लड़की की जोड़ियाँ और दूसरे में लड़का-लड़का की जोड़ियाँ दर्ज कीं। मेरे द्वारा एकत्र किए गए आँकड़ों का परिणाम इस प्रकार रहा :

- 16 लड़का-लड़की/ लड़की-लड़का की जोड़ियाँ (अगर लड़का बड़ा है तो 'लड़का-लड़की' और लड़की बड़ी है तो 'लड़की-लड़का' की जोड़ी)
- 7 लड़का-लड़का की जोड़ियाँ




लड़का-लड़की/ लड़की-लड़का जोड़ियों का कुल जोड़ियों में अनुपात 16/23 यानी 2/3 पाया गया।

**निधि :** जब मेरे सामने यह सवाल आया तो मैंने बिना किसी डेटा को देखे यह मान लिया कि किसी व्यक्ति का सहोदर लड़का या लड़की होने की सम्भावना 50% होगी। यह जानने के लिए कि मेरी ये धारणा सही है या नहीं, मैंने अपनी हाउसिंग सोसायटी के कुछ पुरुषों और अपने स्कूल के कुछ लड़कों से पूछा कि क्या उनका सिर्फ़ एक ही सहोदर है और यदि हाँ, तो वह लड़का है या लड़की? जो आँकड़े सामने आए, वो मेरे अनुमान के बिल्कुल विपरीत थे। मैंने विभिन्न लोगों से जो आँकड़े एकत्र किए, उसका सार नीचे प्रस्तुत है।

चूँकि दोनों सहोदर में से एक तो लड़का है ही, इसलिए उत्तरदाताओं को दो श्रेणियों में विभाजित किया जा सकता है :

- ऐसा लड़का, जिसका सहोदर भी लड़का है (लड़का-लड़का की जोड़ी)
- ऐसा लड़का, जिसकी सहोदर लड़की है (लड़का-लड़की की जोड़ी या लड़की-लड़का की जोड़ी)

मुझे जो आँकड़े मिले, वे इस प्रकार हैं :

| लड़का-लड़का | लड़का-लड़की/ लड़की-लड़का | कुल |
|---|---|---|
| 15 | 34 | 49 |

लड़का-लड़की की जोड़ी/ कुल जोड़ियों की संख्या = 34/49 = 2/3

**विनय :** जैसी कि मुझे उम्मीद थी, अधिकांश विद्यार्थियों के लिए प्रासंगिक इस उदाहरण के ज़रिए डेटा संग्रह और डेटा प्रबन्धन दोनों ही रोचक बन गए। उनके लिए ये डेटा इकट्ठा करना मुश्किल नहीं था और इस प्रक्रिया में उन्हें आँकड़े एकत्र करने के अलग-अलग तरीक़ों और उनके विश्लेषण का प्रत्यक्ष अनुभव भी हुआ।

जब विद्यार्थियों के हाथों में निष्कर्ष आ गए, तो मैंने बातचीत को इस तरह से आगे बढ़ाया।

मान लीजिए कि हमारे पास 100 सहोदर जोड़ियाँ हैं। तो चार प्रकार की जोड़ियाँ सम्भव हैं। सांख्यिकी के अनुसार हम कह सकते हैं कि प्रत्येक प्रकार की जोड़ी की सम्भावना 25% होगी।

| अग्रज सहोदर →<br>अनुज सहोदर ↓ | लड़का | लड़की |
|---|---|---|
| लड़का | 25 | 25 |
| लड़की | 25 | 25 |

यदि हम लड़का-लड़की की जोड़ियों को गिनते हैं, तो ऐसी कुल 50 जोड़ियाँ होंगी (25 जोड़ियाँ ऐसी होंगी, जिनमें लड़की बड़ी होगी और लड़का छोटा, जबकि 25 जोड़ियाँ ऐसी होंगी जिनमें लड़की छोटी होगी और लड़का बड़ा)। लड़का-लड़का की जोड़ियाँ सिर्फ़ 25 होंगी। लड़की-लड़की की जोड़ियों का भी एक वर्ग है, लेकिन यहाँ हम इसे शामिल नहीं कर रहे, क्योंकि जोड़ियों में एक लड़के का होना अनिवार्य है। लिहाज़ा, यह साफ़ है कि लड़का-लड़का की जोड़ी के तुलना में लड़का-लड़की की जोड़ी की सम्भावना अधिक होगी।

P (लड़का-लड़की जोड़ी मिलने की सम्भावना) = 50/75 = 2/3

जब हमने अपने डेटा संग्रह अभ्यास के नतीजों को तर्क के आधार पर समझा, तो पाया कि किसी लड़के का सहोदर लड़का या लड़की होने की सम्भावना बराबर नहीं है। और अपने उस दोस्त के सवाल के जवाब में हमें कहना चाहिए था कि सहोदर एक लड़की होने की सम्भावना अधिक है, लड़का होने के!

हमने यह भी देखा कि सर्वेक्षण करने के लिए हर किसी ने अलग-अलग तरीक़ा अपनाया था।

| | निधि | व्यान | अश्वथ |
|---|---|---|---|
| सर्वे कैसे किया गया | अपार्टमेंट के पुरुषों व स्कूल के लड़कों से पूछा | रजनीकान्त फैन ग्रुप में वाट्सएप पोल के द्वारा पूछा गया | अपनी माँ से पुरुष रिश्तेदारों की जानकारी माँगी |
| सर्वे में कितने लोगों ने भाग लिया | 49 | 129 | 23 |

हालाँकि इस सवाल को हल करने के लिए हम सबने अलग-अलग तरीक़े अपनाए, लेकिन सभी लगभग एक ही जवाब (यानी 2/3) पर पहुँचे। कुल मिलाकर, यह सवाल हम सभी के लिए बेहद रोचक था और जवाब एकदम चौंकाने वाला रहा। हमने शुरू में जो सोचा था, वह आख़िर में ग़लत साबित हुआ।

## शिक्षक की टिप्पणियाँ

जब यह सवाल पूछा गया कि "मैं एक लड़का हूँ और मेरा एक सहोदर है। वह लड़का है या लड़की?" तो अधिकांश विद्यार्थियों को यह सवाल बेहद सीधा और साधारण लगा। सभी का सहज अनुमान यही था कि लड़का या लड़की होने की सम्भावना 50:50 यानी बराबर होगी। लेकिन यही सहज अनुमान बाद में चर्चा का विषय बन गया कि क्या वास्तव में यह सही है? और अगर नहीं, तो इसे कैसे परखा जा सकता है? चूँकि विद्यार्थियों ने अभी तक सापेक्ष प्रायिकता (conditional probability) का अध्ययन नहीं किया था, इसलिए उनके पास तर्क कम और अनुमान ज़्यादा थे। इसके बाद बातचीत दो निष्पक्ष सिक्कों (fair-coins) को एक साथ उछालने के उदाहरण की तरफ़ मुड़ गई। विद्यार्थी इस पर चर्चा करने लगे कि अगर पहले सिक्के पर चित (H) और दूसरे सिक्के पर पट (T) आए या पहले सिक्के पर पट (T) और दूसरे पर चित (H) आए, तो क्या ये दोनों स्थितियाँ एक जैसी मानी जाएँगी? विद्यार्थी इस बात से तो सहमत थे कि सिक्का उछालने में HT और TH दो अलग-अलग परिणाम सम्भावित होते हैं, लेकिन जब यही बात उन्होंने लड़का-लड़की के क्रम पर लागू करने की कोशिश की, तो दुविधा में पड़ गए। वे इस बात को लेकर पक्का नहीं थे कि 'लड़का-लड़की' और 'लड़की-लड़का' दो अलग-अलग सम्भावनाएँ मानी जानी चाहिए या एक।

चर्चा के आख़िर में कुछ विद्यार्थियों को तो यक़ीन हो गया था कि यदि एक बच्चा लड़का है, तो दूसरे बच्चे के लड़की होने की सम्भावना 2/3 रहेगी। लेकिन कक्षा के कुछ विद्यार्थी अब भी इससे सहमत नहीं थे। वे यह जानना चाहते थे कि क्या यह गणितीय निष्कर्ष वास्तविक जीवन में भी उतना ही सटीक साबित होगा। यही जिज्ञासा उन्हें एक और प्रयोग की ओर ले गई, ताकि वे ख़ुद यह जाँच सकें कि गणितीय उत्तर वास्तविक जीवन के आँकड़ों से मेल खाता है या नहीं।

इसके बाद विद्यार्थियों से कहा गया कि वे ख़ुद से आँकड़े एकत्रकर उनका विश्लेषण करें। इस बार उन्हें आँकड़ों के संग्रहण की प्रक्रिया के बारे में कोई दिशा-निर्देश या संकेत नहीं दिए गए। यह उनकी अपनी पसन्द पर निर्भर था कि वे किस तरह से आँकड़े जुटाते हैं। आँकड़ों के संग्रहण के बाद विद्यार्थियों ने एक-दूसरे की विधियों को देखकर मतदान किया और बताया कि किसका तरीक़ा दूसरे से बेहतर था। जैसे, किसी ने तर्क दिया कि व्हाट्सएप ग्रुप से जुटाए गए आँकड़ों पर उतना भरोसा नहीं किया जा सकता, क्योंकि ग्रुप के हर सदस्य को हम व्यक्तिगत रूप से नहीं जानते हैं। वहीं किसी और ने कहा कि एक परिवार से आँकड़े जुटाने पर कुछ जैविक कारकों की वजह से किसी एक लिंग (लड़का या लड़की) की संख्या अधिक हो सकती है। इससे आँकड़ों में विसंगतियों की आशंका रह सकती है। इन चर्चाओं से विद्यार्थियों को यह भी समझ में आया कि आँकड़ों के संग्रहण की प्रक्रिया कितनी जटिल हो सकती है और यदि हमें उन्हीं आँकड़ों के आधार पर निष्कर्ष निकालने हैं, तो कितनी सावधानी बरतनी चाहिए। गणित की कक्षाओं में आमतौर पर डेटा प्रस्तुति और डेटा प्रबन्धन पर ज़ोर दिया जाता है, लेकिन डेटा संग्रहण को भी एक शैक्षणिक गतिविधि के तौर पर शामिल किया जा सकता है। जब आँकड़ों के संग्रहण के बाद इस तरह की चर्चाएँ होती हैं, तो विद्यार्थी आलोचनात्मक सोच और मूल्यांकन के लिए प्रेरित होते हैं।

सटीक एवं सार्थक आँकड़ों का संग्रहण तो इस प्रक्रिया का एक पहलू था ही, साथ ही प्रायिकता की बुनियादी समझ के ज़रिए तर्क की संरचना को समझना भी उतना ही ज़रूरी हिस्सा था।

**अश्वत** अरुणाचलम चेन्नई के टी. नगर स्थित पीएसबीबी स्कूल में छठी कक्षा के छात्र हैं। उन्हें गणित में गहरी रुचि है और वे *एप्सिलॉन इंडिया* और *आरएएम मैथ्स सर्कल चेन्नई* जैसे प्रतिष्ठित गणित शिविरों का हिस्सा रह चुके हैं। उनसे ashwath.arunachalam20@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

**निधि नायक** बेंगलूरु स्थित श्री कुमारन चिल्ड्रन होम स्कूल में आठवीं कक्षा की छात्रा हैं। उन्हें गणित से गहरा लगाव है और वे अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी में आयोजित *ऑल गर्ल्स मैथ नर्चर कैम्प* और *रेजिंग ए मैथमेटिशियन ट्रेनिंग प्रोग्राम* जैसी गणितीय गतिविधियों में हिस्सा ले चुकी हैं। उनसे nidhijnayak@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

**व्यान गुप्ता** दिल्ली के एलेन हाउस पब्लिक स्कूल में आठवीं कक्षा के छात्र हैं। उन्हें गणित अत्यन्त प्रिय है और वे *एप्सिलॉन इंडिया 2024* और *आरएएम मैथ्स सर्कल चेन्नई* के प्रतिभागी रह चुके हैं। उनसे vyan.gupta@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

**विनय नायर** एक गणित शिक्षक हैं और *रेजिंग ए मैथमेटिशियन फ़ाउण्डेशन* तथा *विचार वाटिका* के सह-संस्थापक भी हैं। वे ऐसे विद्यार्थियों के साथ कार्य करते हैं, जिनमें गणित के प्रति गहरा लगाव होता है। उनसे vinay@vicharvatika.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

**अनुवाद :** जयजीत अकलेचा **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

# सीट नम्बर 22

अशोक प्रसाद

**क्या बस की सीटों की व्यवस्था और एक आयताकार लहर जैसी आकृति में कोई सम्बन्ध हो सकता है? खुले सवाल कैसे अनजाने सम्बन्ध उजागर करते हैं? मैं इस लेख में कक्षा के अपने एक अनुभव के बारे में बात कर रहा हूँ, जहाँ बच्चों ने अपनी कल्पना की मदद से ठोस चीज़ों और अमूर्त को आपस में जोड़ा। खुली बातचीत के दौरान बहुत-सी नई बातें उभरीं।**

मंगलवार की एक सुबह थी। गाँव के सरकारी स्कूल की कक्षा-7 में पढ़ने वाले 12 बच्चे थोड़ा चौंक गए जब मैं उनकी मैडम की जगह कक्षा में आया। थोड़े हँसी-मज़ाक और बातें करने के बाद मैंने उनसे हल्के-फुल्के अन्दाज़ में पूछा, “आप में से कौन-कौन बस में सफ़र कर चुका है? आप कहाँ गए थे और क्यों? बस अन्दर से कैसी होती है? आपने कितनी तरह की बसें देखी हैं?”

कक्षा खिल उठी और बच्चे अपनी-अपनी यात्राओं की कहानियाँ बताने लगे। कोई नानी के यहाँ गया था, कोई मौसी के पास। साफ़ था कि सबने कभी-न-कभी बस में सफ़र किया था। मैंने उन्हें बताया कि मैं दूसरे स्कूल के बच्चों से बस की सीटों के नम्बर के बारे में बातें कर रहा था। तभी सुरभि ने एक मज़ेदार सवाल पूछा :

सुरभि

एक बार मैं बस से नानी के घर हरिद्वार जा रही थी। मैंने देखा कि मेरी सामने वाली सीट का नम्बर 22 था। तो मेरी सीट का नम्बर क्या था?

बच्चो, क्या आप यह पता लगाने में मेरी मदद कर सकते हो?

शिक्षक

**त्वरित अटकल नया सिखाने का एक अच्छा मौक़ा होता है**

ख़ुशी

23 होगा, क्योंकि 22 के बाद 23 ही आता है!

*की-वर्ड : सीट संख्या, पैटर्न, सम्बन्ध, विज़ुअलाइज़ेशन, सम्प्रेषण*

प्रियांशु

अगर बस में सीटों का एक ही कॉलम होता, तो हाँ, उत्तर 23 हो सकता था। लेकिन जिन बसों को मैंने देखा है, उनमें एक-एक क़तार में एक से ज़्यादा सीटें होती हैं। इसलिए हमें और सम्भावनाओं पर भी सोचना होगा।

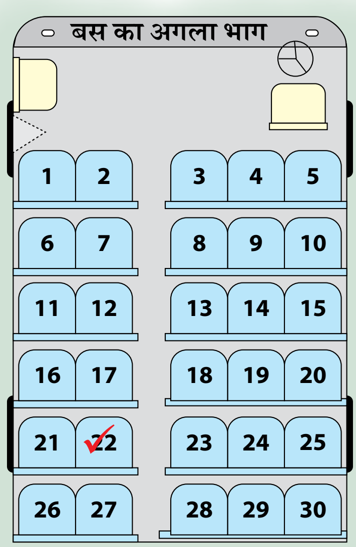
विनोद

हाँ सर, मुझे लगता है कि हमें बस की सीटों का एक चित्र बनाना चाहिए ताकि हम जान सकें कि सीटें कैसे लगी होती हैं। इससे हमें सुरभि की सीट के बारे में सही पता चलेगा।

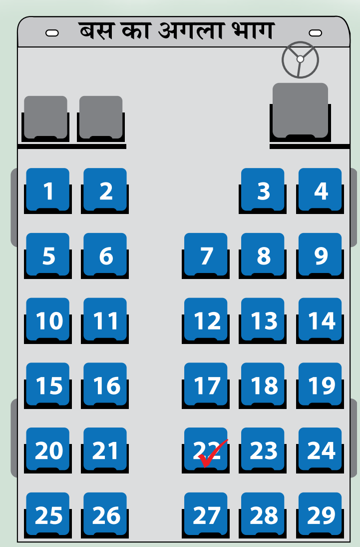
## चित्र बनाकर हल ढूँढ़ना

शायद आप सभी को चित्र बनाना पसन्द है। इससे गणित और भी मज़ेदार हो जाता है। तो चलो, आप सब एक बस का चित्र बनाओ और सीटों को नम्बर दो, जैसा आपने देखा हो।

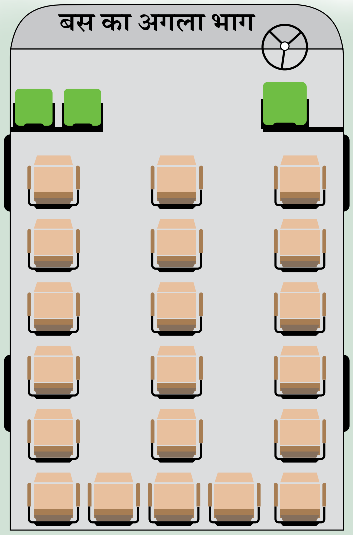
शिक्षक



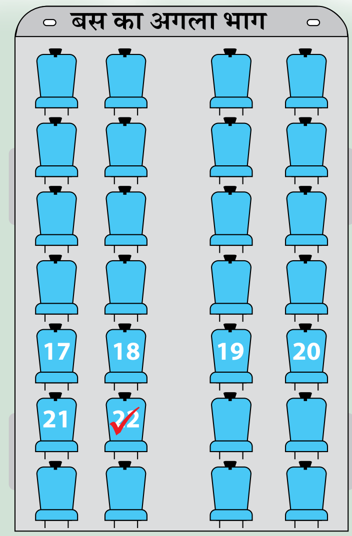

**चित्र-1 :** दीपक का लेआउट : हर क़तार में 2+3 सीटें हैं। उसने हर सीट को नम्बर दिया है, इसलिए उसका अनुमान है कि सुरभि की सीट का नम्बर 27 होगा। लेकिन सवाल यह है कि उसने सीटों को नम्बर कैसे दिए?




**चित्र-2 :** प्रियांशु का लेआउट : उसे भी लगता है कि सुरभि की सीट का नम्बर 27 है, लेकिन उसके चित्र में नम्बर देने का तरीक़ा दीपक से अलग है। उसके लेआउट में सबसे आगे की पंक्ति में सिर्फ़ चार सीटें हैं।




**चित्र-3 :** योगेश का लेआउट : इसमें दरवाज़ा, खिड़कियाँ, बस ड्राइवर की सीट और सभी सीटें साफ़-साफ़ दिखाई गई हैं। भले ही योगेश ने कोई अनुमान नहीं लगाया, लेकिन यह साफ़ था कि उसने बस के बारे में अच्छे से सोचा और कई ज़रूरी चीज़ें दिखाने की कोशिश की है।




**चित्र-4 :** ऋतिक का लेआउट : इसमें हर पंक्ति में 2+2 सीटें हैं। ऋतिक के हिसाब से, सुरभि की सीट का नम्बर 26 है। तो ऋतिक ने सीटों को नम्बर किस तरह दिया?

आप सबने बस की सीटें अलग-अलग ढंग से बनाईं, फिर भी आप में से ज़्यादातर एक जैसे नतीजे पर पहुँचे। बच्चो, इस बारे में आपका क्या कहना है?

**शिक्षक**

## उत्तर अनेक, रास्ते अनेक

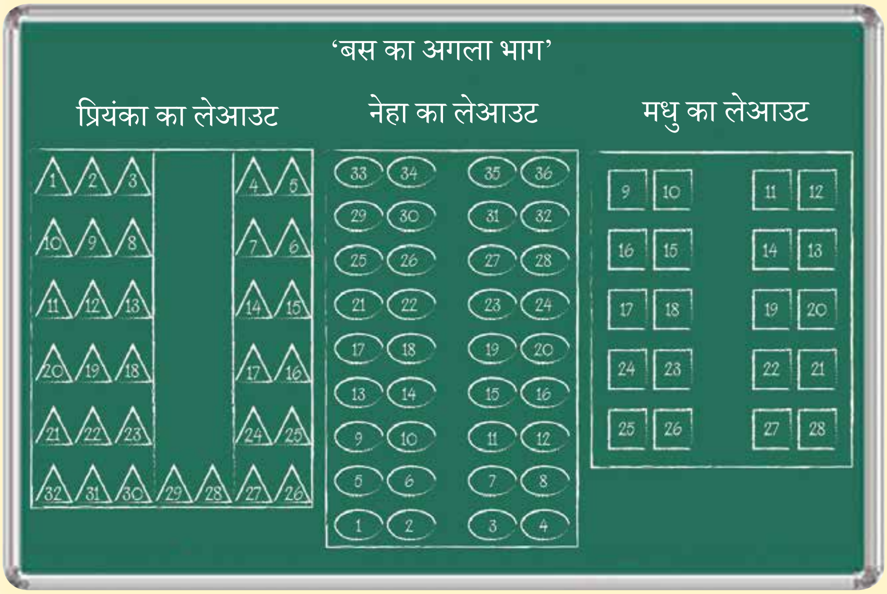
**नेहा**

सर, यह इस बात पर निर्भर करता है कि हम बस का चित्र कैसे बनाते हैं। सुरभि की सीट 26 भी हो सकती है, 27 भी या कुछ और भी। मतलब कई जवाब सही हो सकते हैं। जब मैंने बस का चित्र बनाया तो मैंने सीटों की गिनती एक अलग जगह से शुरू की और तब मुझे समझ आया कि हर बार सीट नम्बर अलग हो सकता है।

नेहा, क्या आप हमें दिखा सकती हैं कि आपको एक से ज़्यादा जवाब कैसे मिले?

**शिक्षक**

हाँ सर, बिल्कुल।




चित्र-5

नेहा

अगर हम बाईं तरफ़ सबसे पहली सीट को 1 मानकर नम्बर देना शुरू करें, तो सुरभि की सीट 31 हो सकती है।

अगर मैं गिनती बाईं तरफ़ की सबसे पिछली सीट से शुरू करूँ, तो सुरभि की सीट का नम्बर 18 आएगा।

और अगर मधु भी गिनती बाईं तरफ़ से शुरू करता है, लेकिन सीटों को थोड़े अलग तरीक़े से नम्बर देता है, तो उस हिसाब से सुरभि का सीट नम्बर 27 हो सकता है।

इसीलिए मुझे लगता है कि इस सवाल का सिर्फ़ एक सही जवाब नहीं हो सकता। सब कुछ चित्र बनाने पर निर्भर करता है। शुरुआत में तो मैं हर सीट का बहुत बारीकी से चित्र बना रही थी, लेकिन फिर मुझे समझ आया कि इतना सटीक चित्र बनाना ज़रूरी नहीं है। मैंने बस सीटों को अलग-अलग तरीक़ों से नम्बर देना शुरू किया और तब मुझे महसूस हुआ कि सीटों की व्यवस्था बदलने से सुरभि का सीट नम्बर भी बदल सकता है।

शाबाश, नेहा! आपने अच्छे से समझाया कि हम शुरू कहाँ से करते हैं और सीटों को कैसे जमाया गया है, इससे नतीजा बदल सकता है।

शिक्षक

मधु

सर, मैंने थोड़ी अलग तरह से काम किया। मैंने अपने चित्र में कोई नम्बर ही नहीं लिखा। मैंने बस हर सीट के लिए साधारण से डिब्बे (आयत) बना दिए। इस तरीक़े से मैं कहीं से भी नम्बर देना शुरू कर सकता था। इससे यह समझ में आता है कि सुरभि की सीट का नम्बर हर बार एक जैसा नहीं होगा। वह इस बात पर निर्भर करेगा कि हम सीटों को नम्बर कैसे देते हैं।

मुझे बहुत अच्छा लग रहा है कि आप सब इस समस्या को समझने के लिए चिह्नों और चित्रों का इस्तेमाल कर रहे हैं। इससे पता चलता है कि जब हम किसी चीज़ को दिखाने के अलग-अलग तरीक़े अपनाते हैं (चाहे वे बारीकी से बनाए गए चित्र हों या साधारण से आयत) तो हम समस्या को समझने के नए रास्ते खोलते हैं। गणित सिर्फ़ एक 'सही' जवाब पाने का तरीक़ा नहीं है, बल्कि यह तो विचारों की खोज और यह समझने की प्रक्रिया है कि सवाल को रखने के हमारे तरीक़े से उसके कई सही हल निकल सकते हैं।

शिक्षक

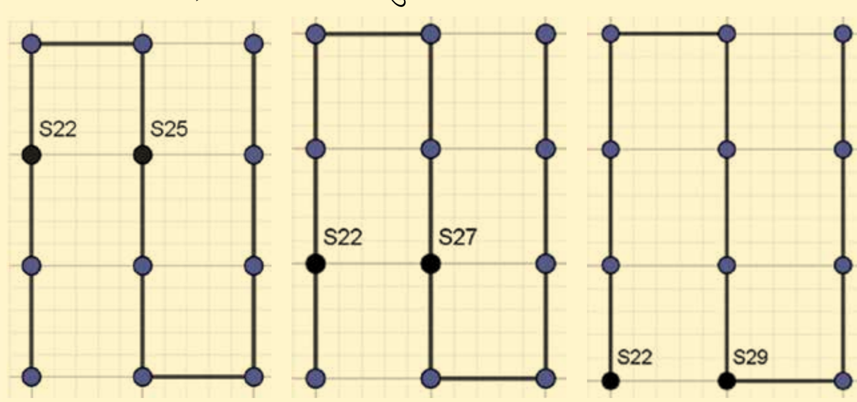
## अमूर्त सोच से खेलना

मैंने देखा कि मनीषा और अर्पित ने बाक़ी सबसे बिल्कुल अलग तरीक़ा अपनाया है। जैसे आप सबने बस की सीटों का लेआउट बनाया, वैसे इन्होंने नहीं किया, बल्कि इन्होंने एक आयताकार लहर वाला पैटर्न बनाया है। मनीषा, क्या आप बता सकती हैं आपके बनाए हुए पैटर्न के हिसाब से सुरभि की सीट का नम्बर क्या है?

शिक्षक

मनीषा

जी सर, मेरे बनाए हुए चित्र के हिसाब से, नेहा और मधु की बात सही लगती है। सुरभि की सीट का नम्बर कुछ भी हो सकता है। अगर चित्र-6 में S22 सुरभि के सामने वाली सीट है, तो उस हिसाब से सुरभि की सीट का नम्बर 25 होगा।




मनीषा का लेआउट अर्पित का लेआउट अमायरा का लेआउट

**चित्र-6**

यह तो वाकई दिलचस्प है। और आपने पूरी बस का लेआउट बनाने की जगह सिर्फ़ इतना छोटा पैटर्न क्यों बनाया?

शिक्षक


अर्पित

सर, मुझे लगता है कि पूरी बस का चित्र बनाना ज़रूरी नहीं है। इस सवाल का जवाब देने के लिए हमें सिर्फ़ यह समझना था :

i. हर पंक्ति में कितनी सीटें हैं

ii. नम्बर आगे से दिए जा रहे हैं या पीछे से

iii. नम्बर हमेशा बाईं ओर से दिए जाते हैं या फिर लहरदार ढंग से

हमने जो छोटा-सा पैटर्न बनाया, उसमें ये सारी बातें आ जाती हैं।

समझ गया। मतलब आपके हिसाब से, सिर्फ़ पैटर्न की मदद से ही बताया जा सकता है कि सीट नम्बर क्या होगा। मनीषा, आपने भी कहा था कि कुछ नियम हैं जिससे सीट नम्बर तय किया जा सकता है। क्या आप वे नियम समझा सकती हैं?


शिक्षक


मनीषा

हाँ सर, बिल्कुल। लहरदार पैटर्न में सीट नम्बर 22 की जगह भी मायने रखती है। मैंने सुरभि की सीट को 22 में 3 जोड़कर पाया, अर्पित ने 22 में 5 जोड़कर पता किया और अमायरा ने 22 में 7 जोड़े। ये नियम इस पर बदलते हैं कि हमने सीटों को किस तरीक़े से व्यवस्थित किया है। मैंने तो एक ऐसा तरीक़ा भी देखा जिसमें सीट 22 के बाद सुरभि की सीट 1 + 22 हो सकती है! लेकिन हाँ, इसका मतलब यह भी है कि पहली सीट की जगह भी हर बार एक जैसी नहीं होती, वह ऊपर बाईं ओर हो यह ज़रूरी नहीं और यही बात तय करती है कि सीट 22 कहाँ आएगी।

वाह मनीषा, यह तो बहुत अच्छा सम्बन्ध है! कमाल है कि ये नियम किस तरह सीटों की अलग-अलग व्यवस्था पर लागू किए जा सकते हैं। इससे यह भी पता चलता है कि हमारी सोच कितनी लचीली हो सकती है, जब हम एक ही चीज़ को अलग-अलग तरीक़ों से सोचने की कोशिश करते हैं। मुझे बहुत अच्छा लगा कि आप सबने इतनी रचनात्मकता और समझदारी से इस समस्या को हल करने की कोशिश की।


शिक्षक

### सीट 22 का राज़ : मैंने बच्चों से क्या सीखा

कक्षा का यह अनुभव दिखाता है कि खुले सवाल बच्चों को गहराई से सोचने और मिलकर सीखने में किस तरह मदद करते हैं। जब बच्चों से सुरभि की सीट का नम्बर पूछा गया तो शुरू में उनके जवाब सीधे और सामान्य थे, जैसे कि यह मान लेना कि अगला नम्बर ही जवाब होगा (जैसे 22 के बाद 23)। लेकिन जैसे-जैसे बातचीत आगे बढ़ी, बच्चों ने अपनी पहले की धारणाओं पर सवाल उठाना शुरू किया और दूसरी सम्भावनाओं को भी देखने लगे। इस बदलाव में मदद मिली जब उन्हें बस का चित्र बनाने और अपनी कल्पनाओं को दिखाने का मौक़ा मिला। इससे वे समस्या से गहराई से जुड़ सके। उदाहरण के लिए, दीपक, प्रियांशु और ऋतिक ने बस के चित्र बारीकी से बनाए जिससे उन्हें यह समझ में आया कि सुरभि का सीट नम्बर हर बार अलग हो सकता है। इससे यह साबित होता है कि जब विद्यार्थी अपनी सोच को चित्रों के ज़रिए व्यक्त करते हैं, तो वे समस्याओं को नए नज़रिए से देख पाते हैं।

नेहा और मधु के काम में दिखे चिह्नों और अमूर्त तरीक़ों के इस्तेमाल से यह और भी साफ़ होता है कि सोच में लचीलापन होने से एक से ज़्यादा सही उत्तर निकल सकते हैं। मिसाल के तौर पर, नेहा को यह समझ आया कि सीट नम्बर इस पर निर्भर कर सकता है कि गिनती कहाँ से शुरू की गई है। इसलिए उसने यह नतीजा निकाला कि सुरभि का सीट नम्बर 26 या 27 हो सकता है। इस तरह की सोच तब ही सम्भव है जब बच्चों को यह आज़ादी दी जाती है कि वे समस्या को बिना किसी एक 'सही' उत्तर की बाध्यता के समझें। इसी तरह मनीषा, अर्पित और अमायरा ने एक क़दम और आगे बढ़कर सीटों की व्यवस्था को दिखाने के लिए एक आयताकार लहरदार पैटर्न का इस्तेमाल किया। इससे उन्होंने यह दिखाया कि अमूर्त सोच से जटिल समस्याओं को आसान बनाया जा सकता है और उनके अन्दर छिपे नियमों को पहचाना जा सकता है। इन विद्यार्थियों की सोच यह दिखाती है कि जब बच्चों को ठोस चित्रों से आगे बढ़ने की आज़ादी दी जाती है, तो वे गणितीय विचारों को अमूर्त स्तर पर भी समझने लगते हैं।

जब शिक्षक बाद में इस तरह के प्रश्न पूछते हैं : "आप ऐसा क्यों सोचते हैं?" या "क्या आप अपनी सोच को समझा सकते हैं?" तो इससे बच्चों को अपने विचारों को शब्दों में रखने का मौक़ा मिलता है और वे दूसरों के विचारों को भी समझने की कोशिश करते हैं। इससे न केवल उनकी समझ गहरी होती है बल्कि आपस में सहयोग की भावना भी बनती है, क्योंकि बच्चे एक-दूसरे की बात ध्यान से सुनते हैं और उनसे सीखते हैं। जैसे जब प्रियांशु ने यह सवाल उठाया कि क्या सुरभि की सीट वाक़ई 23 है, तो पूरी कक्षा ने फिर से सोचने की कोशिश की और बस के लेआउट को और ध्यान से समझा। इस तरह की बातचीत बहुत ज़रूरी होती है ताकि बच्चों में सोचने-समझने की क्षमता विकसित हो और वे यह जान पाएँ कि हर समस्या का एक ही उत्तर नहीं होता।

इस कक्षा की चर्चा यह दिखाती है कि कैसे एक खुला सवाल – जिसका कोई एक तय उत्तर नहीं है – बच्चों को सोचने, चर्चा करने और अर्थ निकालने की दिशा में आगे बढ़ाता है। इस प्रक्रिया में बच्चे केवल जानकारी लेने वाले नहीं रह जाते बल्कि वे ख़ुद अपनी समझ को बनाने में भागीदारी करने लगते हैं।

आख़िर में, यह लेख यह भी बताता है कि बच्चों को अपनी सोच पर विचार करने और उसे सुधारने के लिए समय देना बहुत ज़रूरी है। जब नेहा और मधु जैसे विद्यार्थियों को अपनी पहली सोच पर दोबारा सोचने का मौक़ा मिला, तो वे अपनी बात को और अच्छी तरह से समझ पाए और ज़्यादा साफ़ नतीजे तक पहुँच सके। इस तरह का मन्थन गणितीय विचारों को गहराई से समझने के लिए ज़रूरी है और यह बच्चों के अन्दर समस्या सुलझाने का आत्मविश्वास बढ़ाता है। अगर कक्षा में ऐसा माहौल बनाया जाए जहाँ ग़लती को सीखने का मौक़ा माना जाए, तो गणित बच्चों में आत्मबल और आगे बढ़ने की सोच पैदा कर सकता है।

ख़ुद मेरे लिए भी यह एक सीखने का मौक़ा था। अब जब मैं पीछे मुड़कर देखता हूँ तो लगता है कि अगर हमने बस की सीटों को नम्बर ग्रिड से जोड़ दिया होता तो बहुत अच्छा होता। यह एक आसान तरीक़ा होता जिससे बच्चे पंक्तियों और कॉलम में पैटर्न को आसानी से पहचान लेते और नम्बरों के साथ खेलना और भी मज़ेदार हो जाता।

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 30 | 29 | 28 | 27 | 26 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |

**तालिका-1**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |

**तालिका-2**

**अशोक प्रसाद** वर्ष 2012 से अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन से जुड़े हैं और शिक्षक प्रशिक्षण, पाठ्यक्रम विकास तथा शिक्षण सामग्री तैयार करने में योगदान दे रहे हैं। इससे पहले वे मिडिल स्कूल में गणित और विज्ञान के शिक्षक रह चुके हैं। उनके लेख *एट राइट एंगल्स* और *पाठशाला भीतर और बाहर* में प्रकाशित हुए हैं। उन्होंने पॉलीटेक्निक और फ़ार्मेसी स्तर पर एप्लाइड मैथमैटिक्स और फ़ार्मास्यूटिकल मैथमैटिक्स भी पढ़ाया है। उनसे ashok.prasad@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

**अनुवाद :** अमेय कान्त **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

# गणितीय पैटर्नों की खोज : शॉर्टकट्स के पीछे के तर्क

निखिल एम. ज़ेड. और जयश्री सुब्रमणयन

**निखिल की संख्याओं और उनमें छुपे पैटर्नों को खोजने में विशेष रुचि है। वे पलक्कड़ के एक ग्रामीण प्राथमिक स्कूल में अंशकालिक शिक्षक हैं। वे उन विद्यार्थियों की मदद करते हैं जिन्हें बुनियादी संक्रियाएँ करने में कठिनाई होती है। इसी कोशिश में वे ऐसी 'ट्रिक' और 'शॉर्टकट्स' खोजते हैं जो बच्चों के लिए गणना को आसान बना सकें। जयश्री एक शिक्षक व शिक्षक-प्रशिक्षक हैं। निखिल से उनकी मुलाक़ात शिक्षकों की एक कार्यशाला में हुई। उन्होंने निखिल के सुझाए शॉर्टकट्स के पीछे के तर्कों को समझने और यह जानने की कोशिश की कि वह कब और कैसे उपयोगी हो सकते हैं। इस लेख में हम निखिल द्वारा सुझाए गए कुछ शॉर्टकट्स और उनके पीछे के गणितीय तर्कों पर चर्चा करेंगे। साथ ही यह भी देखेंगे कि इन्हें कक्षा में किस तरह प्रभावी ढंग से इस्तेमाल किया जा सकता है।**

### घटाने के सवाल को जोड़ के सवाल में बदलना

प्राथमिक कक्षा के बच्चों के लिए घटाने के सवाल अकसर चुनौतीपूर्ण होते हैं, ख़ासकर तब जब 'उधार लेने' या पुनर्समूहन (regrouping) की ज़रूरत होती है। इसकी तुलना में जोड़ के सवाल आसान होते हैं। तो कैसा रहेगा यदि हम घटाने के सवाल को जोड़ के सवाल में बदल दें?

मान लीजिए हमें 101 – 87 का हल निकालना है। चलिए, इसे जोड़ के सवाल में बदलते हैं। सबसे पहले

$101 - 87 = ?$

चरण-1

$87 \xrightarrow[9-8=1,\ 10-7=3]{} 13$

चरण-2

$101 + 13 = 114$

चरण-3

$114 \longrightarrow 14$

**इसलिए 101 – 87 = 14 हुआ।**

हम छोटी संख्या (यहाँ 87) को लेते हैं। इसके इकाई के अंक (यहाँ 7) को 10 में से घटाते हैं और बाक़ी अंकों को 9 में से। उत्तर आता है 13। इस 13 को 101 में जोड़ते हैं, तो मिलता है 114। अब इसमें से सैकड़े के स्थान का अंक (1) हटा देते हैं तो उत्तर आता है 14।

चलिए, इसे चरण-दर-चरण समझते हैं।

**चरण-1** : घटायी जाने वाली संख्या (आगे इसे छोटी संख्या कहा गया है) के इकाई के अंक को 10 में से घटाएँ और बाक़ी अंकों को 9 में से।

**चरण-2** : चरण-1 में मिली संख्या को उसी संख्या में जोड़ दें जिसमें से घटाना है (इसे आगे बड़ी संख्या कहा गया है)।

**चरण-3** : चरण-2 से मिले उत्तर में दाईं ओर से उतने अंक गिनें जितने कि छोटी संख्या में थे और उसके ठीक बाईं ओर के अंक में से 1 घटा दें।

इससे आपको घटाने के सवाल का जवाब मिल जाएगा। चलिए, कुछ उदाहरण लेकर देखते हैं।

*की-वर्ड : शॉर्टकट, जोड़, घटाना, अंकगणितीय तरक़ीबें, बुनियादी संक्रियाएँ*

*उदाहरण 1* :

$312 - 123 = ?$

चरण-1

$123 \xrightarrow{\hspace{3em}} 877$

$9-1=8; 9-2=7; 10-3=7$

चरण-2

$312 + 877 = 1189$

चरण-3

$1189 \longrightarrow 189$

**इसलिए 312 – 123 = 189 हुआ।**

उदाहरण 1 में, हमें 312 – 123 का हल निकालना है। तो पहले हम यह पता लगाते हैं कि 312 में कौन-सी संख्या जोड़ने पर उत्तर मिलेगा। इसके लिए हम 123 के इकाई के अंक को 10 में से घटाते हैं और बाक़ी अंकों को 9 में से। इसका उत्तर आता है 877। अब 877 को 312 में जोड़ते हैं, तो मिलता है 1189। चूँकि 123 तीन अंकों की संख्या है, इसलिए हम 1189 में दाईं ओर से चौथे अंक (चित्र में हाइलाइट की गई हज़ार के स्थान की संख्या) में से 1 घटा देते हैं। उत्तर मिला 189।

*उदाहरण 2* :

$1123 - 89 = ?$

चरण-1

$89 \longrightarrow 11$

$9-8=1; 10-9=1$

चरण-2

$1123 + 11 = 1134$

चरण-3

$1134 \longrightarrow 1034$

**इसलिए 1123 – 89 = 1034 हुआ।**

उदाहरण 2 में, 89 दो अंकों की संख्या है। इसलिए चरण-3 में हम चरण-2 से मिली संख्या के दाईं ओर से तीसरे अंक (सैकड़े के स्थान की संख्या) में से 1 घटाते हैं। यानी कि इस प्रक्रिया के ज़रिए यदि एक अंक की संख्या घटाना हो, तो हम दाईं ओर से दूसरे अंक (यानी दहाई के स्थान) में से 1 घटाएँगे।

जैसा कि हमने देखा चरण-1 के अनुसार इकाई के अंक को 10 में से और बाक़ी अंकों को 9 में से घटाना होता है। पर यदि इकाई का अंक 0 हो तो क्या करेंगे? ऐसी स्थिति में इकाई का अंक 10 हो जाता है। उदाहरण 3 में दर्शाया गया है कि इस स्थिति में हमें क्या करना है।

*उदाहरण 3* :

$538 - 40 = ?$

चरण-1

$40 \longrightarrow 60$

$9-4+1=6; 10-0=0$

चरण-2

$538 + 60 = 598$

चरण-3

$598 \longrightarrow 498$

**इसलिए 538 – 40 = 498**

उदाहरण 3 में, सबसे पहले हम 0 को इकाई के स्थान पर ही रखते हैं और उससे ठीक पहले वाले अंक में 1 जोड़ देते हैं। अब 9 में से 4 घटाते हैं जिससे हमें 5 मिलता है। यह जोड़ी जाने वाली संख्या का दहाई का अंक होगा। अब इकाई के अंक से मिले अतिरिक्त 1 को इस 5 में जोड़ देते हैं, जिससे यह 6 बन जाता है। इस तरह पूरी संख्या बनती है 60। बाक़ी के सभी चरण पहले जैसे ही रहते हैं।

यह विधि क्यों काम करती है? इस एल्गोरिदम में हम असल में क्या कर रहे हैं? चरण-1 पर ग़ौर कीजिए। जब हम इकाई के अंक को 10 से और बाक़ी के अंकों को 9 से घटाते हैं तो वास्तव में हम संख्या को 10 की किसी घात में से घटा रहे होते हैं। है ना?

87 को घटाने के लिए हमने 13 जोड़ा, यानी 100 – 87

123 को घटाने के लिए हमने 877 जोड़ा,
यानी 1000 – 123

89 को घटाने के लिए हमने 11 जोड़ा, यानी 100 – 89

40 को घटाने के लिए हमने 60 जोड़ा, यानी 100 – 40

तो दरअसल किसी संख्या N को घटाने के बजाय उपरोक्त प्रक्रिया में हम 100 – N, या 1000 – N, या $10^n$ – N जोड़ते हैं। यहाँ n छोटी संख्या N के अंकों की संख्या है। (उदाहरण के लिए, यदि N दो अंकों की संख्या है, तो n = 2) लेकिन चूँकि हमने $10^n$ को जोड़ा था, इसलिए अब सही उत्तर निकालने के लिए हमें उस $10^n$ को वापस घटाना होता है। यही काम तीसरा चरण करता है, जिसमें हम दाईं ओर से उपयुक्त स्थान पर मौजूद अंक में से 1 घटा देते हैं।

संक्षेप में कहें तो, $M - N = M + (10^n - N) - 10^n$ जहाँ n, छोटी संख्या के अंकों की संख्या है।

पहले चरण में हम $10^n - N$ निकालते हैं। दूसरे चरण में इसे M में जोड़ते हैं और तीसरे चरण में $10^n$ को घटा देते हैं।

यह शॉर्टकट दशमलव संख्या पद्धति और इस पद्धति के भीतर मौजूद संख्यात्मक सम्बन्धों पर आधारित है। प्राथमिक कक्षाओं में हम अकसर नम्बर बॉन्ड्स पर ज़ोर देते हैं, जैसे कि 1 और 9, 2 और 8, 3 और 7, 6 और 4 तथा 5 और 5। ये नम्बर बॉन्ड्स संख्याओं की उन जोड़ियों को दर्शाते हैं जिनका योगफल 10 होता है। नम्बर बॉन्ड्स की इस अवधारणा को हम 10 की अन्य घातों (जैसे 100, 1000 आदि) तक भी बढ़ा सकते हैं। यह शॉर्टकट संख्याओं के उन जोड़ों पर आधारित है जिनका योगफल 100, 1000 या 10 की किसी अन्य घात के बराबर होता है।

यह शॉर्टकट तब भी काम आ सकता है जब हमें किसी संख्या को 9, 99, 999 आदि से गुणा करना हो। ये संख्याएँ क्रमशः 10, 100, 1000 आदि से एक कम होती हैं। इसलिए इनसे गुणा करना आसान हो जाता है। इसके लिए संख्या को पहले 10, 100 या 1000 से गुणा करते हैं और फिर गुणक (multiplicand) को प्राप्त गुणनफल में से घटा देते हैं। इसे करने के लिए हम घटाने का शॉर्टकट भी इस्तेमाल कर सकते हैं।

*उदाहरण 4* :

$$392 \times 99 = 392 \times (100 - 1) = 39200 - 392$$

अब इसे निकालने के लिए हम ऊपर बताए शॉर्टकट का इस्तेमाल कर सकते हैं।

$39200 - 392 = ?$

चरण-1

$392 \longrightarrow 608$

$9 - 3 = 6; 9 - 9 = 0; 10 - 2 = 8$

चरण-2

$39200 + 608 = 39808$

चरण-3

$39808 \longrightarrow 38808$

**तो 39200 – 392 = 38808 हुआ।**

39200 – 392 का हल पता करने के लिए हम संख्याओं के अन्य सम्बन्धों का इस्तेमाल भी कर सकते हैं, जैसे कि

$$39200 - 392 = 39200 - 400 + 8 = 38800 + 8 = 38808$$

मुख्य बात यह है कि संख्याओं के आपसी सम्बन्धों को रचनात्मक ढंग से इस्तेमाल करके गणना करने के आसान तरीक़े खोजे जाएँ।

जब इन तरीक़ों को केवल उत्तर निकालने के लिए 'कैसे करें' वाले चरण-दर-चरण निर्देशों की शृंखला के रूप में प्रस्तुत किया जाता है, तो ये उन संख्यात्मक सम्बन्धों को छुपा देते हैं जो उस शॉर्टकट का आधार होते हैं। यही बात गणना की कई अन्य तकनीकों पर भी लागू होती है, जिन्हें सामान्यतः 'वैदिक गणित' के अन्तर्गत रखा जाता है। यदि इन्हें केवल प्रक्रियात्मक नियमों की शृंखला के रूप में बताया जाता है तो यह ख़तरा रहता है कि बच्चों को गणित महज़ कुछ चतुराई भरी तरक़ीबों का संग्रह लगने लगे।

इससे उलट, यदि हम गणना की शुरुआत ऐसे तरीक़ों से करें जो संख्याओं के आपसी सम्बन्धों पर आधारित हों और बच्चों को प्रेरित करें कि वे स्वयं अपने 'कैसे करें' वाले चरण बनाएँ, तो उनका ध्यान नियम रटने से हटकर उनके पीछे छिपी संरचना को समझने पर केन्द्रित हो जाता है। थोड़ी-सी पड़ताल और चिन्तन करने पर उन बातों का राज़ खुल जाता है, जो पहले जादू जैसी लगती थीं। और जो तरीक़ा पहले ट्रिक जैसा लगता था, वही समस्या को हल करने का सबसे स्वाभाविक तरीक़ा लगने लगता है।

संख्याओं पर आधारित ऐसी रणनीतियों के साथ काम करना बच्चों में संख्याओं की समझ विकसित करने का एक प्रभावी तरीक़ा है। उदाहरण के लिए, नीचे दिए गए तरीक़े 10 की घातों (powers of 10) से जुड़ी संक्रियाओं के गुणधर्मों पर आधारित हैं। बच्चों से कहें कि वे इन्हें चरण-दर-चरण प्रक्रिया के रूप में लिखें।

$$643 \times 9 = 6430 - 643 = 6430 - 700 + 57 = 5730 + 57 = 5787$$

$$643 \times 99 = 64300 - 643 = 64300 - 700 + 57 = 63657$$

किसी शॉर्टकट के काम करने का कारण समझना भी संख्याओं के इन सम्बन्धों को खोजने का एक अच्छा अभ्यास हो सकता है। अब हम एक और शॉर्टकट साझा कर रहे हैं। इसके पीछे का तर्क आप स्वयं खोजें।

### 98 से गुणा करना : क्या आप इसके पीछे का तर्क खोज सकते हैं?

यदि गुणक 50 से कम (छोटा) हो, तो

**चरण-1** : गुणक में से 1 घटाएँ और उत्तर को लिख लें।

**चरण-2** : गुणक को 50 में से घटाकर उसे 2 से गुणा करें। फिर गुणनफल की संख्या को चरण 1 में लिखी संख्या के बाद लिख दें।

*उदाहरण 5 :*

$98 \times 37 = ?$

ध्यान दें $37 < 50$

चरण-1

$37 - 1 = 36$

चरण-2

$2 \times (50 - 37)$

$= 2 \times 13 = 26$

3626

**तो $98 \times 37 = 3626$ हुआ।**

अगर संख्या 50 से ज़्यादा हो :

**चरण-1क** : गुणक में से 2 घटाएँ और उत्तर को लिख लें।

**चरण-2क** : गुणक को 100 में से घटाकर उसे 2 से गुणा करें। फिर गुणनफल की संख्या को चरण-1क की संख्या के बाद लिख लें।

*उदाहरण 6 :*

$98 \times 75 = ?$

ध्यान दें $75 > 50$

चरण-1

$75 - 2 = 73$

चरण-2

$2 \times (100 - 75)$

$= 2 \times 25 = 50$

7350

**तो $98 \times 75 = 7350$ हुआ।**

पाठकों के सोच-विचार के लिए कुछ प्रश्न :

यह तरीक़ा क्यों काम करता है? तीन अंकों की संख्याओं पर आप इसे किस तरह लागू करेंगे? यह शॉर्टकट 102 से गुणा करने से कैसे सम्बन्धित है? 998 से गुणा करने के लिए इसी तरह का शॉर्टकट कैसे बना सकते हैं? इस तरह का शॉर्टकट *किस प्रकार की संख्याओं* के लिए उपयोगी होगा?

## समापन टिप्पणी

बतौर शिक्षक हममें से कई लोगों के सामने ऐसे मौक़े आए होंगे जब बच्चों ने गणना करने के अपने अनोखे शॉर्टकट या वैकल्पिक तरीक़े खोज निकाले हों (जैसे निखिल की शिक्षक श्रीमती रोसली ने भी अनुभव किया होगा)। ऐसे मौक़ों को दुनिया की 'सबसे सामान्य बातें' मानकर नज़रअन्दाज़ करने के बजाय छोटी-सी खोज के रूप में इनकी सराहना करनी चाहिए (जैसा कि निखिल भी मानते हैं)। साथ ही यह परखना भी ज़रूरी है कि ये तरीक़े हर बार काम करेंगे या नहीं, और यदि हाँ, तो कब और क्यों।

**आभार** : निखिल ट्रेनर और पलक्कड़ ब्लॉक के रिसोर्स कोऑर्डिनेटर श्री प्रवीण आर. के सहयोग के लिए आभारी हैं। वे अपनी गणित शिक्षक श्रीमती रोसली के भी विशेष आभारी हैं, जिनके लगातार प्रोत्साहन ने उनमें गणित के प्रति गहन रुचि जगाई।

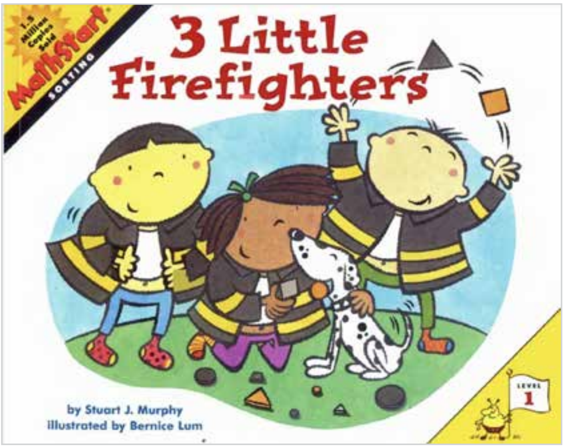
**निखिल एम. ज़ेड.** केरल के अट्टापडी स्थित एक प्राथमिक विद्यालय में शिक्षक हैं। वे 'उन्नति' कार्यक्रम से जुड़े हैं, जिसे केरल इंस्टीट्यूट ऑफ़ लोकल एडमिनिस्ट्रेशन द्वारा संचालित किया जाता है। इस कार्यक्रम का उद्देश्य आदिवासी क्षेत्रों के बच्चों की सीखने में मदद करना है। वे बतौर स्रोत व्यक्ति प्रतियोगी परीक्षाओं की तैयारी के प्रशिक्षण शिविरों और आदिवासी बच्चों के लिए आयोजित गणित शिविरों से भी जुड़े रहे हैं।

**जयश्री सुब्रमणयन** शिक्षिका और शिक्षक-प्रशिक्षक हैं। उन्हें विभिन्न आयु वर्गों के विद्यार्थियों और शिक्षकों के साथ काम करने का अनुभव है। उन्हें गणित में मनोरंजनात्मक गतिविधियाँ और रोचक प्रयोग करना पसन्द है। वे गणित को बच्चों के लिए मज़ेदार और दिलचस्प बनाने का प्रयास करती हैं। वर्तमान में वे आईआईटी पलक्कड़ में बतौर एजुकेशनल आउटरीच ऑफिसर कार्यरत हैं।

**अनुवाद :** कविता तिवारी **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता

# समीक्षा : 3 लिटिल फ़ायरफ़ाइटर्स

लेखक : स्टुअर्ट जे. मर्फी
समीक्षक : क्षमा चक्रवर्ती




इस लेख में स्टुअर्ट जे. मर्फी की किताब '3 लिटिल फ़ायरफ़ाइटर्स' की समीक्षा की गई है। इसे हार्परकॉलिन्स पब्लिशर्स द्वारा प्रकाशित किया गया है। यह किताब 'मैथस्टार्ट' (MathStart) शृंखला का हिस्सा है। इस शृंखला की कहानियाँ विद्यार्थियों को पढ़कर सुनाई जा सकती हैं, और फिर उनसे जुड़ी बातें मज़ेदार तरीक़े से चर्चा करके समझाई जा सकती हैं। कहानी सुनाना एक ऐसा तरीक़ा माना गया है जिससे विद्यार्थी ख़ुशी-ख़ुशी और अच्छे से सीखते हैं। (पृ. 93, एनसीएफ़-एफ़एस, 2022)।

'3 लिटिल फ़ायरफ़ाइटर्स' 'मैथस्टार्ट' शृंखला की किताबों में से स्तर-1 की एक किताब है। कुल मिलाकर इन किताबों के तीन स्तर हैं।

स्तर-1 : प्री-किंडरगार्टन और किंडरगार्टन

स्तर-2 : कक्षा-1 और 2

स्तर-3 : कक्षा-3 और 4

पहले दो स्तर की किताबें वही हैं जो नई शिक्षा नीति 2020 में बताए गए फ़ाउण्डेशन स्टेज से मेल खाती हैं।

इस शृंखला में कई विषय शामिल हैं। जैसे मिलान करना (matching), छाँटना (sorting), बार ग्राफ़, पूर्णांक और अज्ञात मान का पता लगाना। स्तर-3 की किताबों का इस्तेमाल कक्षा-5 और 6 के विद्यार्थियों के लिए भी किया जा सकता है। यह इस बात पर निर्भर करता है कि शिक्षक विद्यार्थियों के साथ बातचीत कैसे करते हैं। उदाहरण के लिए, जब कक्षा में भिन्न का पाठ पढ़ाया जा रहा हो तो 'जम्प, कंगारू, जम्प' कहानी पढ़कर सुनाई जा सकती है। यह कहानी बताती है कि किसी निश्चित संख्या की वस्तुओं को बराबर समूहों में कैसे बाँटा जाता है। इस कहानी के आधार पर की गई चर्चा पाठ्यपुस्तक के पूरक के रूप में काम कर सकती है। तीनों स्तरों के विषयों की सूची तालिका में दी गई है। इन सभी किताबों का विवरण https://www.mathstart.net/books.html पर उपलब्ध है।

*की-वर्ड : समीक्षा, कहानी सुनाना, अन्तर्विषयी, समस्या समाधान, छँटाई, आकृति, आकार/माप, संख्या*

| स्तर-1 | स्तर-2 | स्तर-3 |
|---|---|---|
| पैटर्न | जोड़ना | अनुमान लगाना |
| आकारों की तुलना करना | आँकड़े एकत्र करना | वर्गीकरण करना |
| आकृतियाँ पहचानना | घटाना | भाग देना |
| गिनना | पुनः समूह बनाना | समय |
| विलोम | समय सीमा | भिन्न |
| क्रमिक संख्याएँ | आधे की समझ | बार ग्राफ़ |
| राशियों की तुलना करना | समरूपता | सिक्के गिनना |
| विषम और सम संख्याएँ | कैलेंडर | समीकरण बनाना |
| एक घटाना | प्रायिकता | क्षमता |
| मिलान | 2-2, 3-3 और 4-4 में गिनती | दो अंकों की संख्याएँ घटाना |
| क्रम में जमाना | मापना | गुणा करना |

किताब '3 लिटिल फ़ायरफ़ाइटर्स' छाँटने की अवधारणा से जुड़ी है। इसे साढ़े तीन से छह साल की उम्र के विद्यार्थियों को पढ़कर सुनाया जा सकता है। मैंने इस उम्र के विद्यार्थियों के साथ कहानी सुनाने के सत्र के लिए इसका इस्तेमाल किया और पाया कि यह विद्यार्थियों को बहुत पसन्द आई! इस ख़ास सत्र का मक़सद था कि वे छँटाई के विषय को रोज़मर्रा के सन्दर्भों में टटोल सकें। मान्यता यह थी कि उन्हें छँटाई के बारे में पहले से थोड़ी जानकारी है। कहानी सुनने और उसके बाद की गतिविधि से विद्यार्थियों को यह सीखने का मौक़ा मिला कि चीज़ों को अलग-अलग आधारों (कसौटियों) पर कैसे छाँटा जा सकता है; कुछ आधार पहले से बताए गए थे, और कुछ उन्हें ख़ुद सोचने थे।

यह किताब गणित में गुणधर्मों के आधार पर छँटाई की बात एक मज़ेदार कहानी के ज़रिए सिखाती है। कहानी में नन्हें फ़ायरफ़ाइटर्स हैं जो परेड की तैयारी कर रहे हैं। बड़ी परेड शुरू होने से कुछ पहले ही उन्हें पता चलता है कि उनके कोट के बटन ग़ायब हैं। इस समस्या को सुलझाने के लिए उन्हें जल्दी से तीन तरह के मिलते-जुलते बटन ढूँढ़ने हैं। इन बटनों को आकृति (गोल, तिकोन, चौकोर), माप (बड़ा, मध्यम, छोटा) और रंग (ग्रे, काला, पीला) के आधार पर छाँटना है। कहानी में जल्दबाज़ी और मज़ा दोनों है, क्योंकि फ़ायरफ़ाइटर्स समय रहते बटन की व्यवस्था करने की हड़बड़ी में हैं। बर्निस लुम के जीवन्त चित्र कहानी को और भी मज़ेदार बना देते हैं जिससे छँटाई की प्रक्रिया छोटे विद्यार्थियों के लिए स्पष्ट और मनमोहक हो जाती है।


चित्र-1

तीनों नन्हें फ़ायरफ़ाइटर्स परेड के लिए तैयार हो रहे हैं। उन्हें अपना कोट पहनना है, लेकिन तभी उन्हें पता चलता है कि

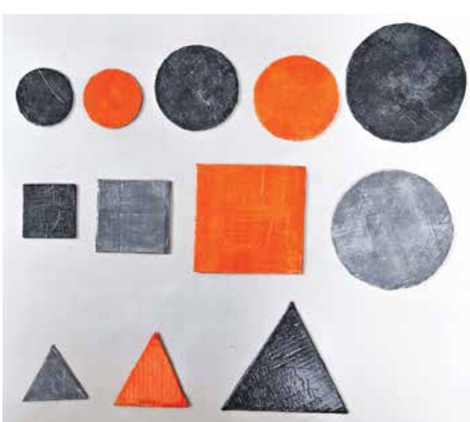
बटन ग़ायब हैं। अपनी नाभि को छिपाने के लिए प्रत्येक को चार बटन चाहिए! (पूरे सत्र के दौरान हर बार नाभि का ज़िक्र सुनकर विद्यार्थी हँसते-हँसते लोटपोट हो जाते हैं!) उन्हें बटन का एक ढेर मिल जाता है, और वे उसे अलग-अलग आधारों पर छाँटने की कोशिश करते हैं ताकि यह सुनिश्चित हो सके कि उनमें से प्रत्येक के पास चार बटन हों। वे पहले आकृति के आधार पर छाँटने की कोशिश करते हैं। एक फ़ायरफ़ाइटर को चार गोल बटन मिलते हैं, लेकिन बाक़ी दो को केवल तिकोन और चौकोर के तीन-तीन सेट मिलते हैं, और उनकी नाभि दिखाई देती है! ऐसा तो बिल्कुल नहीं चल सकता। इसलिए वे दुबारा से छँटाई का फ़ैसला करते हैं, इस बार रंग के अनुसार। उनमें से दो को काले और नारंगी रंग के चार-चार बटन मिल जाते हैं, लेकिन ग्रे रंग के सेट में केवल तीन बटन ही मिलते हैं! **चित्र-1** देखें। इस बार भी छँटाई काम नहीं करती, और उन्हें फिर से कोशिश करनी पड़ती है।

इसके बाद, वे माप के अनुसार छाँटने की कोशिश करते हैं – छोटा, मझोला और बड़ा। और अब, जादुई तरीक़े से, उनमें से प्रत्येक को 4 बटन मिल जाते हैं! **चित्र-2** देखें। यह एक अच्छा मौक़ा होता है जब रुककर विद्यार्थियों से पूछा जाए कि आख़िर ऐसा कैसे हुआ। वे धीरे-धीरे समझ जाते हैं कि वहाँ कुल मिलाकर 12 बटन थे, और पहले दो मामलों में कुछ 'अतिरिक्त' बटन थे जो कसौटियों पर ख़रे नहीं उतरते थे।

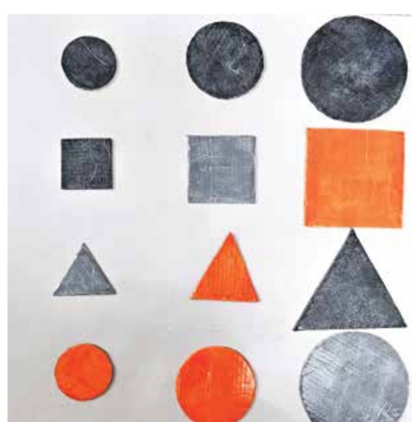

**चित्र-2**

जब उन्हें लगता है कि उन्होंने अपना काम अच्छे से कर लिया है, तो वे ख़ुशी-ख़ुशी परेड के लिए निकल पड़ते हैं।

इस किताब में कुछ मज़ेदार गतिविधियाँ भी बताई गई हैं जो कहानी सुनाते समय विद्यार्थियों के साथ की जा सकती हैं। उनमें से एक यह है कि बटन बनाए जाएँ – अलग-अलग आकार, आकृति और रंग के। फिर विद्यार्थियों को हर बार किसी एक आधार पर बटन छाँटने को कहा जाए ताकि वे स्वयं जाँच सकें कि प्रत्येक के 4 सेट बनते हैं या नहीं। **चित्र-3क** में सभी बटन आकृति के हिसाब से आड़ी पंक्ति में दिखाए गए हैं। **चित्र-3ख** में बटन के आकार के हिसाब से खड़ी पंक्ति में दिखाए गए हैं।



**चित्र-3क**



**चित्र-3ख**

सत्र के दौरान, मुझे यह गतिविधि बहुत मज़ेदार और उपयोगी लगी, क्योंकि विद्यार्थी बड़े आकार के बटनों के साथ ठीक वैसे ही काम कर सकते थे जैसा कहानी में बताया गया था। उन्हें बटन छाँटने और यह देखने में मज़ा आ रहा था कि कौन चार बटनों का सेट बना सकता है और कौन नहीं। हर बार जब छँटाई का मापदण्ड बदलता, वे बटनों को इधर-उधर रखते, आपस में बदलते, और इस बदलाव पर ध्यान देते कि अब बटन कैसे अलग-अलग हो रहे हैं। इससे उन्हें यह समझने में मदद मिली कि मापदण्ड बदलने से छँटाई का तरीक़ा भी बदलता है। यह समझ अगली गतिविधि में भी काम आई जहाँ उन्हें असली बटन दिए गए। इनमें अलग-अलग आकार, आकृति, रंग और पैटर्न थे। विद्यार्थियों को दिए गए मापदण्ड (जैसे रंग, आकार, आकृति आदि) के आधार पर इन बटनों की छँटाई करनी थी। इसके बाद, कुछ बटनों को तीन अलग-अलग समूहों में रखा और पूछा, "बताओ, मैंने इन्हें किस नियम से बाँटा है?" जब विद्यार्थी कोई उत्तर देते, मैं उनके तर्क को चुनौती देने के लिए कुछ और बटन जोड़ती ताकि वे दोबारा सोचें। यह सिलसिला तब तक चलता रहा जब तक वे उस तर्क या नियम तक नहीं पहुँच गए जिसका मैंने उपयोग किया था। अन्तिम दौर में, प्रत्येक विद्यार्थी ने बारी-बारी से अपने मन में एक निश्चित मापदण्ड के आधार पर बटन छाँटे, और बाक़ी सभी ने उस मापदण्ड का अनुमान लगाया।

यह किताब गणितीय अवधारणा को एक सरल और दिलचस्प कहानी में पिरोने की अपनी क्षमता में उत्कृष्ट है। यह छँटाई की प्रक्रिया को एक स्वाभाविक और आकर्षक तरीक़े से प्रस्तुत करती है। फ़ायरफ़ाइटर्स की परेशानी एक व्यावहारिक समस्या है जिसे विद्यार्थी आसानी से समझ सकते हैं। कहानी में हर बार अलग-अलग आधार पर वर्गीकरण का प्रयास उन्हें बिना बोझ डाले खेल-खेल में सीखने का अवसर देता है। किताब के अन्त में दी गई गतिविधियाँ इसकी एक महत्त्वपूर्ण विशेषता है। ये गतिविधियाँ माता-पिता और शिक्षकों को गणित के पाठ को वास्तविक जीवन के परिवेश में विस्तारित करने के लिए प्रोत्साहित करती हैं। जैसे घर पर या कक्षा में वस्तुओं की छँटाई करना।

## References


1. National Council of Educational Research and Training. (2022). *National curriculum framework for foundational stage.* NCERT. https://ncert.nic.in/pdf/NCF_for_Foundational_Stage_20_October_2022.pdf
2. MathStart. (n.d.). *Books.* https://www.mathstart.net/books.html


**क्षमा चक्रवर्ती** एक एजुकेटर हैं। उन्होंने आईआईटी मद्रास से गणित में और अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी से शिक्षा में स्नातकोत्तर की उपाधियाँ हासिल की हैं। गणित शिक्षा में 15 से अधिक वर्षों के अनुभव के साथ, उन्होंने सामग्रियों के विकास, शिक्षण, और शिक्षक प्रशिक्षण जैसे क्षेत्रों में काम किया है। साथ ही विद्यार्थियों के साक्षात्कार किए हैं और आकलन तैयार किए हैं। क्षमा युवा मनोमस्तिष्क को जानने, समझने और पोषित करने के प्रति जुनूनी हैं। उन्हें बच्चों के साथ समय बिताना और क़ुदरत का आनन्द लेना भाता है। उनसे kshamagc@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

**अनुवाद :** रोशन खान **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर** : अतुल अग्रवाल

# लेख आमंत्रित हैं...

***एट राइट एंगल्स*** भारत की सार्वजनिक शिक्षा प्रणाली में गणितीय शिक्षा को समर्पित एक गुणवत्तापूर्ण संसाधन है। इसे विशेषकर बुनियादी, प्राथमिक और माध्यमिक पाठशालाओं के शिक्षक और शिक्षकों के प्रशिक्षकों के लिए तैयार किया गया है।

हम गणित के शिक्षकों, शिक्षाविदों, अभ्यासकर्ताओं (प्रैक्टिसनर्स), अभिभावकों और विद्यार्थियों से लेख आमंत्रित करते हैं। यदि आप एक ऐसा मंच तलाश रहे हैं जो ख़ासतौर से लगभग 6-14 साल के विद्यार्थियों के गणित के सीखने के अनुभव को समृद्ध करता हो और बढ़ाता हो, तो यह पत्रिका आपके लिए है। आपके लेखों का स्वागत है।

**विषय एवं थीम के लिए सुझाव**

भेजे जाने वाले लेख कक्षा-1 से 8 की पाठ्यक्रम सामग्री पर केन्द्रित होना चाहिए। लेखों से अपेक्षा है कि वे :

- स्कूली शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा, 2023 (NCF-SE-2023) में उल्लेखित विषय और थीम को विस्तारपूर्वक समझा सकें और दर्शा सकें।
- ख़ासकर NCF-SE-2023 में चर्चित चुनौतियों को सम्बोधित करते हों।
- गणितीय इतिहास या गणितीय सोच के इतिहास का प्रमाणित विवरण हों।
- विद्यार्थियों को प्रशिक्षण और अभ्यास में तल्लीन रखने के लिए नवाचारी वर्कशीट या तरीक़ों को शामिल कर सकें।
- बच्चों के सन्दर्भ में प्रासंगिक, गणित के रोज़मर्रा जीवन में उपयोग का वर्णन कर सकें।
- अन्तःविषय गतिविधियों और परियोजनाओं (प्रोजेक्ट) का वर्णन कर सकें।
- पाठ्यक्रम से जुड़ी पहेलियों और खेलों की समीक्षा कर सकें।
- ऑनलाइन रिसोर्स सहित प्रासंगिक सामग्री के चयन पर मार्गदर्शन कर सकें।
- बुनियादी संख्या ज्ञान के साथ-साथ गणनात्मक सोच के लिए शैक्षणिक रणनीतियाँ विकसित कर सकें।
- विभिन्न शैक्षणिक पद्धतियों को लागू करने में शिक्षकों की सहायता कर सकें।
- टीचर्स लर्निंग मटेरियल (टीएलएम) की समीक्षा कर सकें या गणित की कक्षा में स्थानीय सन्दर्भ और स्थानीय टीएलएम का उपयोग कैसे करें इसके बारे में बता सकें।
- विद्यार्थियों में अवधारणात्मक समझ की खाई को पाटने में सहायता करने के लिए सामग्री प्रदान कर सकें।
- आकलन में आने वाली परेशानियों का समाधान कर सकें।
- गणित सीखने के दौरान होने वाली ग़लतफ़हमियों को पहचानने और समझने के लिए उपाय सुझा सकें।
- समस्याओं की सूची, उनके हल पर चर्चा एवं समस्या–समाधान की रणनीतियों सहित दे सकें, जो कि सामान्यतौर पर पाठयपुस्तकों में नहीं मिलती।

बड़े लेखों के अलावा हम छोटे लेखों का भी स्वागत करते हैं जिनमें विविध तरह की रोचक सामग्री शामिल हो। जैसे किसी किताब या गणित के सॉफ्टवेयर की समीक्षा या गणितीय थीम पर आधारित यूट्यूब की कोई क्लिप। प्रूफ़ विदाउट वर्ड्स (proofs without words), गणितीय अन्तर्विरोध (mathematical paradoxes), असिद्धीकरण (false proofs) पर आधारित लेख हो सकते हैं। गणितीय विषयों पर आधारित कविता, कार्टून या तस्वीरों (photographs) जैसी रचनात्मक अभिव्यक्तियों को शामिल करते लेख हो सकते हैं। आप किसी गणितज्ञ से जुड़े क़िस्से या 'हस्तशिल्प में गणित, फ़िल्मों में गणित' जैसे रोचक विषयों पर भी लेख भेज सकते हैं।

लेख AtRightAngles.editor@apu.edu.in पर भेजें।

कृपया आगे दी गई सम्पादकीय नीतियों और दिशा-निर्देशों को भी देखें।

# लेखों को स्वीकार करने की नीति

***एट राइट एंगल्स*** प्रारम्भिक गणित और गणितीय शिक्षा से सम्बन्धित मुद्दों पर पूर्णत: केन्द्रित पत्रिका है। इसलिए लेखों का प्रयास होना चाहिए कि वे गणित के आम मिथकों, धारणाओं और भ्रान्तियों से परे हों।

पत्रिका में कहीं और से नक़ल या चोरी करके भेजे गए लेखों के लिए बिल्कुल भी जगह नहीं है। लेखक द्वारा लेख को प्रकाशन के लिए भेजे जाने पर माना जाता है कि यह मौलिक है और प्रकाशन के लिए इस पर किसी भी तरह का क़ानूनी प्रतिबन्ध नहीं है (जैसे किसी अन्य का कॉपीराइट स्वामित्व)। लेख में जहाँ भी उपयुक्त हो वहाँ प्रासंगिक सन्दर्भ और स्रोतों का उल्लेख किया जाए।

***एट राइट एंगल्स*** पत्रिका अन्य भारतीय भाषाओं में भी अनूदित होती है। इसलिए, अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी को पत्रिका में प्रकाशित सभी लेखों का अन्य भाषाओं में अनुवाद और प्रसार करने का अधिकार होगा।

यदि भेजा गया लेख पहले कहीं प्रकाशित हो चुका है, तो लेखक से अनुरोध है कि वे पूर्ववर्ती प्रकाशक से अन्यत्र पुनर्प्रकाशन के लिए अनुमति अवश्य प्राप्त कर लें। और लेख के अन्त में 'लेखक का नोट' के तहत इसका उल्लेख करें। इसके अलावा, यह अपेक्षा भी की जाती है कि लेखक हमारे रिकॉर्ड के लिए अनुमति पत्र की एक कॉपी लेख के साथ भेजें। इसी तरह, यदि लेखक ***एट राइट एंगल्स*** में प्रकाशित अपना लेख पुनः प्रकाशन के लिए कहीं और भेज रहे हैं तो उनसे अपेक्षा है कि वे ***एट राइट एंगल्स*** को यथोचित श्रेय अवश्य दें।

***एट राइट एंगल्स*** में विविध तरह के लेखों का स्वागत है। ऐसे लेख जो गुणवत्ता की दृष्टि से अच्छे हैं लेकिन इस पत्रिका में प्रकाशन के लिए उपयुक्त नहीं हैं, उनका उपयोग लेखक की सहमति से यूनिवर्सिटी की अन्य पत्रिकाओं में किया जा सकता है।

# लेखकों के लिए विशेष दिशा–निर्देश

अगर आप ***एट राइट एंगल्स*** के लिए लिख रहे हैं तो कृपया इन दिशा-निर्देशों पर ध्यान दें :

1. **रोचक परिचय** : शुरुआत से ही पाठक का ध्यान आकर्षित करने के उद्देश्य से पठनीय और रोचक शैली में लिखें। लेख के पहले पैराग्राफ़ से ही स्पष्ट हो जाना चाहिए कि लेख किस विषय के बारे में है। उदाहरण के तौर पर, शुरुआती पैराग्राफ़ एक अप्रत्याशित निष्कर्ष हो सकता है, एक चुनौती हो सकती है, एक मज़ेदार सवाल के साथ चित्र हो सकता है या एक प्रासंगिक क़िस्सा हो सकता है। ख़ासतौर से ये आगे पढ़ते जाने की रुचि पैदा करने वाला होना चाहिए।
2. **लुभावना शीर्षक** : लेख का शीर्षक एक उपयुक्त और लुभावने वाक्यांश से दिया जाए, जिसमें लेख की भावना और सत्व झलके।
3. **शैली** : प्रमाण-सिद्ध प्रारूप (Theorem-Proof Format) में लेख लिखने से परहेज़ करें। इसकी बजाय, अनौपचारिक तरीक़े से प्रमाणों (Proofs) को लेख में एकीकृत करें।
4. **सन्तुलन** : लम्बी-लम्बी गणनाओं को दर्शाने से बचें। बहुत अधिक विवरण देने और छिपी हुई (अ-उल्लेखित) गणनाओं पर निर्भर चरण को छोड़कर अगले चरण पर चले जाने, के बीच सन्तुलन बनाकर रखें।
5. **सुलभ भाषा** : उन विशिष्ट शब्दावली और संकेत शब्दों के उपयोग को टालें जिनसे सिर्फ़ विशेषज्ञ ही परिचित होते हैं। यदि तकनीकी शब्दों का उपयोग ज़रूरी हो तो उन्हें परिभाषित कर दें।
6. **दृश्यों का प्रयोग** : जहाँ सम्भव हो वहाँ ऐसे रेखाचित्र या फ़ोटो दें जिनमें गणितीय विचार का सार हो। यदि कोई चित्र या रेखाचित्र गणित की किसी अवधारणा को स्पष्ट करते हों तो उन्हें अवश्य रखें।
7. **संक्षिप्त सन्दर्भ** : संक्षिप्त अनुशंसाओं के साथ सन्दर्भों (reference) की एक संक्षिप्त सूची दें।
8. **अभ्यास और सवाल** : लेख की शुरुआत या अन्त में विचार करने के लिए कुछ सवाल और कुछ अभ्यास उपलब्ध कराएँ।
9. **उद्धरण प्रारूप (Citation Format)** : लेख के अन्त में, स्रोतों और सन्दर्भों को जिस क्रम में वे आए हैं उस ही क्रम में उन्हें उद्धृत (cite) करें। फ़ुटनोट से बचें। यदि फ़ुटनोट की आवश्यकता है, तो उनका क्रम डालकर अलग से लिखें।
10. **संक्षिप्ताक्षर और परिवर्णी शब्द (Abbreviations and Acronyms)** : लेख में जब पहली बार किसी शब्द का लघु रूप (यानी संक्षिप्ताक्षर) और कई शब्दों के शुरुआती अक्षर का प्रचलित लघु रूप (यानी परिवर्णी) आए तब वहीं उनका अर्थ बता दें। ऐसे सभी शब्दों की एक शब्दावली बनाकर उसे लेख के अन्त में प्रस्तुत करें।
11. **चित्रों को नामांकित करना** : लेख में आने वाले सभी चित्रों, रेखाचित्रों, तस्वीरों पर चित्र क्रमांक डालें और उनका विवरण लिखें। इन सभी चित्रों, रेखाचित्रों, तस्वीरों को स्पष्ट निर्देशों के साथ ईमेल में अलग से अटैच करें। (ध्यान दें कि खीचीं गई तस्वीरों या स्कैन तस्वीरों की गुणवत्ता 300dpi से कम नहीं होना चाहिए।)
12. **चित्रों का विवरण स्पष्टता से दें** : तस्वीरों, चित्रों, डायग्राम्स और तालिकाओं का उल्लेख उनके उचित क्रमांक से करें। 'यहाँ', 'वहाँ', 'दाईं ओर', 'बाईं ओर', 'ऊपर', 'नीचे' इस तरह से उल्लेख करने से परहेज़ करें।
13. **लेखक का परिचय** : लेखक अपनी हाई रिज्योलूशन फ़ोटो भी भेजें। साथ ही, अपने बारे में संक्षिप्त में (जो 50 शब्दों से ज़्यादा का नहीं हो) जानकारी भेजें, जो पाठकों को आपके अनुभव व विशेष योग्यता वाले कार्यक्षेत्र के बारे में बताती हो।
14. **ब्रिटिश वर्तनी (Spellings)** : ब्रिटिश वर्तनी का पालन करें। जैसे organise लिखें न कि organize; colour लिखें न कि color, neighbour लिखें न कि neighbor आदि।
15. आप अपने लेख **हिन्दी** में भी भेज सकते हैं। उपयुक्त होने पर हम उन्हें अँग्रेज़ी में अनूदित करके प्रकाशित करेंगे।
16. **लेख भेजने का प्रारूप** : लेखों को MS Word या LaTex में लिखकर ही भेजें।

मुद्रक तथा प्रकाशक ऋषिकेश बी.एस., रजिस्टार द्वारा अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी के लिए आदर्श प्रा.लि., 4 शिखरवार्ता, प्रेस काम्पलेक्स, जोन-1, एम.पी.नगर, भोपाल 462 011 से मुद्रित

एवं अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी, सर्वे नम्बर 66, बुरुगुंटे विलेज, बिक्कनाहल्ली मेन रोड, सरजापुरा,बेंगलूरु, कर्नाटक- 562 125 से प्रकाशित

सम्पादक : स्नेहा टाइटस

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी

# एट राइट एंगल्स

स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

Azim Premji University

# गणित में बुनाई

पद्मप्रिया शिराली

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी का प्रकाशन

# गणित में बुनाई

जनवरी, 2025 में *एट राइट एंगल्स* के दो सम्पादकों ने अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन के भोपाल और दमोह स्थित ज़िला संस्थानों का दौरा किया। इस दौरान उन्होंने उन स्कूलों में भी समय बिताया जिनसे फ़ाउण्डेशन के स्रोत व्यक्ति नियमित रूप से जुड़े हुए हैं। यह पुलआउट, उस यात्रा में शामिल रहीं पद्मप्रिया शिराली द्वारा किए गए अवलोकनों का विस्तार है।

पद्मप्रिया के शब्दों में : *भोपाल के प्राथमिक और माध्यमिक विद्यालयों की कक्षाओं में, मैंने बुलेटिन बोर्ड पर विद्यार्थियों द्वारा बनाई गई कई सुन्दर कलाकृतियाँ देखीं। मेरे साथ आई स्नेहा ने सहज ही बताया कि कला में बच्चों की इस रुचि को गणित सीखने से भी जोड़ा जा सकता है। यह लेख इस बात की पड़ताल है कि हम बुनाई जैसे आनन्ददायक और सन्तोषजनक कार्य को गणित से कैसे जोड़ते हैं।*

काग़ज़ की पट्टियों से की जाने वाली बुनाई रचनात्मक कलाओं की असीम सम्भावनाएँ प्रस्तुत करती है, और इससे बनी डिज़ाइनों के साथ गणितीय संख्याओं और ज्यामितीय पैटर्नों से जुड़ाव के अवसर मिलते हैं।

कक्षा-4 से ही इन गतिविधियों को पाठ्यक्रम में शामिल किया जा सकता है जब बच्चों में सूक्ष्म हस्त कौशल (मोटर स्किल) विकसित हो जाते हैं। बुनाई के पैटर्नों की जटिलता को धीरे-धीरे बढ़ाया जा सकता है, और नए पैटर्न व डिज़ाइन बनाने के भरपूर अवसर दिए जा सकते हैं।

यहाँ आकृतियों, टाइलिंग डिज़ाइनों, प्रतिबिम्ब और घूर्णन सममिति, कोणों आदि के विभिन्न गुणों को समझने के लिए इनसे बनने वाले पैटर्नों का अध्ययन करने की पर्याप्त सम्भावनाएँ हैं। इस गतिविधि में बीजगणित के मूल सिद्धान्त भी शामिल हैं। चूँकि बुने हुए कपड़ों (ख़ासकर स्वेटर, साड़ियों और कालीनों) में बुनाई के कई पैटर्न पाए जाते हैं, इसलिए विद्यार्थी इन डिज़ाइनों का अध्ययन कर सकते हैं, उनके ग्रिड चित्र बना सकते हैं, और रंगीन काग़ज़ की पट्टियों से इन्हें बनाने का प्रयास कर सकते हैं। इस कार्य में मापना, गिनना, पैटर्न तैयार करना और संरचना बनाना, पैटर्न को कोड करना, योजना अनुसार मोड़ना और आवश्यक आकार देना, साथ ही उपयुक्त निर्णय लेना शामिल होता है।

प्रश्न यह है कि क्या बुनाई, सिलाई, क्रोशिया, ओरिगेमी जैसे कौशल स्पर्श-आधारित अनुभव के माध्यम से स्थानिक अवधारणाओं को समझने के लिए ज़रूरी गणितीय सहज बोध को विकसित कर सकते हैं। क्या बुनाई ज्यामितीय और दृश्य अनुभूति (संज्ञान) के विकास में सहायक हो सकती है? पारम्परिक टोकरी बुनकरों और कालीन बुनकरों की दक्षता दर्शाती है कि उनके पास पैटर्न और उन जटिल तरीक़ों की एक सहज समझ होती है जिनसे आकृतियाँ उभरती हैं और परस्पर क्रिया करती हैं। शायद, जब हम गणित को केवल मनगणित और अमूर्त रूप में समझने का प्रयास करते हैं, हम स्पर्श अनुभव से सीखने की सम्भावना से वंचित हो जाते हैं।

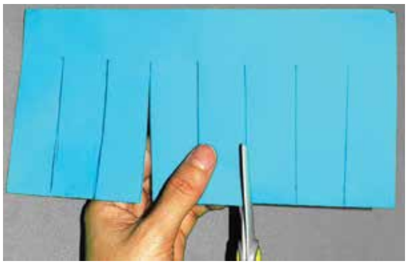
***की-वर्ड :*** *स्पर्श-आधारित अधिगम, पैटर्न, अनुक्रम, निर्णय क्षमता, कोडिंग, बुनाई*

इसलिए यहाँ यह समझने का प्रयास है कि क्या चीज़ें बनाते हुए और उनमें छिपे पैटर्न को पहचानते हुए भी सीखना सम्भव है।

काग़ज़ की बुनाई के लिए आवश्यक सामग्री और साधन-उपकरण आसानी से मिल जाते हैं। इसके लिए दो या तीन रंगों के काग़ज़ (बेकार सामग्री, मसलन पुरानी रंगीन पत्रिकाओं का उपयोग करना एक बढ़िया विकल्प हो सकता है), एक कटर या कैंची जिससे आवश्यक पट्टियाँ बनाई जा सकें, और एक ग्लू स्टिक (गोंद) की ज़रूरत होती है। आइए, कुछ आसान गतिविधियों से शुरुआत करें। जैसे-जैसे गतिविधियाँ करेंगे, हम यह भी देखेंगे कि इन्हें गणितीय अवधारणाओं से कैसे जोड़ा जा सकता है, और विद्यार्थियों का ध्यान इन गतिविधियों में छिपे गणित की ओर कैसे आकर्षित किया जा सकता है।

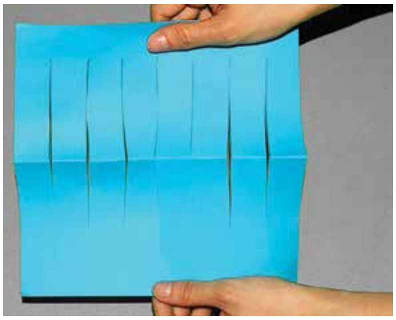
किसी भी पैटर्न को बनाने के लिए विद्यार्थियों को इस प्रकार काग़ज़ का आधार फ्रेम तैयार करना होगा।

1. एक काग़ज़ लें और उसे बीच से मोड़ें।
2. जहाँ काग़ज़ का मोड़ है, वहाँ से बराबर दूरी पर ऊपर की ओर चीरा लगाकर कॉलम बनाएँ। ध्यान रहे ऊपरी किनारों की तरफ़ कुछ जगह छूटी रहे। इन कॉलम की चौड़ाई एकसमान होनी चाहिए ताकि पट्टी की चौड़ाई समान बनी रहे। कॉलम की संख्या पैटर्न के अनुसार तय की जा सकती है या लगभग 8 से 12 के बीच कुछ भी हो सकती है। पैटर्न को समझने के लिए कम-से-कम 8 से 10 कॉलम की आवश्यकता होगी।



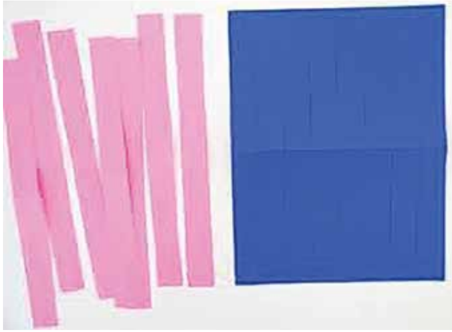
**चित्र-1**

3. काग़ज़ को खोलें। यह अब आधार फ्रेम के रूप में इस्तेमाल होगा।



**चित्र-2**

4. बुनाई के लिए दूसरे रंग की उतनी ही चौड़ी पट्टियाँ काटें जितनी कॉलम की चौड़ाई है। पट्टियों की संख्या कॉलम की संख्या के बराबर रखी जा सकती है।



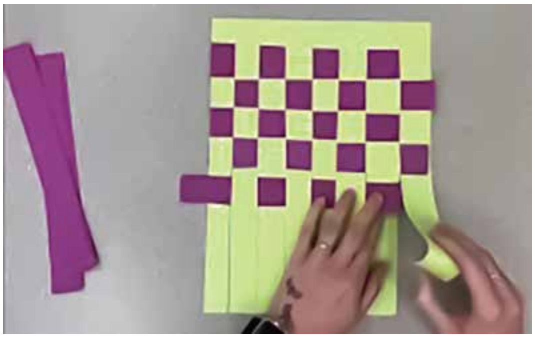
**चित्र-3**

## डिज़ाइन 1 : मूल बुनाई

यह एक 1-1 पैटर्न है जिसमें 1 पट्टी कॉलम के ऊपर, 1 कॉलम के नीचे की तरफ़ लगाई जाती है (इसे OU के रूप में कोड किया जा सकता है)।

1. एक काग़ज़ की पट्टी लें, और उसे कॉलम के आर-पार इस तरह बुनें कि वह एक कॉलम से ऊपर और अगले कॉलम के नीचे से जाए (OU)।
2. दूसरी पट्टी को भी इसी तरह बुनें। बस इसका कॉलम से गुज़रने का क्रम उल्टा कर दें – पहले पट्टी कॉलम के नीचे से फिर कॉलम के ऊपर से जाए, यानी (UO) में बुनें।

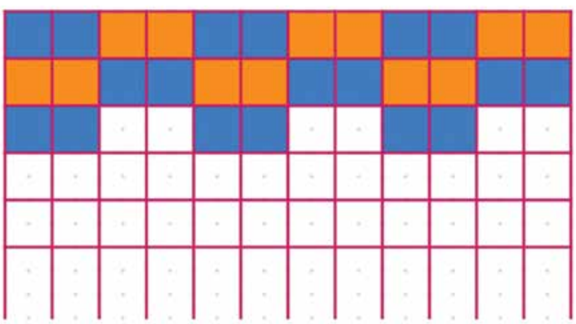
शतरंज बोर्ड जैसी डिज़ाइन बनाने के लिए चरण-1 व 2 को दोहराते हुए और पट्टियाँ बुनते जाएँ।



**चित्र-4**

विद्यार्थियों से ऐसे प्रश्न पूछे जा सकते हैं जो उन्हें यह कल्पना करने के लिए प्रेरित करें कि यदि वे 1-1 की जगह 2-2 (OOUU) पैटर्न अपनाएँ तो अन्त में पैटर्न कैसा दिखाई देगा।

यदि 1-1 पैटर्न से एक जैसे आकार के वर्ग बनते हैं तो 2-2 पैटर्न अपनाने पर कौन-सी आकृति उभरेगी?



**चित्र-5**

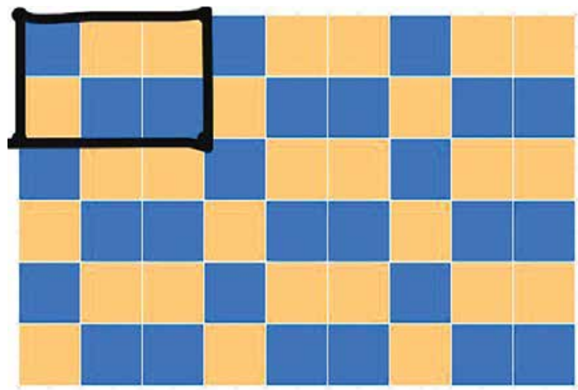
विद्यार्थी बुनाई शुरू करने से पहले ग्रिड पेपर पर डिज़ाइन बना सकते हैं, और उसे रंग सकते हैं।

**चित्र-6**

इससे आगे और क्या किया जा सकता है या क्या-क्या बन सकता है, ऐसी सम्भावनाओं के बारे में शिक्षक या विद्यार्थी पूछ सकते हैं। इस तरह की पड़ताल में, विद्यार्थी स्वयं प्रश्न करने और उनके उत्तर खोजने की प्रक्रिया में जुट जाते हैं।

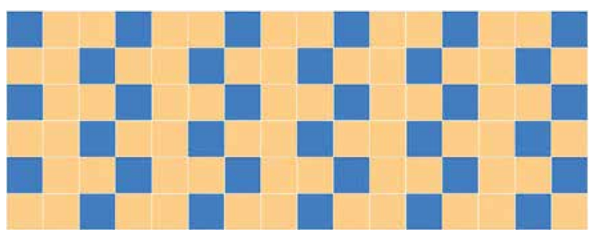
1-2 (OUU) डिज़ाइन कैसी दिखाई देगी? यदि दूसरी पंक्ति को विपरीत क्रम में 1-2 (UOO) बुना जाए तो इससे कौन-सी आकृतियाँ बनेंगी? ऐसी डिज़ाइन की पुनरावृत्ति (दोहराने वाली) इकाई क्या होगी?

चित्र-7 में दिखाया गया चिह्नित आयत इस पुनरावृत्ति इकाई को दर्शाता है।



**चित्र-7**

यदि हमने पहली पंक्ति के लिए 1-2 (OUU) और दूसरी पंक्ति के लिए 2-1 (UUO) का उपयोग किया होता तब डिज़ाइन कैसी बनती?



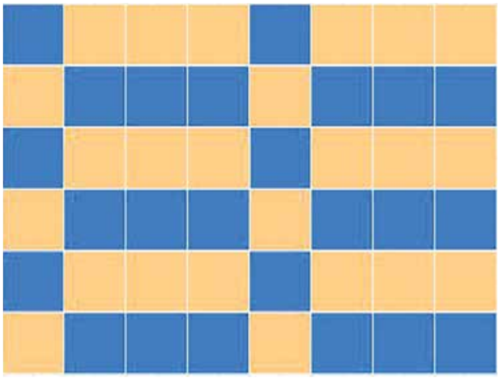
**चित्र-8**

विद्यार्थियों के लिए यह जानना दिलचस्प होगा कि कोड में एक छोटा-सा बदलाव कैसे पूरी तरह से अलग डिज़ाइन तैयार कर सकता है।

विद्यार्थी अनुमान लगा सकते हैं और जाँच सकते हैं कि 1-3 डिज़ाइन से कौन-कौन-सी आकृतियाँ बनेंगी। वे कल्पना कर सकते हैं कि यह आयत कैसे बढ़ेगा।

क्या 1-3 डिज़ाइन में वर्गों का एकान्तर पैटर्न बनेगा?

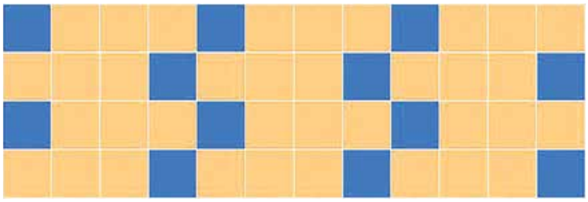
पुनरावृत्ति इकाई किस रूप में दिखाई देगी?



**चित्र-9**

अनुमान लगाने के बाद, विद्यार्थी 1-3 (OUUU) और 1-3 (UOOO) को एकान्तर पर उपयोग कर डिज़ाइन बना सकते हैं।

यदि दूसरी पंक्ति विपरीत रंग में 3-1 (UUUO) हो तो 1-3 (OUUU) डिज़ाइन कैसी दिखाई देगी?



**चित्र-10**

## शिक्षकीय नोट

**पाठ के उद्देश्य :** आप अपने विद्यार्थियों को पाठ के अन्त में क्या समझाना चाहते हैं?

**शिक्षण संसाधन :** आवश्यक सामग्री, कक्षा की व्यवस्था, चर्चा के बिन्दु आदि।

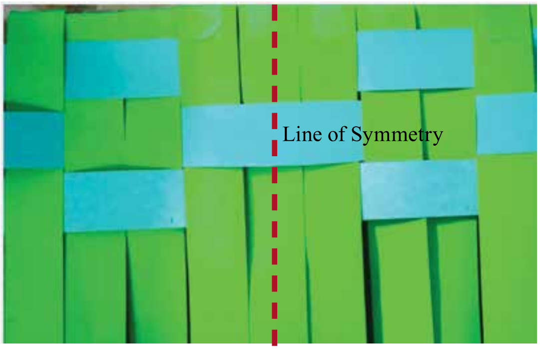
**अवलोकन :** विद्यार्थियों की भागीदारी, अच्छे प्रश्न, अप्रत्याशित चुनौतियाँ, आकलन सम्बन्धी समझ आदि।

## डिज़ाइन 2 : सममित डिज़ाइन

यह एक 1-2-3-2-1 (UOOUUUOOU) पैटर्न है। संख्याएँ एक पैलिंड्रोम (उल्टा-सीधा एकसमान) की तरह हैं। यानी यह एक ऐसा पैटर्न है जिसमें बाएँ से दाएँ और दाएँ से बाएँ देखने पर पैटर्न एक जैसा दिखता है, जैसे MADAM शब्द, और यह पैटर्न बुनाई में एक ऊर्ध्वाधर सममित रेखा बनाता है।

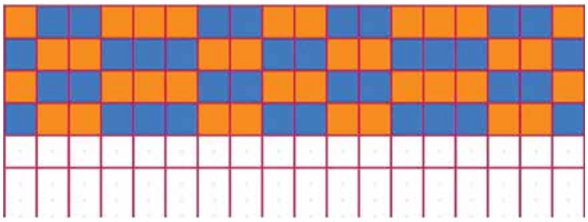
**चित्र-11**

काग़ज़ की एक पट्टी लें, और उसे कॉलम के आर-पार बुनें। 1 कॉलम के नीचे, 2 कॉलम के ऊपर, 3 कॉलम के नीचे, 2 कॉलम के ऊपर और 1 कॉलम के नीचे (UOOUUUOOU) से निकालें। दूसरी पट्टी को उल्टे तरीक़े से बुनें। पट्टियों को OUUOOOUUO क्रम में कॉलम के ऊपर और नीचे से ले जाएँ।



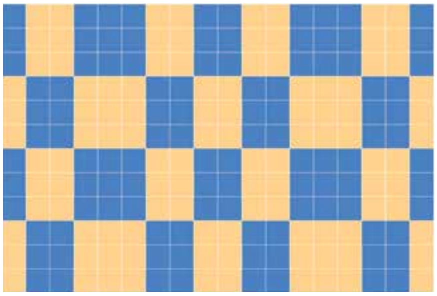

**चित्र-12**

1-2-3-2-2-2-3-2-1 का पैटर्न कैसा दिखेगा?



**चित्र-13**

यदि पैटर्न को उलटने से पहले प्रत्येक पंक्ति को एक ही तरीक़े से तीन बार दोहराया जाए, तो 1-2-3-2-2-2-3-2-1 पैटर्न कैसा दिखेगा?



**चित्र-14**

विद्यार्थी दोनों ग्रिडों की तुलना कर सकते हैं, और इस बारे में अपने अवलोकन कर सकते हैं कि डिज़ाइन कैसे बदल गई। क्या समान रहा है? क्या बदल गया है?

**चित्र-15**

हम एक सममित सीढ़ीनुमा डिज़ाइन कैसे बना सकते हैं?

यह डिज़ाइन 8 कॉलम वाले फ्रेम में तैयार की गई है (**चित्र-15**)।

बीचों-बीच के दो कॉलम ढँके रहेंगे। यदि फ्रेम में कॉलम की संख्या विषम हो तो केवल एक कॉलम ढँका रहेगा।

विद्यार्थियों को प्रत्येक पंक्ति के लिए ऐसा कोड तैयार करना होगा जिससे डिज़ाइन में सममित सीढ़ीनुमा संरचना बन सके।

यदि इस डिज़ाइन को क्षैतिज रूप से भी सममित बनाना हो तो क्या वे अगली 4 पंक्तियों का कोड निकाल सकते हैं?

**शिक्षकीय नोट**

**पाठ के उद्देश्य :** आप अपने विद्यार्थियों को पाठ के अन्त में क्या समझाना चाहते हैं?

**शिक्षण संसाधन :** आवश्यक सामग्री, कक्षा की व्यवस्था, चर्चा के बिन्दु आदि।

**अवलोकन :** विद्यार्थियों की भागीदारी, अच्छे प्रश्न, अप्रत्याशित चुनौतियाँ, आकलन सम्बन्धी समझ आदि।

## डिज़ाइन 3 : विकर्ण पैटर्न

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

**चित्र-16**

हम सभी 3 के गुणन पैटर्न से परिचित हैं।

इस बुनाई को बनाने के लिए हम 10 कॉलम वाला एक चार्ट बना सकते हैं।

अगर 10×10 का यह संख्या चार्ट एक बुनाई ग्रिड होता तो पहली पंक्ति के लिए हम संख्या पैटर्न कैसे लिखते?

2 कॉलम के ऊपर से, 1 कॉलम से नीचे से, 2 कॉलम के ऊपर से, 1 कॉलम से नीचे से, 2 कॉलम के ऊपर से, 1 कॉलम के नीचे से, 1 कॉलम के ऊपर से (OOUOOUOOUO) पट्टी निकालें।

हम दूसरी पंक्ति के लिए संख्या पैटर्न कैसे लिखेंगे?

1 कॉलम के ऊपर से, 1 कॉलम के नीचे से, 2 कॉलम के ऊपर से, 1 कॉलम के नीचे से, 2 कॉलम के ऊपर से, 1 कॉलम

के नीचे से, 2 कॉलम के ऊपर से (OUOOUOOUOO) पट्टी निकालें।

तीसरी पंक्ति के लिए हम संख्या पैटर्न कैसे लिखेंगे?

1 कॉलम के नीचे से, 2 कॉलम के ऊपर से, 1 कॉलम के नीचे से, 2 कॉलम के ऊपर से, 1 कॉलम के नीचे से, 2 कॉलम के ऊपर से, 1 कॉलम के नीचे से (UOOUOOUOOU) पट्टी निकालें।

पैटर्न में हर अगली पंक्ति में बदलाव या विस्थापन लाकर एक विकर्ण (तिरछा) पैटर्न प्राप्त किया जाता है।

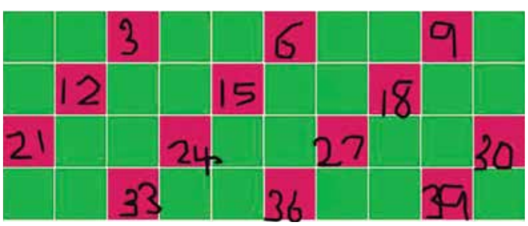
यहाँ :

पंक्ति 1 : 2-1-2-1-2-1-1

पंक्ति 2 : 1-1-2-1-2-1-2

पंक्ति 3 : 1-2-1-2-1-2-1


चित्र-17




चित्र-18

प्रत्येक पंक्ति में क्या हो रहा है? (**चित्र-18** देखें। चित्र-17 और 18 समान ही हैं।) पहली पंक्ति 10 पर ख़त्म होती है। चूँकि हम 3 के गुणजों पर विचार कर रहे हैं (10 को 3 से भाग देने पर शेष 1 प्राप्त होता है)। इसका अर्थ है कि पहली पंक्ति के अन्त में एक वर्ग ढँका रह जाता है। दूसरी पंक्ति 20 तक जाती है। 20 को 3 से भाग देने पर 2 शेष बचता है, इसलिए दूसरी पंक्ति के अन्त में दो वर्ग ढँके हुए रह जाते हैं। तीसरी पंक्ति 30 तक जाती है। 30 को 3 से भाग देने पर कोई शेष नहीं बचता, इसलिए तीसरी पंक्ति के अन्त में कोई वर्ग ढँका हुआ नहीं रहता है।

यदि हमने 8 कॉलम वाले फ्रेम का उपयोग किया होता तो 3 के गुणजों का पैटर्न कैसा दिखता?

पहली पंक्ति के अन्त में कितने वर्ग खुले रह जाएँगे?

हमारी पूर्व समझ के अनुसार, 8 को 3 से भाग देने पर 2 शेष बचता है। इसलिए पहली पंक्ति के अन्त में 2 वर्ग ढँके हुए रहेंगे। दूसरी पंक्ति में वर्गों की गिनती 16 तक है (8 का दो गुना)। 16 को 3 से विभाजित करने पर शेष 1 आता है, अतः अन्त में 1 वर्ग ढँका रहेगा।

4 के गुणजों को सामान्य रूप से कैसे कोड किया जाएगा? OOOUOOOUOOOU...

अब आइए, यह अनुमान लगाने का प्रयास करें कि 4 के गुणजों को दर्शाने वाले 7 कॉलम वाले फ्रेम में प्रत्येक पंक्ति के अन्त में कितने वर्ग ढँके रहेंगे।

**पहली पंक्ति :** 7 को 4 से भाग देने पर शेष 3 बचता है। अतः पहली पंक्ति के अन्त में 3 वर्ग ढँके रहेंगे।

**दूसरी पंक्ति :** 14 (7 का दो गुना) को 4 से भाग देने पर शेष 2 बचता है। अतः दूसरी पंक्ति के अन्त में 2 वर्ग ढँके रहेंगे।

**तीसरी पंक्ति** : 21 को 4 से भाग देने पर शेष 1 बचता है। अतः तीसरी पंक्ति के अन्त में 1 वर्ग ढँका रहेगा।

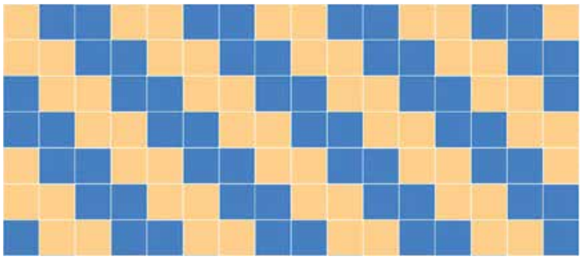
अब सोचिए, चौथी पंक्ति के अन्त में क्या होगा?

सामान्यतः 2 के गुणजों को किस प्रकार कोड किया जा सकता है? OUOUOUOUOUO...

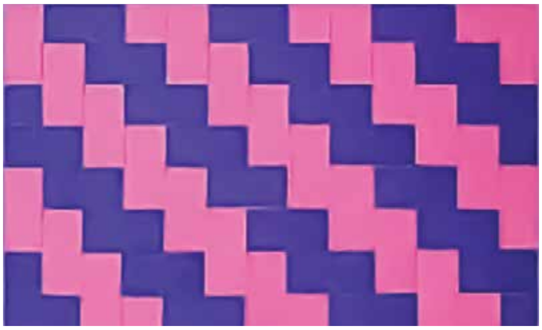
यदि हमारे पास 9 कॉलम वाला एक फ्रेम हो जो 2 के गुणजों को दर्शाता हो तो विभिन्न पंक्तियों में क्या दिखाई देगा? क्या कोई पैटर्न उभरता है?

यह गतिविधि विभिन्न कॉलम वाले फ्रेम और अलग-अलग संख्याओं के गुणजों के साथ कई तरह की खोज की सम्भावनाएँ खोलती है।

यदि पहली पंक्ति UOOUUOOUU है... और दूसरी पंक्ति UUOOUUOOUUOO है... तो किस प्रकार की डिज़ाइन बनेगी?



चित्र-19



चित्र-20

यह आयतों का एक विकर्ण पैटर्न बनाता है (**चित्र-20** देखें)। इन आयतों की चौड़ाई 2 इकाई है। विकर्ण रेखा के बारे में और क्या कहा जा सकता है? यह एक दिशा में जा रही है। हम कह सकते हैं कि यह बाएँ से दाएँ नीचे की ओर या दाएँ से बाएँ ऊपर की ओर जा रही है।

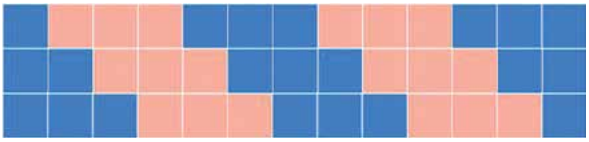
इस बुने हुए टुकड़े में और क्या-क्या देखा जा सकता है? ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज आयत बारी-बारी से दिखाई देते हैं। एक विकर्ण ऊर्ध्वाधर आयतों से बना है। दूसरा विकर्ण क्षैतिज आयतों से बना है।

यहाँ पुनरावृत्ति इकाई क्या है?

क्या विद्यार्थी 3 इकाई चौड़ाई वाले विकर्ण आयतों के लिए एक संख्या पैटर्न लिख सकते हैं?

यह क्रमशः पहली पंक्ति में 1, 3, 3, 3, 3 (OUUUOOOUUUOOO), दूसरी पंक्ति में 2, 3, 3, 3, 2 (OOUUUOOOUUUOO) और तीसरी पंक्ति में 3, 3, 3, 3, 1 (OOOUUUOOOUUUO) होगा।

इससे इस प्रकार एक विकर्ण बुनाई बनेगी।



चित्र-21

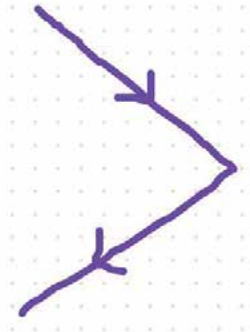
विकर्ण की दिशा बदलने के लिए हम क्या कर सकते हैं?

हम इसके लिए संख्या पैटर्न कैसे लिखेंगे?

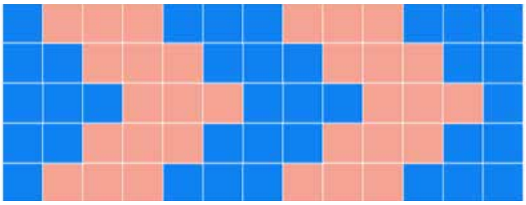
ज़ाहिर है, पैटर्न के अन्तिम चरण को उलटना होगा।

जब तीसरी पंक्ति के नीचे दूसरी पंक्ति 2, 3, 3, 3, 2 (OOUUUOOOUUUOO) को दोहराया जाता है, यह पलट जाती है।

पाँचवीं पंक्ति में 1, 3, 3, 3, 3 (OUUUOOOUUUOOO) करने से डिज़ाइन का क्षैतिज प्रतिबिम्ब पूरा हो जाएगा (**चित्र-23**)।



चित्र-22



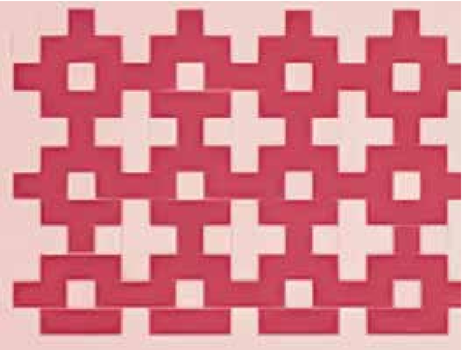
चित्र-23

विभिन्न रंगों की पट्टियों के साथ प्रयोग करके अलग-अलग डिज़ाइन बनाई जा सकती हैं।

**चित्र-24** और **चित्र-25** की इन डिज़ाइनों में क्षैतिज सममिति है।

चित्र-24

चित्र-25



चित्र-26

चित्र-27

**चित्र-26** और **चित्र-27** की इन सुन्दर डिज़ाइनों के लिए हम संख्या पैटर्न कैसे बनाएँ?

विद्यार्थी पैटर्न को समझने के लिए ग्रिड पर इसका एक छोटा संस्करण बना सकते हैं, और इसे संख्या पैटर्न के रूप में कोड कर सकते हैं।

इनमें से अधिकांश डिज़ाइनों में 3 प्रकार की सममिति होती है : क्षैतिज, ऊर्ध्वाधर और विकर्ण।

**शिक्षकीय नोट**

**पाठ के उद्देश्य :** आप अपने विद्यार्थियों को पाठ के अन्त में क्या समझाना चाहते हैं?

**शिक्षण संसाधन :** आवश्यक सामग्री, कक्षा की व्यवस्था, चर्चा के बिन्दु आदि।

**अवलोकन :** विद्यार्थियों की भागीदारी, अच्छे प्रश्न, अप्रत्याशित चुनौतियाँ, आकलन सम्बन्धी समझ आदि।

## डिज़ाइन 4 : बुनाई और उल्टी तरफ़ डिज़ाइन

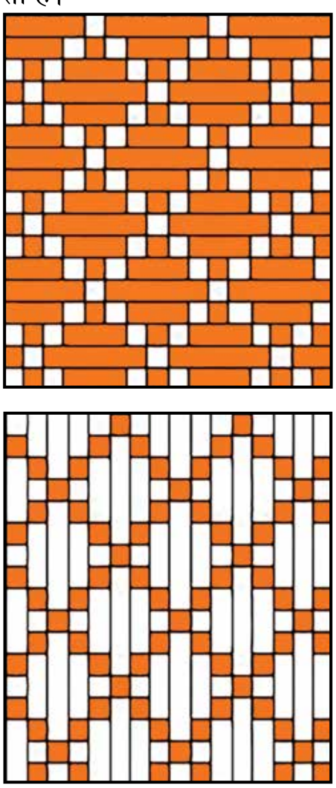
विद्यार्थियों को ग्रिड काग़ज़ पर एक डिज़ाइन दी जा सकती है, और उनसे कहा जा सकता है कि वे उसे बुनाई के पैटर्न में बदलने के लिए उपयुक्त कोड लिखें।

**चित्र-28** के ग्रिड पैटर्न का कोड क्या होगा?

इस डिज़ाइन के लिए कितनी पंक्तियों का कोड तैयार करना आवश्यक है?

बुनाई को पलटकर देखना अपने-आप में रोचक अनुभव होता है। पेपर बुनाई में हमें डिज़ाइन का पिछला हिस्सा भी नज़र आता है। जो कोड इस्तेमाल किया गया है, उसका पिछली तरफ़ के कोड से क्या सम्बन्ध होता है? किसमें उलटफेर होता है?

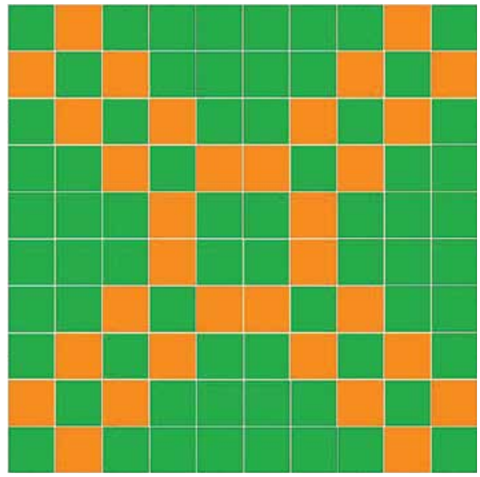
**चित्र-28** में दूसरा ग्रिड, पहले ग्रिड की डिज़ाइन का पिछला हिस्सा दिखाता है।



**चित्र-28**

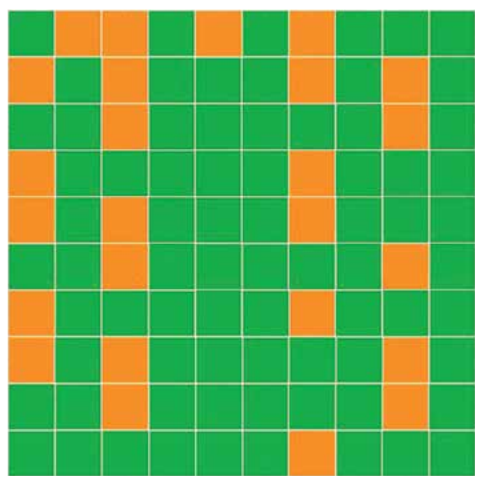
इस आकृति में ऊर्ध्वाधर, क्षैतिज और विकर्ण सममिति है।

क्या विद्यार्थी प्रत्येक स्थिति में सममिति रेखाओं की पहचान कर सकते हैं?



**चित्र-29**

चुनौती! यहाँ __________ संख्याओं पर आधारित एक संख्या चार्ट से बनी एक डिज़ाइन दी गई है!



**चित्र-30**

नारंगी रंग के वर्गों में आप क्या विशेषता देख रहे हैं? आख़िरी कॉलम में ये वर्ग क्यों नहीं दिखाई दे रहे?

ऊपरी पंक्ति को स्केल से ढँकें, और फिर कॉलम को ग़ौर से देखें।

दूसरी पंक्ति से आगे कुछ कॉलम में नारंगी वर्ग क्यों नहीं हैं?

### शिक्षकीय नोट

| क्या कारगर रहा? | क्या कारगर नहीं रहा? |
| --- | --- |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**References and credits**


1. Dilling, M. (2012, August 6). *Weaving inverse operations, multiples and factors into the feet.* Math in Your Feet. https://mathinyourfeet.blogspot.com/2012/08/weaving-inverse-operations-multiples.html

2. Origami Resource Center. (n.d.). *Weaving patterns.* Retrieved June 18, 2025, from https://origami-resource-center.com/weaving-patterns/

3. Pinterest. (n.d.). *[Image of a weaving pattern].* Pinterest. https://i.pinimg.com/236x/2f/ec/c2/2fecc2a81f028f5d1639603229c6e66a.jpg



पद्मप्रिया शिराली

**पद्मप्रिया शिराली** सह्याद्री स्कूल (पुणे) और ऋषि वैली (आन्ध्र प्रदेश) में स्थित सामुदायिक गणित केन्द्र से जुड़ी हुई हैं। यहाँ वे 1983 से कार्यरत हैं। उन्होंने गणित, कम्प्यूटर अनुप्रयोग, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू जैसे विभिन्न विषय पढ़ाए हैं। 1990 के दशक में उन्होंने स्वर्गीय श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ निकटता से कार्य किया। वे उस टीम की सदस्य रही हैं जिसने ऋषि वैली ग्रामीण केन्द्र में 'स्कूल इन ए बॉक्स' नामक बहु-स्तरीय प्राथमिक शिक्षा कार्यक्रम विकसित किया। वर्तमान में वे एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तक विकास समूह की सदस्य हैं। उनसे padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।



**अनुवाद :** प्रमोद मैथिल  **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता  **कॉपी एडिटर :** अतुल अग्रवाल

# अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी
# एट राइट एंगल्स
स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

गणित और गणित शिक्षा पर एक गहन, गम्भीर पत्रिका।

शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों और विषय से जुड़े विद्यार्थियों के लिए।

## भारत एक : बुनाई के तरीक़े अनेक


कशीदा


कसावु


तन्त बुनाई


फुलकारी


कुल्लुवी पट्टू


बोमकाई


चन्देरी साड़ी


बनारसी सिल्क बुनाई


सम्बलपुरी बंधा साड़ी

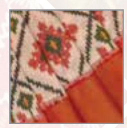

कोटा/लेहरिया

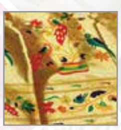

भागलपुर रेशम


कोसा


पटोला क्राफ्ट


मुगा


पोचमपल्ली


पैठानी बुनाई


गड़ु या मिरिजिम बुनाई


उप्पाडा जामदानी साड़ी

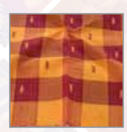

मैसूर सिल्क


मोइरांग फी


कांचीपुरम रेशम बुनाई


इल्कल बुनाई


पुआन बुनाई


कंडांगी बुनाई

Azim Premji University
Survey No. 66, Burugunte Village,
Bikkanahalli Main Road, Sarjapura
Bengaluru – 562125

azimpremjiuniversity.edu.in

Facebook: /azimpremjiuniversity
Instagram: @azimpremjiuniv
X: @azimpremjiuniv