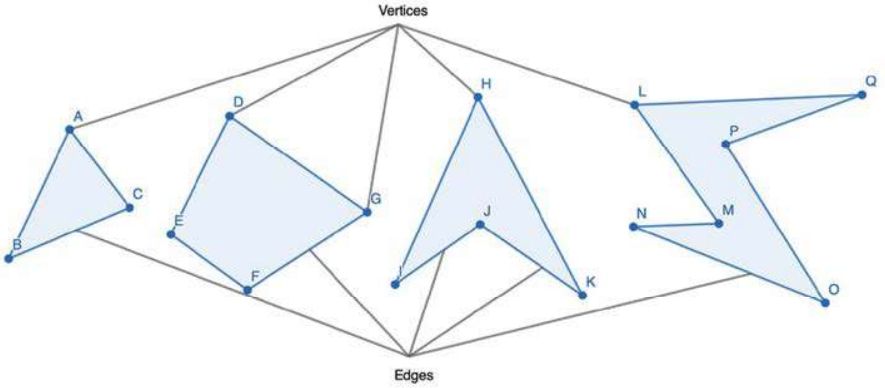
ಸಮಮಿತಿ ಇರುವ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳ ಅನ್ವೇಷಣೆ

ಅಜಯ್‌ಕುಮಾರ್

ಈ ಲೇಖನವು ಸಮಮಿತೀಯ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮಾಡುವ ವಿವಿಧ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ವೀಕ್ಷಣೆ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣವನ್ನು ಉತ್ತೇಜಿಸುವ ಕೈಯಾರೆ ಮಾಡುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಒತ್ತು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಿದ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ, ಗಣಿತವು ಅಮೂರ್ತದಿಂದ ಮೂರ್ತ, ಸಂವಾದಾತ್ಮಕ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಶನಾನುಭವವಾಗಿ ರೂಪಾಂತರಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. NCERT VI ನೇ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ (NCERT, 2024) ಇತ್ತೀಚಿನ ಆವೃತ್ತಿಯು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಕಲ್ಪನೆಗಳು ಗರಿಗೆದರುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯೊಂದಿಗೆ ಸಮಮಿತಿಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಗಮನಾರ್ಹ ಚಟುವಟಿಕೆಯೆಂದರೆ ಕಾಗದ ಮಡಿಸುವ ಮತ್ತು ಕತ್ತರಿಸುವ (NCERT, 2024, pp.223) ಚಟುವಟಿಕೆ ಮಾಡಿ ಮಡಿಸಿದ ಕಾಗದವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಊಹಿಸುವುದು. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯು ಸಮಮಿತಿಯ ಬಗ್ಗೆ ಅವರ ತಿಳಿವಳಿಕೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುವುದಲ್ಲದೆ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಮಾದರಿಗಳ ಕುರಿತಾದ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಆಳವಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಲೇಖನವು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿದ್ದು ಪುಸ್ತಕಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾದ ಮತ್ತು ತರಗತಿಯ ಅನುಭವವನ್ನು ಗಾಢವಾಗಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಸರಣಿಯನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸುತ್ತದೆ. ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳೆಂದರೆ ಸರಳ ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಂದ (ಪರಸ್ಪರ 180° ಕೋನ ರೂಪಿಸದ) ರೂಪುಗೊಂಡ ಸರಳ ಆವೃತ ಆಕೃತಿಗಳೆಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.

ನಾವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನುಅದರ ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಹೆಸರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮೂರು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು 3–ಭುಜ ಅಥವಾ ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು 4–ಭುಜ ಅಥವಾ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, n ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು n ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು n–ಭುಜ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ಅಥವಾ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಅಂಚುಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅಂಚುಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಶೃಂಗಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮಡಿಸಿದ ಕಾಗದದ ವಿವಿಧ ಸೀಳುಗಳು (cuts) ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರಗಳಿಗೆ ಹೇಗೆ ಕಾರಣವಾಗಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗೆ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಾಗದವನ್ನು ವಿಧವಿಧವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಸಮಮಿತಿ ಮತ್ತು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧದ ಬಗ್ಗೆ ಆಳವಾದ ಒಳನೋಟವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು ಮತ್ತು ಆ ಮೂಲಕ ಹೊರಬರುವ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 1

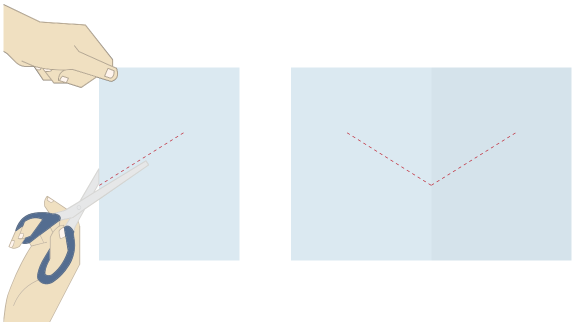
ಪ್ರಮುಖ ಪದಗಳು: ರಾಖಾ ಸಮಮಿತ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು, ಸಮಮಿತ ತ್ರಿಭುಜಗಳು.

ಈ ಲೇಖನದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಾವು ‘ಸೀಳು (cut)’, ‘ಸೀಳುಗಳ ಅನುಕ್ರಮ’ ಮತ್ತು ‘ಕತ್ತರಿಸಿದ ಚಿತ್ರ’ ಪದಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ‘ಸೀಳು’ ಎನ್ನುವುದು ಕಾಗದವನ್ನು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಕತ್ತರಿಸುವ ಏಕೈಕ ಗೆರೆ ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ). ‘ಎರಡು ಸೀಳುಗಳ ಅನುಕ್ರಮ’ದಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಸೀಳು ಮೊದಲ ಸೀಳುದ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುತ್ತದೆ, ಮೊದಲ ಸೀಳು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಸೀಳುಗಳ ನಡುವೆ ಕೋನ ಏರ್ಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆಯೆದರೂ ಅದು 180 ಡಿಗ್ರಿ ಆಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಇಲ್ಲಿ 3 ಸೀಳುಗಳ ಅನುಕ್ರಮವನ್ನು ಚಿತ್ರ 3 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ‘ಕತ್ತರಿಸಿದ ಚಿತ್ರ’ ಎಂದರೆ, ಮಡಿಸಿದ ರೇಖೆಯ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಮತ್ತು ರೇಖೆಯ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಸೀಳುಗಳ ಅನುಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಸಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸುವುದನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿದ ನಂತರ ಹೊರಬರುವ ಕಾಗದದ ಚಿತ್ರ ಅಥವಾ ತುಂಡು. ನಾವು ಇದನ್ನು ಬಹು ಸೀಳು (multiple cut) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರ 3 ರ ಬಲಭಾಗವು 3 ಸೀಳುಗಳ ಅನುಕ್ರಮವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಪಡೆದ ಕತ್ತರಿಸಲಾದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಕೆಲವು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅವಲೋಕನಗಳು

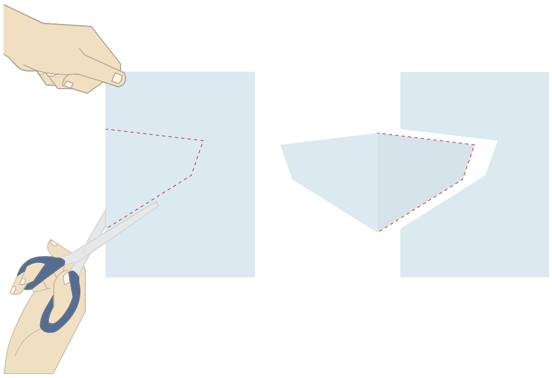
1. ಕತ್ತರಿಸಿದ ನಂತರ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಮಡಿಕೆ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಬೇಕು, ಆ ರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ನೇರವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತ ಹೋಗಬೇಕು. ಏಕೆಂದರೆ ಕತ್ತರಿಸಿದ ಚಿತ್ರವು ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಂದ ಮಾತ್ರ ಕೂಡಿರಬೇಕು. ಅದು ಮಡಿಕೆ ರೇಖೆಯ ಇನ್ನೊಂದು ಹಂತದಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳಬೇಕು. ಈ ನಿಯಮವು ಕತ್ತರಿಸಿದ ಚಿತ್ರವು ಸರಳ ಮತ್ತು ಆವೃತ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯಾಗುವುದನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

2. ಚಿತ್ರ 2 ರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಸೀಳಿನಿಂದ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, ಮಡಿಕೆ ರೇಖೆಯುದ್ದಕ್ಕೂ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಶೃಂಗಗಳು ಮತ್ತು ಬಾಹುಗಳು ರೂಪುಗೊಳ್ಳುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಹೀಗಾಗಬೇಕೆಂದರೆ ಒಂದರ ಬದಲಾಗಿ ಅನೇಕ ಸೀಳುಗಳು ಅಗತ್ಯ.



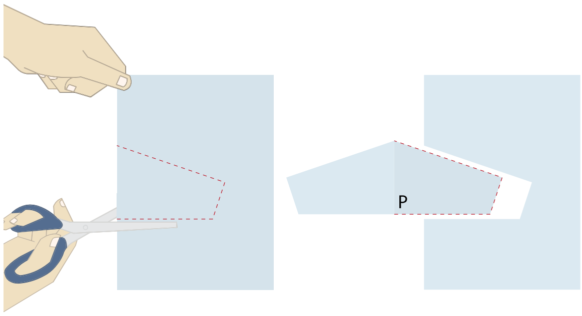
ಚಿತ್ರ 2

3. ಮಡಿಕೆ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೊರಟ ಸೀಳು ಮಡಿಕೆ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರದೆ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಬಿಂದುವು ಹೀಗೆ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಶೃಂಗವಾಗಿರುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 3 ನೋಡಿ).



ಚಿತ್ರ 3

4. ಮಡಿಕೆ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೊರಟ ಸೀಳು ಮಡಿಕೆ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಬಿಂದುವು ಹೀಗೆ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಶೃಂಗವಲ್ಲ (ಚಿತ್ರ 4 ನೋಡಿ). ಇದಲ್ಲದೆ, ಅಂತಹ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಆಕೃತಿಯ ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 4

5. ಒಂದು ಹಂತದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸೀಳುಗಳು ಸಂಧಿಸಿದರೆ (ಈ ಸಂಧಿಬಿಂದುವು ಸೀಳುರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರುವಂತಿಲ್ಲ) ಅದು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಎರಡು ಶೃಂಗಗಳಿಗೆ ಕಾರಣವಾಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 5).

ಅನ್ವೇಷಣೆ 1: ಸಮಮಿತೀಯ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು (3–gons)

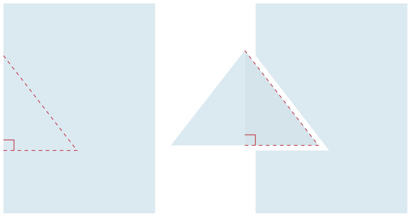
ಮಡಿಕೆಯ ರೇಖೆಯಗುಂಟ ಸಮಮಿತೀಯವಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸುವ ಮೂಲಕ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ.

ಪ್ರಶ್ನೆ: ಮಡಿಸಿದ ಕಾಗದದಿಂದ ಸಮಮಿತೀಯ ತ್ರಿಕೋನ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸೀಳುವನ್ನು ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಮಾರ್ಗಗಳು ಯಾವುವು?

ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ನಾವು ಕಾಗದದ ತುಂಡನ್ನು ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಮಡಿಸೋಣ. ನಾವು ಮೂರು (ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು) ಸೀಳುಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ, ಅವುಗಳು ಎರಡು (ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು) ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಕಾರಣವಾದ ಎರಡು ಸೀಳುಗಳ ಸಂಧಿಯಿಂದ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ # 5 ರ ಪ್ರಕಾರ, ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಆಕೃತಿಯು ನಾಲ್ಕು ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾವು ನಿಖರವಾಗಿ ಎರಡು ಮತ್ತು ಎರಡೇ ಸೀಳುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು.

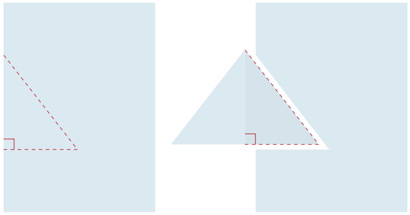
ಎರಡು ಸೀಳುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೂ ಮಡಿಕೆ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ನಂತರ ಅವಲೋಕನ 3 ರ ಪ್ರಕಾರ, ಮಡಿಕೆ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಎರಡು ಶೃಂಗಗಳಿಗೆ ಕಾರಣವಾಗುತ್ತವೆ. ಅವಲೋಕನ 5 ರ ಮೂಲಕ ಈ ಎರಡು ಸೀಳುಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಇನ್ನೂ ಎರಡು ಶೃಂಗಗಳಿಗೆ ಕಾರಣವಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯು ನಾಲ್ಕು ಬದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಹೀಗೆ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾವು ಆಯಕಟ್ಟಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸೀಳುಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದಾದ ಒಂದೇ ವಿಧಾನವೆಂದರೆ ಈ ಸೀಳುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಮಡಿಸುವ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬಕೋನದಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳು ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಕಾರಣವಾಗುವ ಸ್ವರೂಪದ ಕಾರ್ಯತಂತ್ರದ ಸೀಳನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ. ಹೀಗೆ ಪಡೆದ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮಮಿತಿಯ ರೇಖೆಯೇ ಮಡಿಕೆ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ ಎನ್ನುವುದು ಇದರಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟ.



ಚಿತ್ರ 6ಎ

ಇದಲ್ಲದೆ, ಈ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಈ ಸಮಮಿತಿಯ ರೇಖೆಯ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಮಡಿಸುವಾಗ, ಅದರ ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುತ್ತವೆ, ಅಂದರೆ ಈ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಒಂದೇ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಮಿತಿಯ ರೇಖೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ರೇಖೆಯ ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಾವು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಅಂತಹ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದಲ್ಲದೆ, ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಶೃಂಗಗಳು ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುವುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡುತ್ತೇವೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಸೇರುವ ಬಾಹುವು ಮಡಿಕೆಯ ರೇಖೆಯಿಂದ ವಿಭಜಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 6ಬಿ

ಇನ್ನಷ್ಟು ಹುಡುಕಾಟಗಳು: ಆಯಕಟ್ಟಿನ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸೀಳುಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಎಲ್ಲ ಬಾಹುಗಳೂ ಸಮನಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು (ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ) ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯುವುದು ಹೇಗೆ?

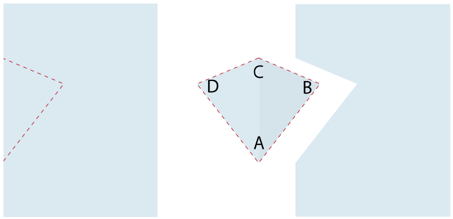
ಅನ್ವೇಷಣೆ 2: ಸಮಮಿತಿ ಹೊಂದಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಸೃಜಿಸುವುದು

ಈಗ, ನಮ್ಮ ಗಮನವನ್ನು ಮಡಿಕೆಯ ರೇಖೆಯುದ್ದಕ್ಕೂ ಸಮಮಿತಿಯುಳ್ಳ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳಿರುವ ಆಕೃತಿಗಳ (ಅಂದರೆ ಚತುರ್ಭುಜ) ಕಡೆ ಹರಿಸೋಣ.

ಪ್ರಶ್ನೆ : ಮಡಿಚಿರುವ ಕಾಗದದಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಆಕೃತಿಯು ಸಮಮಿತಿಯುಳ್ಳ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರಬೇಕೆಂದರೆ ಅದನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಬೇಕಾದ ವಿವಿಧ ವಿಧಾನಗಳು ಯಾವುವು?

ಮೊದಲನೆಯದಾಗಿ, ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಯನ್ನು ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಮಡಿಸೋಣ. ನಾವು ನಾಲ್ಕು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಸೀಳುಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗದು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಏಕೆಂದರೆ ಎರಡು ಸೀಳುಗಳು ಸಂಧಿಸುವಲ್ಲಿ ಮೂರು (ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು) ಬಿಂದುಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ. ಈ ಕಾರಣದಿಂದಾಗಿ (ಅವಲೋಕನ 5 ನ್ನು ನೋಡಿ) ಈ ಕತ್ತರಿಸಿದ ಚಿತ್ರವು ಆರು (ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು) ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜ ಬೇಕೆಂದರೆ ನಮ್ಮ ಸೀಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಅಥವಾ 3 ಇರಬೇಕು.

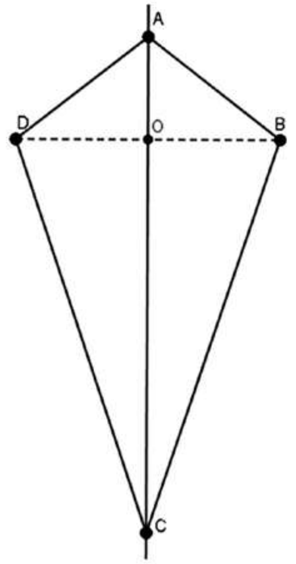
ಸಂದರ್ಭ 1 : ಎರಡು ಸೀಳುಗಳಿದ್ದಾಗ : ಚತುರ್ಭುಜ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲು ಕೇವಲ ಎರಡು ಸೀಳುಗಳನ್ನು ಬಳಸೋಣ. ಅವಲೋಕನ 3 ರ ಪ್ರಕಾರ ಮಡಿಕೆಯ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರದೆ ಇರುವ ಎರಡು ಸೀಳುಗಳು ಇದ್ದಾಗ ನಮಗೆ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 7

ಗಮನಿಸಿ. ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 7) ಮಡಿಕೆ ರೇಖೆಯು ಸಮಮಿತಿ ರೇಖೆಯೂ ಆಗಿದೆ. ಸಮಮಿತಿಯ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಮಡಿಕೆ ರೇಖೆಯ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಇರುವ

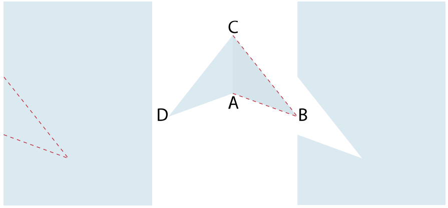
ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿಯೇ ಕಂಡುಬರುತ್ತಿದೆ. ಜೊತೆಗೆ A ಮತ್ತು C ಶೃಂಗಗಳು ಸಮಮಿತಿ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿವೆ. B ಮತ್ತು D ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ ಬಳಸಿ ಸಂಪರ್ಕಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಆ ರೇಖೆಯು ಸಮಮಿತಿ ರೇಖೆಯನ್ನು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.



ಚಿತ್ರ 8

ನಾವು ಸಮಮಿತಿ ರೇಖೆಯುದ್ದಕ್ಕೂ ABCD ಅನ್ನು ಮಡಿಸಿದಾಗ, OB ಮತ್ತು OD ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಅಲ್ಲದೆ, AOB ಮತ್ತು AOD ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು COB ಮತ್ತು COD ಕೋನಗಳು ಅದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಹೀಗಾಗಿ, OB ಮತ್ತು OD ಎರಡರ ಉದ್ದವೂ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಜೊತೆಗೆ, AOB, AOD, COB ಮತ್ತು COD ಈ ಎಲ್ಲ ಕೋನಗಳೂ ಲಂಬಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡು ಮತ್ತು ಎರಡೇ ಸೀಳುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಪಡೆದ ಅಂತಹ ಸಮಮಿತೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, ಎರಡು ಶೃಂಗಗಳು ಸಮಮಿತಿ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಕರ್ಣವು ಇತರ ಕರ್ಣದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ನಿರ್ಣಯಿಸಬಹುದು. ಈ ಗುಣಲಕ್ಷಣವಿರುವ ಎರಡು ಬಗೆಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಿವೆ: ಗಾಳಿಪಟ ಮತ್ತು ಬಾಣ (Dart). (ವಜ್ರಾಕೃತಿಯನ್ನು ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಪ್ರಕರಣವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದೆಂದು ಗಮನಿಸಿ.)



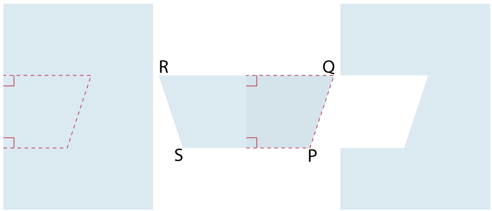
ಚಿತ್ರ 9

ಚಿತ್ರ 7 ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 8 ಗಳನ್ನು ಗಾಳಿಪಟ ಎಂದೂ ಚಿತ್ರ 9 ನ್ನು ಬಾಣ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇವೆರಡರ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೆಂದರೆ ಮೊದಲಿನ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಳಗೆ ಇರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ನಂತರದಲ್ಲಿ BD ಕರ್ಣವು ಚತುರ್ಭುಜದ ಹೊರಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಕರಣ 2 – ಮೂರು ಸೀಳುಗಳೊಂದಿಗೆ: ಮೂರು ಸೀಳುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೂ ಮಡಿಕೆ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ನಂತರ ಅವಲೋಕನ 3 ರ ಮೂಲಕ, ಮಡಿಕೆ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಚಿತ್ರದ ಎರಡು ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಸೀಳುಗಳ ಎರಡು ಜೋಡಿಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು, ಅವಲೋಕನ 5 ರ ಪ್ರಕಾರ, ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಚಿತ್ರದ ನಾಲ್ಕು ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯು ಆರು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಆದ್ದರಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಅಲ್ಲದೆ, ಇರುವ ಮೂರು ಸೀಳುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮಡಿಕೆ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬ ಕೋನದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅವಲೋಕನ 4 ರ ಪ್ರಕಾರ, ಅಂತಹ ಸೀಳುದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಚಿತ್ರದ ಶೃಂಗವನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ನಾವು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ಇತರ ಎರಡು ಸೀಳುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಮೇಲಿರುವ ಪಟ್ಟು ರೇಖೆಯ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವು ಶೃಂಗವನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ, ಈ ಸೀಳುಗಳ ಎರಡು ಜೋಡಿಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು, ಅವಲೋಕನ 5 ರ ಪ್ರಕಾರ, ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಚಿತ್ರದ ನಾಲ್ಕು ಹೆಚ್ಚಿನ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತವೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯು ಐದು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಹಾಗಾಗಿ ಅದೊಂದು ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾವು ಮೂರು ಸೀಳುಗಳನ್ನು ಬಳಸಬಹುದಾದ ಏಕೈಕ ಮಾರ್ಗವೆಂದರೆ ಮಡಿಕೆ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬಕೋನದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಸೀಳುಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದು. ಆ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ಅವಲೋಕನ 5 ರ ಮೂಲಕ ಈ ಸೀಳುಗಳ ಎರಡು ಜೋಡಿಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಕಟ್–ಔಟ್‌ನ ನಾಲ್ಕು ಶೃಂಗಗಳಿಗೆ ಕಾರಣವಾಗುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಶೃಂಗಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳು (ಚಿತ್ರ 10) ಅಂತಹ ಒಂದೆರಡು ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 10

ಚತುರ್ಭುಜ PQRS (ಚಿತ್ರ 10) ನಲ್ಲಿ, ಮಡಿಕೆಯ ರೇಖೆಯು ಸಮಮಿತಿಯ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ P ಮತ್ತು S, ಮತ್ತು Q ಮತ್ತು R ಗಳು ಈ ಚತುರ್ಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳ ಜೋಡಿಗಳಾಗಿರುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟ, ಅದು ಮಡಿಕೆ ರೇಖೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿದ್ದು ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಮಿತೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದಲ್ಲದೆ, PS ಮತ್ತು QR ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಏಕೆಂದರೆ ಅವುಗಳು ಸಮಮಿತಿ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಲ್ಲದೆ, PQRS ಅನ್ನು ಸಮಮಿತಿಯ ರೇಖೆಯ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಮಡಿಸುವಾಗ ನಾವು PQ ಮತ್ತು RS ರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದ ಒಂದೇ ಇರುವುದನ್ನು ಹಾಗೂ ಅದರಿಂದಾಗಿ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ನಿಖರವಾಗಿ ಮೂರು ಸೀಳುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಪಡೆದ ಸಮಮಿತೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೇ ಶೃಂಗವು ಸಮಮಿತಿಯ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಇತರ ಜೋಡಿ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಒಂದೇ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಾವು ನಿರ್ಣಯಿಸಬಹುದು. ಅಂತಹ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ನಾವು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಹೆಚ್ಚಿನ ಅನ್ವೇಷಣೆ: ಮೇಲಿನ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ಪಡೆದ ಸಮಮಿತೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಮಿತಿ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಾವು ಯಾವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಖಚಿತವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು?

ನಮ್ಮ ಅವಲೋಕನಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸುವುದು: ಮಡಿಸಿದ ಕಾಗದದಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ n-ಕೋನಗಳಿರುವ ಸಮಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಯಾವ ಯಾವ ರೀತಿ ಕತ್ತರಿಸಬಹುದು?

ಪರಾಮರ್ಶನ

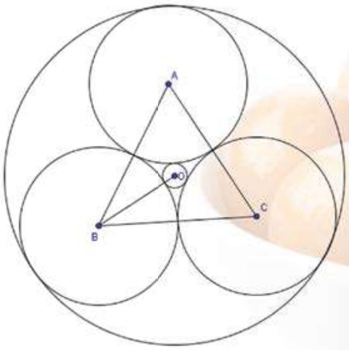
1. National Council of Educational Research and Training (NCERT). (2024). Ganit Prakash, Class 6 (1st ed.). NCERT. https://ncert.nic.in/textbook.php?fegp1=0-10

ಕೆ. ಅಜಯ್‌ಕುಮಾರ್ ಬೆಂಗಳೂರಿನ ಅಜೀಂ ಪ್ರೇಮ್‌ಜಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವನ್ನು ಬೋಧಿಸುತ್ತಾರೆ. ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಕರ ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿನ ಆಸಕ್ತಿಯ ಜೊತೆಜೊತೆಗೇ ಅವರು ಚಿತ್ರಕಥೆ ರಚನೆ ಮತ್ತು ಚಲನಚಿತ್ರ ನಿರ್ಮಾಣದ ಬಗ್ಗೆಯೂ ಉತ್ಸುಕರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಅವರ ಇ-ಮೈಲ್ ವಿಳಾಸ: ajaykumar.k@apu.edu.in

ಅನುವಾದ: **ಎಸ್. ಎನ್. ಗಣನಾಥ್** | ಪರಿಶೀಲನೆ: **ಮಧುಕರ ಎಸ್. ಪುಟ್ಟಿ**

Sweet Stuff

ಮಾರ್ಚ್ 2024ರ ಸಂಚಿಕೆಯ 40ನೇ ಪುಟದಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟವಾಗಿದ್ದ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ, ನಮ್ಮ ಓದುಗರಾದ **ತೇಜಶ್ ಪಟೇಲ್** ಅವರು ನೀಡಿರುವ ಉತ್ತರ ಇಲ್ಲಿದೆ. ಪ್ರಶ್ನೆಗಾಗಿ ಈ ಲಿಂಕ್ ಅನ್ನು ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ: https://publications.azimpremjiuniversity.edu.in/5562/1/07_Division%20with%20Multi-Digit-Divisors.pdf



ಹೌದು. ಅರ್ಜುನನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಲಾಬ್ ಜಾಮೂನಿನ ಮತ್ತು ಬಟ್ಟಲಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

r ಗುಲಾಬ್ ಜಾಮೂನಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು R ಬಟ್ಟಲಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಆಗಿರಲಿ. ಸ್ಪ್ರಾನ ತ್ರಿಜ್ಯ 1 ಏಕಮಾನ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ΔABC ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದ್ದು, ಇದರ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು O ಎಂದು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $OB = 1 + r = \dfrac{r}{cos30°} \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + 3$ –

ಈಗ, $R = 2r + 1 = 2(2\sqrt{3} + 3) + 1 = 4\sqrt{3} + 7$.

∴ ಗುಲಾಬ್ ಜಾಮೂನಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ $r = 2\sqrt{3} + 3$ ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಬಟ್ಟಲಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ, $R = 4\sqrt{3} + 7$ ಆಗಿದೆ.

ತೇಜಶ್ ಅವರು ಚನಸ್ಮ ಶಾಲೆ, ನಂ.2 ಗುಜರಾತ್, ಇಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಕರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಡೆಕಾರ್ಟೆ ವೃತ್ತ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅವರು ಮತ್ತೊಂದು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಡೆಕಾರ್ಟೆ ವೃತ್ತ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕಾಗಿ ಇಲ್ಲಿ ನೋಡಿ: https://en.wikipedia.org/wiki/Descartes%27_theorem#:~:text=In%20geometry%2C%20Descartes%E2%80%99%20theorem%20states,satisfy%20a%20certain%20quadratic%20equation ನಲ್ಲಿ ಲಭ್ಯವಿದೆ. ಈ ವಿಷಯಗಳ ಪರಿಚಯವಿರುವ ಓದುಗರು, ಮೇಲೆ ಹೇಳಲಾದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬಳಸಿ ಉತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಅನುವಾದ: **ಸಿತಾರ ಎಚ್. ಎಂ.** | ಪರಿಶಿಲನೆ: **ಮಧುಕರ ಎಸ್. ಪುಟ್ಟಿ**