ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೊಂದಿಗಿನ ಮೋಜು

ತೇಜಸ್ ಶ್ರೀರಾಮ್

NRICH ಎನ್ನುವ Online ಗಣಿತ ಸಂಪನ್ಮೂಲ ತಾಣದಲ್ಲಿ ಒಡ್ಡಲಾಗಿದ್ದ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯಿಂದ ಈ ಲೇಖನ ಸ್ಫೂರ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ. 'ವಿಚಾರ್ ವಾಟಿಕಾ'ದ ಅಡಿಯಲ್ಲಿ ನಡೆದಿದ್ದ 'ಗಣಿತ್ ಮಂಥನ್' ಎನ್ನುವ ಕೋರ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಿದ್ದಾಗ, ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆ ನನ್ನನ್ನು ಸೆಳೆಯಿತು. ಈ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ಆ ಮೂಲ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು (ಅಥವಾ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು) ಪರಿಹರಿಸುವುದರ ಜೊತೆಗೆ, ಇದರ ಒಂದು ಸಹಜ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನೂ ಸಹ ಅನ್ವೇಷಿಸಿದ್ದೇನೆ. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದಷ್ಟು ವಿನ್ಯಾಸಗಳು ಕಂಡಿದ್ದು ಅವುಗಳನ್ನೂ ಸಹ ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇನೆ.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸರಳ ನಿಯಮಗಳ ಮುಖೇನ 'ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು' ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ:

- **ನಿಯಮ 1:** $\frac{1}{2}$ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ.
- **ನಿಯಮ 2:** $\frac{p}{q}$ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, $\frac{p}{p+q}$ ಸಹ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗುತ್ತದೆ.
- **ನಿಯಮ 3:** $\frac{p}{q}$ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, $\frac{p}{p+q}$ ಸಹ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದರರ್ಥ, ನಾವು $\frac{1}{2}$ ಇಂದ ಆರಂಭಿಸಿ, 2ನೇ ಮತ್ತು 3ನೇ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿತವಾಗಿ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತಾ, ಉಳಿದೆಲ್ಲಾ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ನಮ್ಮ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ, ನಿಯಮ 2 ಮತ್ತು 3ರ ಅನ್ವಯಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ದೃಶ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬಿಂಬಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ನಿಯಮ 2ರ ಬಳಕೆಯನ್ನು ಕೆಂಪು ಗೆರೆಯಿಂದಲೂ, ನಿಯಮ 3ರದ್ದು ನೀಲಿ ಗೆರೆಯಿಂದಲೂ ಗುರುತಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಈಗ $\frac{p}{q}$ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸಿ. ನಿಯಮ 2 ಮತ್ತು 3ನ್ನು $\frac{p}{q}$ ಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ:

$$\begin{tikzcd}
 & \frac{p}{q} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\frac{p}{p+q} & & \frac{q}{p+q}
\end{tikzcd}$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನಿಯಮ 2 ಮತ್ತು 3ನ್ನು $\frac{1}{2}$ ಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವುದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು:

$$\begin{tikzcd}
 & \frac{1}{2} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3}
\end{tikzcd}$$

ಅಕಸ್ಮಾತ್ ಈ ಕವಲುಗಳನ್ನು ಇನ್ನೂ ಒಂದು ಹಂತಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರೆಸಿದರೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \frac{1}{2} \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & \frac{1}{3} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \frac{2}{3} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\frac{1}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5}
\end{tikzcd}$$

ಪ್ರಮುಖ ಪದಗಳು: ಭಿನ್ನರಾಶಿ, ಸಮಸ್ಯಾ ಪರಿಹಾರ, ಸಮಸ್ಯೆ ಒಡ್ಡುವಿಕೆ, ಫಿಬೋನಾಚ್ಚಿ, ವಿನ್ಯಾಸಗಳು.

ಪ್ರತೀ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು ಕವಲೊಡೆದು ಎರಡು ಹೊಸ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು ಸೃಷ್ಟಿಯಾಗುವುದನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು.

ಚಟುವಟಿಕೆ: ***ಮೇಲಿನ ಕವಲುಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಹಂತದವರೆಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಅವಲೋಕನಗಳೇನು?***

ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಉದ್ಭವಿಸುವ ಕೆಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಈಗ ಅನ್ವೇಷಿಸೋಣ. ಇವುಗಳನ್ನು NRICH Webiste ನಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಲಾಗಿದೆ. ಓದುಗರು ಇವುಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ನೋಡುವ ಮುನ್ನ, ಸ್ವತಃ ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವುದು ಉತ್ತಮ.

1. ಅತೀ ದೊಡ್ಡ/ಅತೀ ಚಿಕ್ಕ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಯಾವುದು?
2. ಅತೀ ದೊಡ್ಡ/ಅತೀ ಚಿಕ್ಕ ಅಂಶ ಯಾವುದು? (ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಹಿನ್ನಲೆಯಲ್ಲಿ)
3. ಅಂಶಗಳೆಲ್ಲವೂ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ (ಮುಂದಿನದ್ದಕ್ಕಿಂತ ಹಿಂದಿನದ್ದು ಹೆಚ್ಚು) ಇರುವುದಿಲ್ಲ ಎನ್ನುವುದು ನಿಜವೇ?
4. ಪ್ರತೀ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನ ರಾಶಿಯ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳು 1 ನ್ನು ಹೊರತು ಪಡಿಸಿ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ತೋರುತ್ತದೆ. ಇದು ನಿಜವೇ?
5. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ವರ್ತುಲವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಅಂದರೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸುತ್ತಿದ್ದಂತೆ, ಎಲ್ಲಾದರೂ ನಾವು ಆರಂಭಿಸಿದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನೇ ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ನನ್ನ ಪಯಣವನ್ನು ಈಗ ಓದುಗರ ಮುಂದೆ ತೆರೆದಿಡಲು ಇಚ್ಛಿಸುತ್ತೇನೆ. ಮೊದಲಿಗೆ ಒಂದು ಸಂಕೇತವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಎಲ್ಲಾ ಹಂತದಲ್ಲೂ ಎರಡೇ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿರುವುದರಿಂದ, ಪ್ರತೀ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು:

- ನಿಯಮ 1 ರಿಂದ ಉದ್ಭವಿಸಿದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು A
- ನಿಯಮ 2 ರಿಂದ ಸಿಕ್ಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು B ಹಾಗೂ
- ನಿಯಮ 3 ರಿಂದ ದೊರೆತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು C ಎನ್ನೋಣ.

ಹಾಗಾಗಿ, $\frac{1}{2}$ ಅನ್ನು A ಇಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ, ಉಳಿದ ಯಾವುದೇ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು A ಇಂದ ಶುರು ಮಾಡಿ, B ಮತ್ತು C ಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{3}{7}$ ಎನ್ನುವ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ABCB ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ

$$\underset{A}{\frac{1}{2}} \xrightarrow[B]{} \frac{1}{3} \xrightarrow[C]{} \frac{3}{4} \xrightarrow[B]{} \frac{3}{7}$$

ಪರಿಹಾರಗಳು:

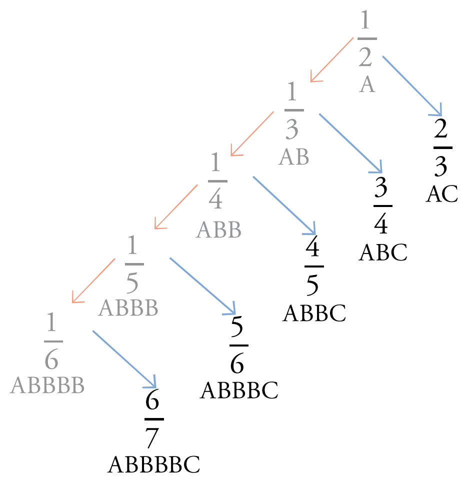
1. $\frac{1}{2}$ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯೂ ಸಹ ಧನಾತ್ಮಕವೇ ಆಗಿರಬೇಕು. ಜೊತೆಗೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದವು ಅಂಶಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಿರುವುದರಿಂದ, ಪ್ರತೀ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು 1ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯೇ ಇರಬೇಕು.

   A, AB, ABB, ABBB, ABBB ಇತ್ಯಾದಿ ಇದೇ ರೀತಿಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಈಗ ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಅಂದರೆ, ನಾವು ನಿಯಮ 2ನ್ನೇ ಪುನರಾವರ್ತಿತವಾಗಿ $\frac{1}{2}$ ರ ಮೇಲೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ ಎಂದರ್ಥ. ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಇದು ಎಡ ತುದಿಯ ಕವಲು:

$$\underset{A}{\frac{1}{2}} \to \underset{AB}{\frac{1}{3}} \to \underset{ABB}{\frac{1}{4}} \to \underset{ABBB}{\frac{1}{5}} \to \underset{ABBBB}{\frac{1}{6}}$$

ಈ ಮೇಲಿನ ಕವಲ ಹಾದಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{1}{n}$ ನ ವಿಲೋಮ ಇರಲೇಬೇಕು. ಈ ಕವಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಚಿಕ್ಕದಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುವುದರಿಂದ, ಇದಕ್ಕೆ ಕೊನೆಯೇ ಇಲ್ಲ. ಅಂದರೆ, ಅತೀ ಚಿಕ್ಕ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಈಗ A, AC, ABC, ABBC, ABBBC, ABBBBC ಇತ್ಯಾದಿ ಇದೇ ರೀತಿಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಅಂದರೆ, ನಿಯಮ 2ನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿತವಾಗಿ $\frac{1}{2}$ ರ ಮೇಲೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತಾ, ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಒಮ್ಮೆ ನಿಯಮ 3ನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದು. ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ, ಇದು ಎಡ ತುದಿಯ ಪಕ್ಕದ ಹಾದಿ.



ಪ್ರತೀ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ $n > 1$ ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $\frac{n}{n+1}$ ಎನ್ನುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಈ ಕವಲ ಹಾದಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಇದು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದ್ದು, ಇದೂ ಸಹ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ, ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯೂ ಸಹ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

2. ಅತೀ ಚಿಕ್ಕ ಅಂಶವೆಂದರೆ 1. ಇದು $\frac{1}{2}$ ರ ಅಂಶವಾಗಿದೆ. ಅಂತೆಯೇ, ಮೇಲೆ ಗಮನಿಸಿದಂತೆ, ಪ್ರತೀ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ $\frac{n}{n+1}$ ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ, ಎನ್ನುವ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನ ರಾಶಿ ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ಅಂಶವೂ ಸಹ ಇರಲಿಕ್ಕೆ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

3. ಹಾಂ! ನಿಯಮ 2ರ ಅನ್ವಯ, ಅಂಶ ಇದ್ದ ಹಾಗೆ ಇರುತ್ತದೆ. ನಿಯಮ 3 ಅಂಶವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಅಂಶಗಳು ಕಡಿಮೆಯಾಗುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯೇ ಇಲ್ಲ. ಆದರೆ, ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಹಂತದಲ್ಲಿ, ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳಿಗೆ 1 ನ್ನು ಹೊರತು ಪಡಿಸಿ ಬೇರೆಯೊಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಿದ್ದು, ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪಕ್ಕೆ ಇಳಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇದ್ದರೆ? ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂದು ಮುಂದಿನ ಪರಿಹಾರದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

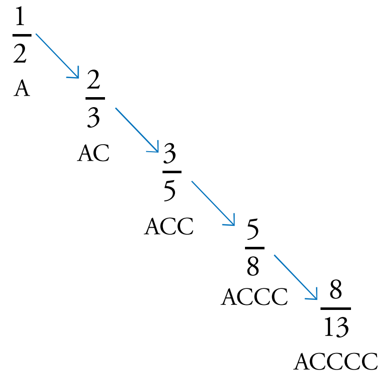
4. $\frac{p}{q}$ ಒಂದು ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿರಲಿ. ನಿಯಮ 2 ಅಥವಾ ನಿಯಮ 3ನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ, ಅನುಗುಣವಾಗಿ $\frac{p}{p+q}$ ಅಥವಾ $\frac{q}{p+q}$ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಈಗ ಈ ಮೂರು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡೋಣ.

   ಅಕಸ್ಮಾತ್ d ಎನ್ನುವುದು p ಮತ್ತು q ಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದ್ದರೆ, $p + q$ ವನ್ನು d ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲೇ ಬೇಕು. ಅದೇ ರೀತಿ, d ಏನಾದರೂ, p ಮತ್ತು $p + q$ ಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, $q = (p + q) - p$ ಸಹ d ಇಂದ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗಲೇಬೇಕು. ಅಂದರೆ p ಮತ್ತು q ಹಾಗೂ p ಮತ್ತು $p + q$ ಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಒಂದೇ ಆಗಿರಬೇಕು.

   ನಮ್ಮ ಪಟ್ಟಿಯ ಮೊದಲನೇ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾದ $\frac{1}{2}$ನಲ್ಲಿ, ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಒಂದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವೆಂದರೆ 1. ಹಾಗಾಗಿ, ಉಳಿದೆಲ್ಲಾ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ, ಕೇವಲ 1 ಅಷ್ಟೇ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ.

5. ಎರಡೂ ನಿಯಮಗಳು, ನಿಯಮ 2 ಮತ್ತು ನಿಯಮ 3, ಛೇದವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ವರ್ತುಲವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಲು ಇರುವ ಒಂದೇ ದಾರಿಯೆಂದರೆ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ರದ್ದುಗೊಳಿಸುವುದು (cancelling). ಇದು ಅಸಾಧ್ಯವೆಂದು, ಪರಿಹಾರ 4 ರಿಂದ ನಮಗೆ ತಿಳಿದುಬಂದಿದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ವರ್ತುಲವು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಇದರೊಟ್ಟಿಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಆಸಕ್ತಿಕರ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ನಾನು ಗಮನಿಸಿದೆ. ಬಲ ತುದಿಯ ಕವಲ ಹಾದಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ, ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು ಹೀಗಿರುತ್ತವೆ: A, AC, ACC, ACCC, ACCCC ಇತ್ಯಾದಿ.



ಈ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಆವರ್ತಕವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ರಚಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದೆನ್ನುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇದು ನಮಗೆ ಫಿಬೋನಾಚ್ಚಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೆನಪಿಸಬಹುದು. ಅಕಸ್ಮಾತ್

$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 2$$

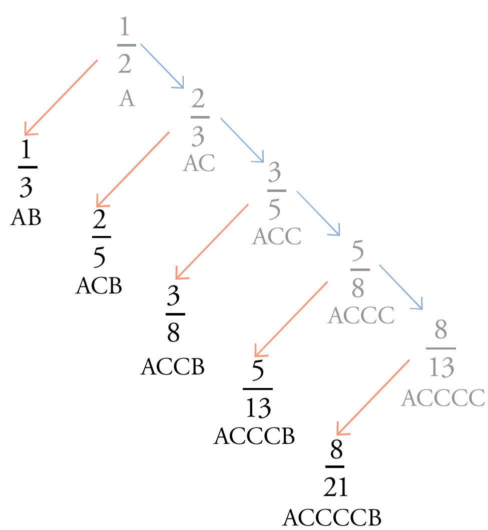
ಹಾಗೂ 2ಕ್ಕಿಂತ ಮುಂದಿನ ಪ್ರತೀ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ m ಗೆ

$$F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$$

ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿಯೇ, ACCC... ತರಹದ ಯಾವುದೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು $\frac{F_{m+1}}{F_{m+2}}$ ಗೆ ಸಮವಾಗಿರಲೇಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ m ಎನ್ನುವುದು ಒಟ್ಟು C ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ, ಈಗಾಗಲೇ ನಾವು ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅಕ್ಕ ಪಕ್ಕದ ಫಿಬೋನಾಚ್ಚಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ 1 ನ್ನು ಹೊರತು ಪಡಿಸಿ ಇನ್ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ನಾನು ಮತ್ತೊಂದು ಅಂಶವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದೆ. ನಾವೇನಾದರೂ ಛೇದ F_{m+2} ಅನ್ನು ಅಂಶ F_{m+1} ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ನಮಗೆ ದೊರೆಯುವ ಶೇಷ ಎಂದಿಗೂ F_m ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ಇಷ್ಟೇ: $F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$. ಇದರೊಟ್ಟಿಗೆ ನನಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ಕುತೂಹಲಕಾರಿ ಅಂಶವೂ ಕಂಡಿತು. ACCC...CCCBBB...BBB ರೀತಿಯ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಿಗೂ ಸಹ ಈ ಶೇಷದ ವಿಚಾರವು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ, ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ C ಯು m ಬಾರಿ ಹಾಗೂ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ B ಯು 'k' ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತಿತವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸಿ.

ಒಂದು ನಿದರ್ಶನಕ್ಕಾಗಿ, AB, ACB, ACCB, ACCCB ಇತ್ಯಾದಿ ಇದೇ ರೀತಿಯ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.



ಇದು ಹೀಗೇಕೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. $\frac{p}{q}$ ಎನ್ನುವುದು ACCC…CCCBBB…BBB ರೂಪದ ಒಂದು ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ C ಯು ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ 'm' ಬಾರಿಯೂ ಹಾಗೂ B ಯು ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 'k' ಬಾರಿಯೂ ಪುನರಾವರ್ತಿತವಾಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ $\frac{p}{q}$ ವನ್ನು ಬರೆಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಮೊದಲಿಗೆ $\frac{1}{2}$ ವಿನ ಮೇಲೆ ನಿಯಮ 3ನ್ನು 'm' ಬಾರಿಯೂ, ನಂತರ ನಿಯಮ 2 ನ್ನು 'k' ಬಾರಿಯೂ ಅನ್ವಯಿಸಬೇಕು. ಹಾಗಾಗಿ, $\frac{F_{m+1}}{F_{m+2}}$ ವಿನ ಮೇಲೆ ನಿಯಮ 2ನ್ನು 'k' ಬಾರಿ ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ $\frac{p}{q}$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ

$$\frac{p}{q} = \frac{F_{m+1}}{F_{m+2} + k(F_{m+1})}.$$

ಈಗ ನಾವೇನಾದರೂ ಛೇದ q ವನ್ನು ಅಂಶ p ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ನಮಗೆ ದೊರೆಯುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ $k + 1$ ಹಾಗೂ ಶೇಷ F_m ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ್ದು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯ:

ಪ್ರಮೇಯ: $\frac{1}{2}$ ನ ಮೇಲೆ ಮೊದಲಿಗೆ m ಬಾರಿ ನಿಯಮ 3ನ್ನೂ ನಂತರ k ಬಾರಿ ನಿಯಮ 2ನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ $\frac{p}{q}$ ಎನ್ನುವ ಮೋಜಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದೇವೆಯೆಂದೂ ಭಾವಿಸಿ. ಈಗೇನಾದರೂ, q ವನ್ನು p ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ನಮಗೆ ಸಿಗುವ ಶೇಷ F_m ಇಲ್ಲಿ

$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 2 \text{ ಹಾಗೂ}$$
$$F_{m+2} = F_m + F_{m+1}$$

ಸಂಪಾದಕರ ಟಿಪ್ಪಣಿ:

ಈ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಇದೇ ಸ್ವರೂಪದ ಇನ್ನೂ ಹಲವು ಭಿನ್ನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಟ್ಟುಹಾಕುವುದಲ್ಲದೆ, ಕೆಲವು ಆಸಕ್ತಿಕರ ಹೊಸ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನೂ ಸಹ ಒಡ್ಡುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನಾವು $\frac{1}{2}$ ಬದಲು ಬೇರೆಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯೊಂದಿಗೆ ಆರಂಭಿಸಿದ್ದರೆ? ಇಲ್ಲಿ ಉದ್ಭವಿಸಿದ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತೀ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯೂ (ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿ) ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆಯೇ? ಈ ಹೊಸ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು 9 ರಿಂದ 16ರ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ, ಅವರು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೂಲಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ನಡೆಸುವ, ವಿನ್ಯಾಸಗಳ ಪತ್ತೆ ಹಚ್ಚುವಿಕೆಯ, ಅಂತೆಯೇ ತಮ್ಮ ಹೊಳಹುಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಲು ಅವಕಾಶ ನೀಡಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ. At The Right Angles ನ 2021ರ ಜುಲೈ ಅವತರಣಿಕೆಯಲ್ಲಿ, ಶಿವರಾಮನ್ (2021) ಅವರು ಇದೇ ಸ್ವರೂಪದ ಒಂದು ಭಿನ್ನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಓದುಗರು ಆ ಲೇಖನವನ್ನು ಓದುವುದೂ ಉತ್ತಮ.

ಪರಾಮರ್ಶನ

1. Sivaraman, R. (2021, July). Tremendous tree. At Right Angles, (10), 17-22.http://publications.azimpremjifoundation.org/2786/1/02_Sivaraman_TremendousTree.pdf

11 ವರ್ಷದ **ತೇಜಸ್ ಶ್ರೀರಾಮ್**, ಗಣಿತ, ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ ಹಾಗೂ ಸಾಹಿತ್ಯದಲ್ಲಿ ಅಪಾರ ಒಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು ಬೆಂಗಳೂರಿನ ಇಂದಿರಾನಗರದಲ್ಲಿರುವ ನ್ಯಾಷನಲ್ ಪಬ್ಲಿಕ್ ಶಾಲೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ. ಇವರು World Science Festival ನಡೆಸುವ Junior World Science Scholarship program, ಅಂತೆಯೇ Raising a Mathematician Foundation ನಡೆಸುವ Epsilon India ದಂತಹ ಹಲವಾರು ಪ್ರತಿಷ್ಠಿತ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳ ಭಾಗವೂ ಆಗಿದ್ದಾರೆ. ಇವರ ಇ-ಮೈಲ್ ವಿಳಾಸ: tejas.sriram1201@gmail.com.

ಅನುವಾದ: **ಯತಿರಾಜ್ ಶರ್ಮ** | ಪರಿಶೀಲನೆ: **ಎಸ್. ಎನ್. ಗಣನಾಥ್**