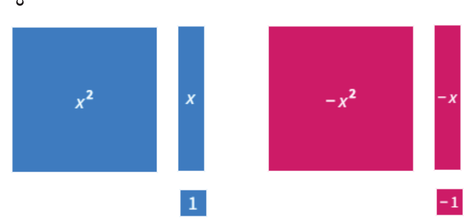
ಪರಾಮರ್ಶೆ: ಬೀಜಗಣಿತದ ಟೈಲ್ಸ್

ಮ್ಯಾಥ್ ಸ್ಪೇಸ್

2024ರ ಮಾರ್ಚ್ ಸಂಚಿಕೆಯಲ್ಲಿ ದಶಮಾನದ 2D ಬ್ಲಾಕ್ ಗಳನ್ನು ವಿಮರ್ಶಿಸಲಾಗಿತ್ತು [5]. ಈ ಬ್ಲಾಕ್ ಗಳು FLU (Flat Long Units) ಎಂದೇ ಚಿರಪರಿಚಿತ. ಇವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣ ಬೀಜಗಣಿತದ ಫಲಕಗಳು. ಸರಳವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ದಶಮಾನದ 10 ಇಲ್ಲಿ "x" ಆಗಿ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣಗೊಂಡು, ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮೂರು ಮೂಲಭೂತ ಫಲಕಗಳು ರಚಿತವಾಗುತ್ತವೆ (ಸೂಚಿತ ಅಳತೆ: x → 2 ಇಂಚು ಮತ್ತು 1 → 2 cm.)

- ದೊಡ್ಡ ಚೌಕ ಅಂದರೆ Flat ಅಥವಾ 100ರ ಬದಲಿಗೆ x^2 ಫಲಕ ($x \times x$ ಅಥವಾ 2 ಇಂಚು × 2 ಇಂಚು)
- ಆಯತಾಕಾರ ಅಂದರೆ Long ಅಥವಾ 10ರ ಬದಲಿಗೆ x ಫಲಕ ($x \times 1$ ಅಥವಾ 2 ಇಂಚು × 2 ಸೆಂ.ಮೀ)
- ಚಿಕ್ಕ ಚೌಕ ಅಂದರೆ Unit ಅಥವಾ 1 ಇಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ 1 ಆಗಿಯೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ (1 × 1 ಅಥವಾ 1 ಸೆಂ.ಮೀ × 1 ಸೆಂ.ಮೀ)

ಆದರೆ ಇವೆರಡರ ನಡುವೆ ಒಂದು ನಿರ್ಣಾಯಕ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದೆ: ಚಿತ್ರ 1ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಬೀಜಗಣಿತದ ಫಲಕಗಳು ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಣ್ಣಗಳಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಬಣ್ಣ ಧನಾತ್ಮಕ ರೂಪಗಳನ್ನು ಅಂದರೆ x2, x, 1 ಇವುಗಳನ್ನು ಬಿಂಬಿಸಿದರೆ ಮತ್ತೊಂದು $-x^2$, $-x$, -1 ಎನ್ನುವ ಋಣಾತ್ಮಕ ರೂಪಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಸಾಕಷ್ಟು ವರ್ಚ್ಯುಯಲ್ ಅಥವಾ ಆನ್‌ಲೈನ್ ಮಾದರಿಗಳಲ್ಲಿ ಧನಾತ್ಮಕ ಫಲಕಗಳಿಗೆ ಅವುಗಳ ಗಾತ್ರದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ವಿಭಿನ್ನ ಬಣ್ಣಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಋಣಾತ್ಮಕ ಫಲಕಗಳಿಗೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ಬಣ್ಣವನ್ನು ನೀಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ನೋಡುವುದಾದರೆ, ಋಣಾತ್ಮಕ ಫಲಕಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ಬಣ್ಣವಾದ ಮೇಲೆ, ಧನಾತ್ಮಕಗಳಿಗೂ ಅದೇ ಅನ್ವಯಿಸಬೇಕಲ್ಲವೇ? Mathigon Polypad ನಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ ಒಂದು ಪ್ರಕಾರಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಬಣ್ಣವನ್ನು ನೀಡಲು ಅವಕಾಶವಿದೆ (ಚಿತ್ರ 1). ಇದಕ್ಕೊಂದು ಪರ್ಯಾಯವೆಂದರೆ ಎರಡು ಬದಿಯ ಫಲಕಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬದಿ ಧನವನ್ನೂ ಮತ್ತೊಂದು ಋಣವನ್ನೂ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಎರಡು ಬದಿಯ ಫಲಕಗಳಿಗೆ ಸಾಕಷ್ಟು ಅನುಕೂಲಗಳಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ:



ಚಿತ್ರ 1

1. ಒಳ-ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈಗಳು ಭಿನ್ನವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಾಕ್ಸಿನಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು.

ಮುಖ್ಯ ಪದಗಳು: TLM, ರೂಪರಚನೆ, ಬೀಜಗಣಿತದ ಟೈಲ್ಸ್, ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಕ್ರಿಯೆಗಳು,

2. ಋಣ ಹಾಗೂ ಧನಗಳಿಗೆ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಎರಡು ಫಲಕಗಳ ಬದಲಾಗಿ ಒಂದೇ ಫಲಕದಲ್ಲಿ ಎರಡನ್ನೂ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

3. ಬೋಧನಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಒಂದು ಫಲಕವನ್ನು ಮಗುಚುವುದರಿಂದ ಧನ ಋಣವಾಗಿಯೂ ಅಥವಾ ಋಣ ಧನವಾಗಿಯೂ ಚಿಹ್ನೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಮಗುಚುವುದು ಚಿಹ್ನೆ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಸಮಾನ. ಇದು ಕಳೆಯುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗೆ ಬಹಳ ಅನುಕೂಲವಾಗುತ್ತದೆ.

ಬೀಜಗಣಿತದ ಫಲಕಗಳಲ್ಲಿ ಋಣಾತ್ಮಕ ಫಲಕಗಳೂ ಇರುವುದರಿಂದ, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬಗೆಗಿನ ಅರಿವು ಅತೀ ಮುಖ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ [6]. ಅದರಲ್ಲೂ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನವು:

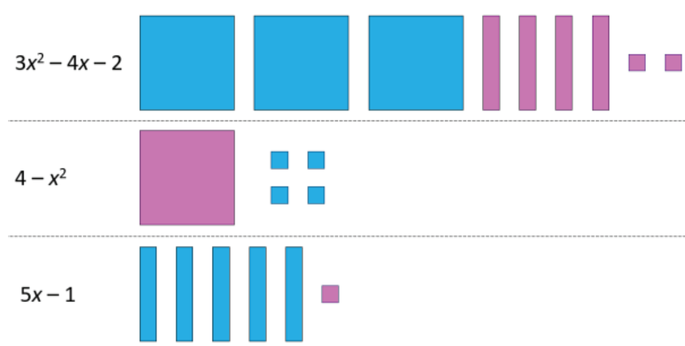
A. ಶೂನ್ಯ ಸಮಾನ ಜೊತೆಗಳು: 1 ಮತ್ತು -1, x ಮತ್ತು $-x$, x^2 ಮತ್ತು $-x^2$ ಈ ಮೂರು ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಸಂದರ್ಭಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಬಹುದು ಅಥವಾ ತೆಗೆಯಬಹುದು. ಇದರಿಂದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

B. ಒಂದು ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಕಳೆಯುವುದು ಅದರ ವಿಲೋಮವನ್ನ ಕೂಡುವುದಕ್ಕೆ ಸಮಾನ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 13, -7, $5x$ ಮತ್ತು $-2x^2$ ಇವುಗಳನ್ನು ಕಳೆಯುವುದು -13, 7, $-5x$, $2x^2$ ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದಕ್ಕೆ ಸಮಾನ.

C. ಧನ × ಋಣ ಮತ್ತು ಋಣ × ಧನ ಎರಡೂ ಸಹ ಋಣವೇ.

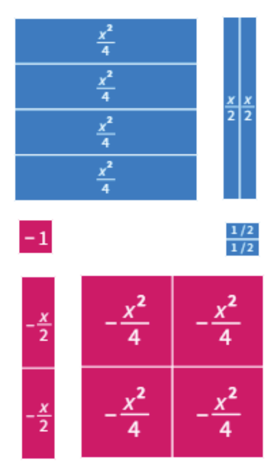
D. ಋಣ × ಋಣ = ಧನ.

ಮೂರು ವಿವಿಧ ಗಾತ್ರದ ಈ ಆರು ಫಲಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ (ಪ್ರತೀ ಬಣ್ಣಕ್ಕೂ ತಲಾ ಮೂರು) (i) ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ (ii) ಏಕ ಚರಾಕ್ಷರ (iii) ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಈ ರೀತಿಯ ಫಲಕಗಳು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಅನುಮತಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಚಿತ್ರ (2) ರಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿ ಫಲಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದಾದ ಹಲವು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ನೀಲಿ ಬಣ್ಣವು ಧನವನ್ನೂ, ಗುಲಾಬಿ ಬಣ್ಣವು ಋಣವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ $4 - x^2$ ವಾಸ್ತವವಾಗಿ $4 + (-x^2)$ ಗೆ ಸಮ. ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $5x - 1$ ಎನ್ನುವುದು $5x + (-1)$ಗೆ. ಹೀಗಾಗಿಯೇ ನಮಗೆ ಋಣಾತ್ಮಕ ಫಲಕಗಳ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇರುವುದು.



ಚಿತ್ರ 2

Mathigon Polypad ನಲ್ಲಿ ಫಲಕಗಳನ್ನು ಅರ್ಧಿಸಲು ಅವಕಾಶವಿದ್ದು ಇದರಿಂದ x/4, x2/8, 1/8 ಇತ್ಯಾದಿ ಫಲಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಅಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಅರ್ಧಿಸುವುದಕ್ಕಷ್ಟೆ (ಉದ್ದ ಅಥವಾ ಲಂಬವಾಗಿ) ಅವಕಾಶವಿರುವುದು. ಹಾಗಾಗಿ ನಾವು *x/3, x2/5, 1/6* ಇವುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ (ಚಿತ್ರ 3).



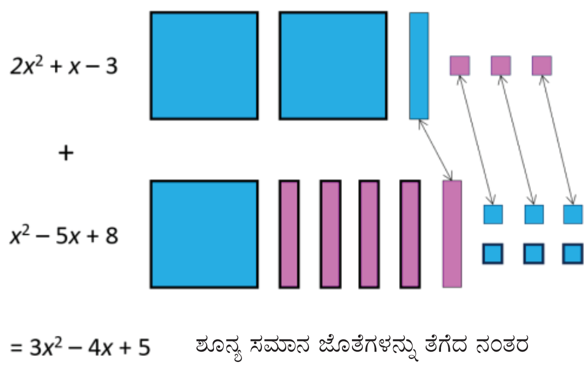
ಚಿತ್ರ 3

FLU ಮತ್ತು ಬೀಜಗಣಿತದ ಫಲಕಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಮತ್ತೊಂದು ನಿರ್ಣಾಯಕ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೆಂದರೆ ಗುಂಪು ವಿನಿಮಯ ಇಲ್ಲದಿರುವುದು. FLU ಗಳಲ್ಲಿ 10 Unit ಗಳು ಒಂದು Longಗೆ ಹಾಗೆಯೇ 10 Longಗಳು ಒಂದು Flatಗೆ ಸಮ ಎನ್ನುವುದು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸತ್ಯ. ಆದರೆ ಬೀಜಗಣಿತದ ಫಲಕಗಳಲ್ಲಿ x ನ ಬೆಲೆ ತಿಳಿಯದೇ ಇರುವುದರಿಂದ ಅಥವಾ ಅದು ಸಾಕಷ್ಟು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಬಹುದಾದ್ದರಿಂದ x ಸಿಗಬೇಕಾದರೆ ಎಷ್ಟು 1ನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು ಎನ್ನುವುದೇ ನಮಗೆ ತಿಳಿಯದು. ಹಾಗಾಗಿ ಬೀಜಗಣಿತದ ಫಲಕಗಳಲ್ಲಿ ಆ ರೀತಿಯ ಫಲಕ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಅವಕಾಶವಿಲ್ಲ. ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪದಗಳನ್ನ ಹೇಗೆ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಸೇರಿಸಿ ಒಂದು ಪದವಾಗಿ ಮಾರ್ಪಾಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೋ ಹಾಗೆಯೇ ಇದೂ (ಗುಂಪಿನ ಅಸಾಧ್ಯತೆ) ಸಹ. ಹಾಗೆ ನೋಡುವುದಾದರೆ $3x^2 - 2x - 5$ ರೀತಿಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನ ಇನ್ನೂ ಸರಳೀಕರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎನ್ನುವ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಈ ಬೀಜಗಣಿತದ ಫಲಕಗಳೂ ಸಹ ದೃಢೀಕರಿಸುತ್ತವೆ.

ಈ ಬೀಜಗಣಿತದ ಫಲಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಆರಂಭಿಸಿದಂತೆ, ಕೆಲವೊಂದು ವಿಚಾರಗಳು ತನ್ನಷ್ಟಕ್ಕೆ ತಾನೇ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತವೆ:

- x^2 ಅನ್ನು x ರ ವರ್ಗವೆಂದೇಕೆ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ? ಇದಕ್ಕೂ ಚೌಕಾಕಾರಕ್ಕೂ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು?
- x^2 (ಅಂದರೆ $x \times x$) ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಚೌಕಾಕಾರದ ಫಲಕಕ್ಕೂ ಅಂತೆಯೇ $2x$ (ಅಂದರೆ $x + x$) ಎನ್ನುವ ಎರಡು ಆಯತಾಕಾರದ ಫಲಕಗಳಿಗೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸ.
- ಸಜಾತಿ ಪದಗಳ ಪರಿಕಲ್ಪನೆ: ಒಂದೇ ತರಹದ ಫಲಕಗಳನ್ನ ಕೂಡಿ ಎಣಿಸಬಹುದು, ಶೂನ್ಯ ಸಮಾನ ಜೊತೆಗಳನ್ನ ಒಟ್ಟಿಗೆ ತೆಗೆಯಬಹುದು, ಆದರೆ ಎರಡು ಭಿನ್ನ ಜಾತಿಯ ಫಲಕಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಒಂದೇ ಪದವನ್ನ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

x ಹಾಗೂ 1ರ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವು ಅವ್ಯಕ್ತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಎರಡು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನ ಹೋಲಿಸಲು ಯಾವ ವಿಧಾನವೂ ಇಲ್ಲ. ಆದರೆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನಕ್ಕೇನು ತೊಂದರೆ ಇಲ್ಲ. ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನ ಫಲಕಗಳ ಮುಖೇನ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಸಾಕು.



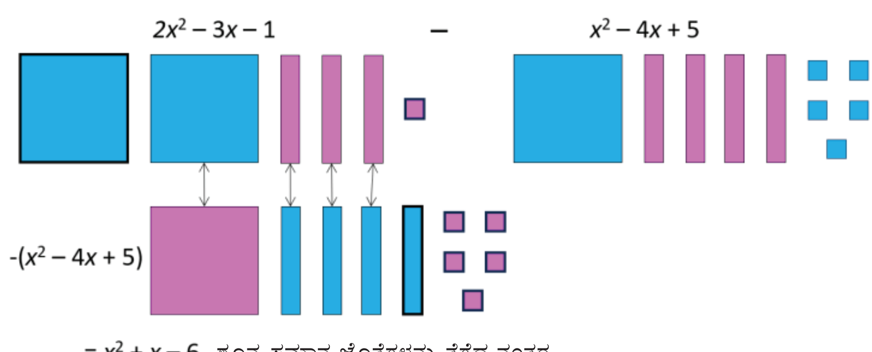
ಚಿತ್ರ 4

FLUಗಳನ್ನ ಬಳಸಿ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನ ಕೂಡುವಾಗ ಅನುಸರಿಸಿದ ನಿಯಮಗಳೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಸಂಕಲನಕ್ಕೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ:

1. ಮೊದಲಿಗೆ ಫಲಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿ..
2. ಒಂದೇ ಗಾತ್ರದ ಫಲಕಗಳನ್ನ ಸೇರಿಸಿ. ಶೂನ್ಯ ಸಮಾನ ಜೊತೆಗಳನ್ನ ಹೊರತೆಗೆಯಿರಿ.
3. ಉಳಿದ ಫಲಕಗಳು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ.

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ವ್ಯವಕಲನಕ್ಕೆ (ಉದಾಹರಣೆಗೆ $p(x) - q(x)$ ಅನುಸರಿಸಬೇಕಾದ ಹಂತಗಳು:

1. ಮೊದಲಿಗೆ p(x) ಮತ್ತು $q(x)$ ಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. .
2. $-q(x)$ ಪಡೆಯಲು $q(x)$ನ ಫಲಕಗಳನ್ನು ಮಗುಚಿ.
3. $p(x)$ ಮತ್ತು $- q(x)$ಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ. ಅಂದರೆ ಒಂದೇ ಗಾತ್ರದ ಫಲಕಗಳನ್ನ ಸೇರಿಸಿ. ಶೂನ್ಯ ಸಮಾನ ಜೊತೆಗಳನ್ನ ತೆಗೆದು ಹಾಕಿ.
4. ಉಳಿದ ಫಲಕಗಳು $p(x) - q(x)$ ಅನ್ನು [ಅಂದರೆ $p(x) + [(- q(x)]$ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ.

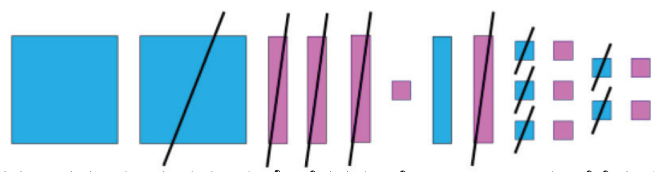


ಚಿತ್ರ 5

$p(x) - q(x)$ ಅನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇದು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯವಕಲನಕ್ಕೆ ಕೊಂಚ ಹತ್ತಿರವೆನಿಸುತ್ತದೆ:

1. ಮೊದಲಿಗೆ $p(x)$ ರಚಿಸಿ
2. $q(x)$ ಅನ್ನು ಮನದಲ್ಲಿರಿಸಿ.
3. $p(x)$ ಗೆ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿದ್ದಷ್ಟು ಶೂನ್ಯ ಸಮಾನ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ $q(x)$ ಅನ್ನು (ಅಂದರೆ x^2, $4x$, -5) ತೆಗೆಯುವಷ್ಟಾದರೂ ಇರುವಂತೆ ಶೂನ್ಯ ಸಮಾನ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ.
4. $p(x)$ ಇಂದ $q(x)$ ಅನ್ನು ಕಳೆಯಿರಿ ಅಂದರೆ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ಫಲಕಗಳನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯಿರಿ. ನಮಗೆ ಉಳಿಯುವುದೇ $p(x)-q(x)$

ಚಿತ್ರ 4 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನೂ ಹಾಗೆಯೇ ಚಿತ್ರ 5 ಮತ್ತು 6 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಬಿಂಬಿಸುತ್ತವೆ.



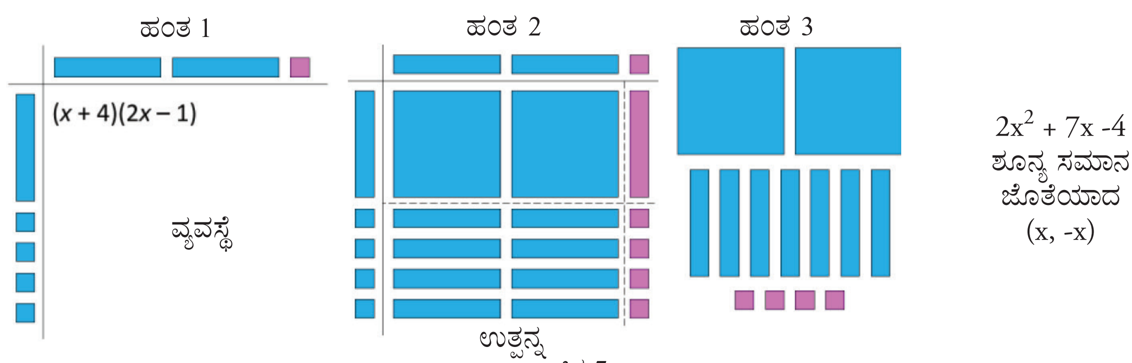
ಅವಶ್ಯಕವಾದಷ್ಟು ಶೂನ್ಯ ಸಮಾನ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ q(x) ಅನ್ನು ತೆಗೆದ ನಂತರ

$$(2x^2 - 3x - 1) - (x^2 - 4x + 5) = x^2 + x - 6$$

ಚಿತ್ರ 6

ಆದರೆ ಈ ಎರಡನೆಯ ವಿಧಾನ ಕೊಂಚ ಗೋಜಲು. ಒಮ್ಮೊಮ್ಮೆ ಇದಕ್ಕೆ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಶೂನ್ಯ

ಸಮಾನ ಜೊತೆಗಳು ಬೇಕಾಗಬಹುದು (1 ಮತ್ತು -1, x ಮತ್ತು $-x$, ಅಂತೆಯೇ x^2 ಮತ್ತು $-x^2$). ಎಲ್ಲದಕ್ಕಿಂತ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ನಿಯಮ Bಯ ಪ್ರಕಾರ ಒಂದು ಪದವನ್ನು ಕಳೆಯುವುದು ಅದರ ವಿಲೋಮವನ್ನ ಕೂಡುವುದಕ್ಕೆ ಸಮವಾದ್ದರಿಂದ ವ್ಯವಕಲನವೂ ಒಂದು ರೀತಿ ಸಂಕಲನವೇ. ಹಾಗಾಗಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ವ್ಯವಕಲನಕ್ಕಾಗಿ ಮಗುಚುವುದೇ ಸರಳವಾದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ.



ಚಿತ್ರ 7

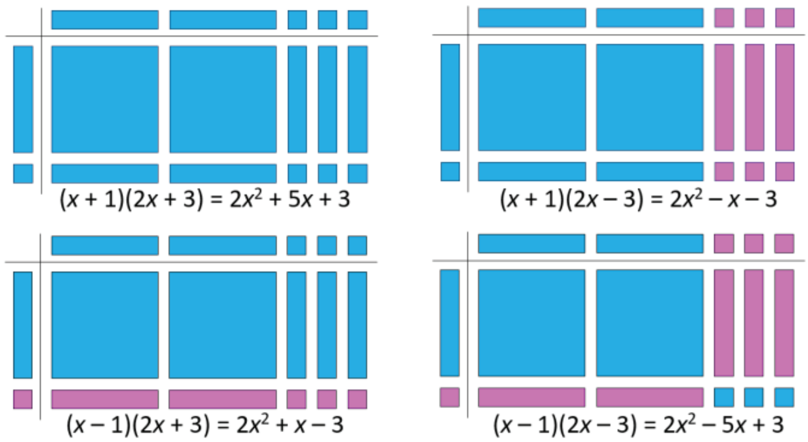
ಇದೇ ರೀತಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ–ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನೂ ಸಹ 2 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಘಾತದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತಗೊಳಿಸುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು 2–ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಯಲ್ಲೇ ಎರಡು ರೇಖೀಯ (ಘಾತ 1ರ) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ ಫಲಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಚಿತ್ರ 7ರ 2ನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗಿರುವ ದೊಡ್ಡ ಹಾಗೂ ಸಣ್ಣ ಚೌಕಗಳ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳನ್ನೂ ಅಂತೆಯೇ ಅಡ್ಡ ಹಾಗೂ ಲಂಬ ಆಯತಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಗುಣಾಕಾರದ ಹಂತಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ:

1. ಒಂದು ಗುಣಕವನ್ನು ಎಡ ಭಾಗದ ಅಂಚಿನಲ್ಲಿಯೂ, ಮತ್ತೊಂದನ್ನು ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಅಂಚಿನಲ್ಲಿಯೂ (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ) ಫಲಕದೊಂದಿಗೆ ರಚಿಸಿ.
2. ಪ್ರತೀ ಫಲಕದ ಪ್ರತೀ ಅಳತೆಗೂ ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ ಅಂಚುಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ನಡುವಿನ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ.
3. ಶೂನ್ಯ ಸಮಾನ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ (ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯ ಸಮಾನ ಜೊತೆಗಳು ಎಲ್ಲಿ ಉದ್ಭವಿಸಬಹುದು? ಚಿತ್ರ 8 ಗಮನಿಸಿ)

ಚಿಹ್ನೆಯ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಎರಡು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ 8ರಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಎಲ್ಲಾ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲೂ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತಪದದ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಧನವಾಗಿಯೇ ಇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯ ಸಮಾನ ಜೊತೆಗಳು ಬರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಹಾಗೆಯೇ ಈ ನಾಲ್ಕೂ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಬರುವ ಸಮಾನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು

ಗಮನಿಸಿ. ಮಧ್ಯ ಪದದ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಜ್ಞಾನ ಅತ್ಯಾವಶ್ಯಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಅನ್ವೇಷಣೆಯಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತದ ಫಲಕಗಳ ಪಾತ್ರ ಅತ್ಯದ್ಭುತ.



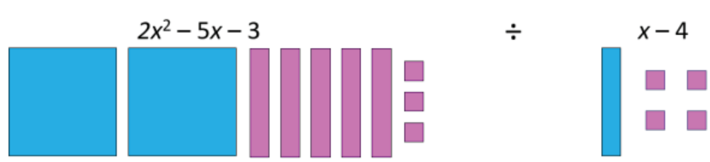
ಚಿತ್ರ 8

FLU ಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಮೂರಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವ ರೀತಿಯಲ್ಲೇ ವರ್ಗ (ಘಾತ 2ರ) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ರೇಖೀಯ (ಘಾತ 1ರ) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 9). ಉಲ್ಲೇಖ [5]ರ ಓದು ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಬಹುದು.

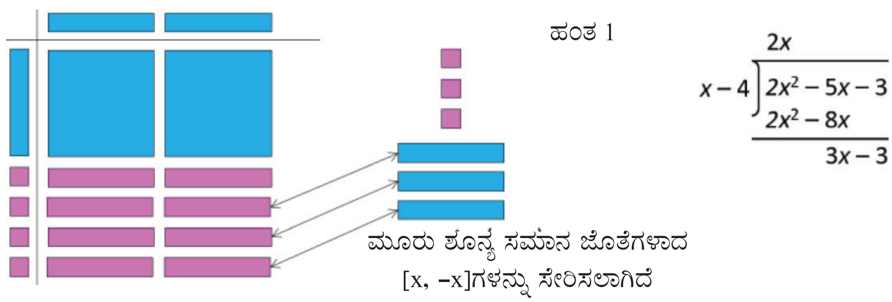
ಭಾಗಾಕಾರದ ಹಂತಗಳು:

ಹಂತ 1: ಚಿತ್ರ 10ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ, ಮೊದಲಿಗೆ x^2 ಫಲಕಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಒಂದು ಭಾಗವಾದ $2x$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ಹಂತವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಚಿತ್ರ 10ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ, ಮೂರು ಶೂನ್ಯ ಸಮಾನ ಜೊತೆಗಳಾದ x ಮತ್ತು $-x$ ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಹಂತದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ $3x - 3$ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 2: ಚಿತ್ರ 11ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ x ಫಲಕಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ಜೋಡಿಸಿ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಉಳಿದ ಭಾಗವಾದ 3ನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು. ಈ ಹಂತವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಒಂಬತ್ತು ಶೂನ್ಯ ಸಮಾನ ಜೊತೆಗಳಾದ 1 ಮತ್ತು –1ನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಉಳಿಯುವ 9 ಶೇಷವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $2x + 3$ ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ.

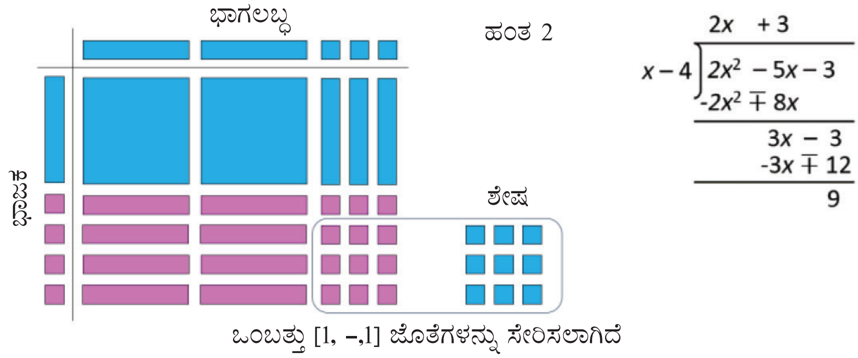


ಚಿತ್ರ 9



ಚಿತ್ರ 10

FLU ಗಳ ಸನ್ನಿವೇಶದಂತೆಯೇ ಇಲ್ಲೂ ಸಹ: ಭಾಜ್ಯ = ಸಾಲುಗಳು (Array) + ಶೇಷ = ಭಾಜಕ x ಭಾಗಲಬ್ಧ + ಶೇಷ (ಚಿತ್ರ 11).



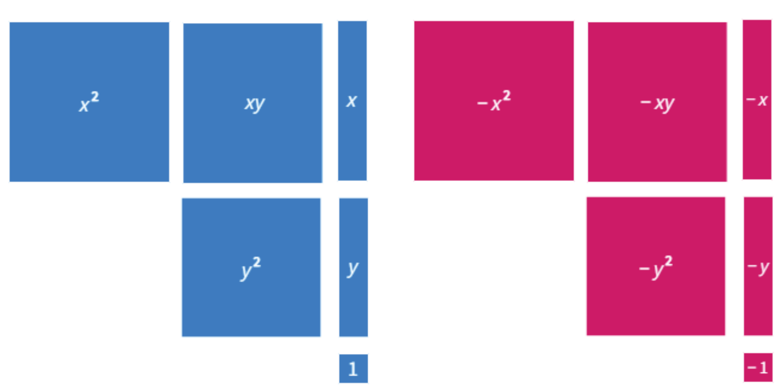
ಚಿತ್ರ 11

ಇವುಗಳಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೇ, ಬೀಜಗಣಿತದ ಫಲಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗೀಯ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು:

- $(a+b)^2$ ಮತ್ತು ಸಂಬಂಧಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು
- $(a-b)^2$ ಮತ್ತು ಸಂಬಂಧಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು
- $(a+b)(a-b)$
- $(a+b)^2 + (a-b)^2$
- $(a+b)^2 - (a-b)^2$

ಇದಿಷ್ಟೂ ಗಮನಿಸಿದ ಮೇಲೆ, ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತದ ಫಲಕಗಳ ನೆರವು ಅತ್ಯಂತ ಗಮನಾರ್ಹವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಭೌತಿಕವಾದ (ಅಥವಾ ವರ್ಚ್ಯುಯಲ್) ಟೈಲ್ ಗಳು ನಿಗದಿತ ಅಳತೆ ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಅವು ಅಷ್ಟು ಸೂಕ್ತವಲ್ಲ. ಆದರೂ ಈ ಫಲಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಏಕ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ರೇಖೀಯ ಮತ್ತು ವರ್ಗೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಬಹುದಾದ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇದೆಯೇನೋ. ಅದನ್ನು ಇನ್ನೂ ಆಳವಾಗಿ ನಾವು ಅನ್ವೇಷಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಕೆಲವು ಮಾದರಿಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ಚರಾಕ್ಷರವಾದ y ಅನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಅಲ್ಲಿ *y2, xy, y* ಎನ್ನುವ ಇನ್ನೂ ಮೂರು ಹೊಸ ಗಾತ್ರದ ಫಲಕಗಳ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂತಹ ಮಾದರಿಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಅಲ್ಲೂ ಸಹ ಘಾತದ ಹಾಗೂ ಸಹಗುಣಕದ ಮೇಲಿನ ನಿರ್ಬಂಧನೆಗಳು ಈಗ ಇರುವ ಹಾಗೆಯೇ ಇರುತ್ತವೆ. ಈ ರೀತಿ x ಮತ್ತು 1ರ ಜೊತೆಗೆ *y* ಫಲಕವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ಕೆಲವು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಬೋಧನೆಗೆ ಇದೇನಾದರೂ ಅನುಕೂಲಿಸುತ್ತದೆಯೇ ಎನ್ನುವುದನ್ನ ನಾವು ಅನ್ವೇಷಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರದ ರೇಖೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಇದು ಅನುಕೂಲಿಸಬಹುದೇ?



ಚಿತ್ರ 12

ಘನ (ಘಾತ 3ರ) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿ ಬಿಂಬಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂದು ಯೋಚಿಸಿದರೆ, ಪ್ರಾಯಶಃ ಆಯತಘನಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ನಾವು ಅವುಗಳನ್ನೂ ಸಹ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.. ಆದರೆ ಅದು ಕೊಂಚ ಕಠಿಣವಾಗಬಹುದು. ಜೊತೆಗೆ ಮಗುಚುವುದರ ಅನುಕೂಲ 3ನೇ ಆಯಾಮದ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, ಇಲ್ಲಿ ಧನ ಮತ್ತು ಋಣಗಳನ್ನು ಅಲ್ಲಿಯ ಹಾಗೆ ಒಂದರಲ್ಲೇ ಬಿಂಬಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಈ ರೀತಿ ಎದುರಾಗುವ ಕಷ್ಟಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ನಿವಾರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ನಿಟ್ಟಿನಲ್ಲೂ ಘನ ಆಯತಗಳು ಅಂತಹ ವಿಶೇಷ ಬೋಧನಾ ಅನುಕೂಲತೆಗಳನ್ನು ನೀಡುವುದಿಲ್ಲವೇನೋ.

ಕೊನೆಯದಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ FLU ಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಯದ ಮಕ್ಕಳಿಗೂ ಸಹ ಈ ಫಲಕಗಳನ್ನ ನಾವು ಪರಿಚಯಿಸಬಹುದು. ಮೊದಲೇ ಹೇಳಿದಂತೆ FLUಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವೇ ಈ ಫಲಕಗಳು. FLU ಗಳಿಂದ ಫಲಕಗಳಿಗೆ ಹೊರಳುವುದರಿಂದ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಸಹ ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳೇ ಎನ್ನುವ ಅರಿವು ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಮೂಡಬಹುದು. ವ್ಯತ್ಯಾಸವೆಂದರೆ x ಜಾಗದಲ್ಲಿ 10 ಇರುತ್ತದಷ್ಟೆ ಹಾಗೂ 0 ಇಂದ 9ರ ವರೆಗಿನ ಅಂಕಿಗಳು ಸಂಖ್ಯಾ ಸಹಗುಣಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಬೀಜಗಣಿತದ ಟೈಲ್ ಗಳಿಗೆ FLU ಗಳ ಪೂರ್ವ ಜ್ಞಾನದ ಅಗತ್ಯವೇನೂ ಇಲ್ಲ. ಆದರೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಬಳಸುವ ಬಣ್ಣದ ಬಿಲ್ಲೆಗಳ ಜ್ಞಾನ ಇದಕ್ಕೆ ಅವಶ್ಯಕ (ಉಲ್ಲೇಖ [6]).

ಪರಾಮರ್ಶನ

1. How to make algebra tiles: https://bit.ly/4buTsky
2. How to use algebra tiles: https://bit.ly/3zrFVNu
3. Explore algebra tiles virtually: https://bit.ly/3W7x3Wn
4. Algebraic identities with algebra tiles: https://bit.ly/3RSzyt0
5. FLU review: https://bit.ly/3XO1RMX
6. Integers: https://bit.ly/4bneWQw
7. Mathigon Polypad: https://bit.ly/3XLzU8o

ಮ್ಯಾಥ್ ಸ್ಪೇಸ್ ಎನ್ನುವುದು ಅಜೀಂ ಪ್ರೇಮ್‌ಜಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಗಣಿತದ ಪ್ರಯೋಗಾಲಯವಾಗಿದ್ದು, ಶಾಲೆಗಳು, ಶಿಕ್ಷಕರು, ಪೋಷಕರು, ಮಕ್ಕಳು, ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ಹಲವು ಸರ್ಕಾರೇತರ ಸಂಸ್ಥೆಗಳು ಹಾಗೂ ಪ್ರಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ಸೇವೆ ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತದೆ. ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧ ಪಟ್ಟಂತ ತರಹೇವಾರಿ ಕಲಿಕಾ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಇದು ಅನ್ವೇಷಿಸುವುದಲ್ಲದೆ, ಕಸದಿಂದ ಅತೀ ಕಡಿಮೆ ವೆಚ್ಚದಲ್ಲಿ ತಯಾರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳನ್ನೂ ಸಹ ಅನ್ವೇಷಿಸುತ್ತದೆ. ಗಣಿತವನ್ನು ದ್ವೇಷಿಸುವ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕೆ ಹೆದರುವ ಅಂತೆಯೇ ಗಣಿತವನ್ನೇ ಅಚ್ಚುಮೆಚ್ಚಾಗಿಸಿಕೊಂಡ ಎರಡೂ ದಿಕ್ಕಿನ ಮನಃಸ್ಥಿತಿಗಳಿಗೆ ಇದು ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಇದು ಅನೇಕ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಹುಟ್ಟುವ ಹಾಗೂ ವಿಕಸನಗೊಳ್ಳುವ ಜಾಗವಾಗಿದ್ದು, ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಹಲವಾರು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳೊಟ್ಟಿಗಿನ ಸಂವಹನವೇ ಕಾರಣವಾಗಿದೆ. ಮ್ಯಾಥ್ ಸ್ಪೇಸ್ ಅನ್ನು mathspace@apu.edu.in ಮೂಲಕ ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದು.

ಅನುವಾದ: **ಯತಿರಾಜ ಶರ್ಮ** | ಪರಿಶೀಲನೆ: **ಎಸ್ ಎನ್ . ಗಣನಾಥ**

ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ತಿರುಗಿಸುವುದು!

ಚೌಕ, ಆಯತ, ವಜ್ರಾಕೃತಿ, ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ, ಪತಂಗ, ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ, ಡಾರ್ಟ್(ಅಥವಾ ನಿಮ್ನ ಪತಂಗ) ಮುಂತಾದ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚತುರ್ಭುಜವೂ ಯಾವ ರೀತಿಯ ಸಮಮಿತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಮತ್ತು ಆಯತ ಎರಡೂ ಒಂದು ಸಮಮಿತಿಯ ರೇಖೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, 2ನೇ ದರ್ಜೆಯ ಆವರ್ತನೀಯ ಸಮಮಿತಿಯನ್ನು (rotational symmetry of order 2) ಹೊಂದಿವೆ.

ಆದರೆ, ನಾವು ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ?

A. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಮಿತಿಯ ರೇಖೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದು ಯಾವ ರೀತಿಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ?

B. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವು ಆವರ್ತನೀಯ ಸಮಮಿತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದು ಯಾವ ರೀತಿಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ?

ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ತಿರುಗಿಸುವುದರಿಂದ ಗಣಿತೀಯ ಅನ್ವೇಷಣೆಗೆ ಅವಕಾಶ ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಇದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸುವ, ದಾಖಲಿಸುವ ಮತ್ತು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವ ಕೌಶಲಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುವುದಲ್ಲದೆ, ಅವರ ಪರಿಕಲ್ಪನಾತ್ಮಕ ಗ್ರಹಿಕೆಯನ್ನೂ ಉತ್ತಮಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ. ಓದುಗರು ತಮ್ಮ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು AtRightAngles.editor@apu.edu.in ಗೆ ಕಳಿಸಬಹುದು.

ನಮ್ಮ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಾವು ನವೆಂಬರ್‌ಸಂಚಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಖಂಡಿತ ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತೇವೆ!