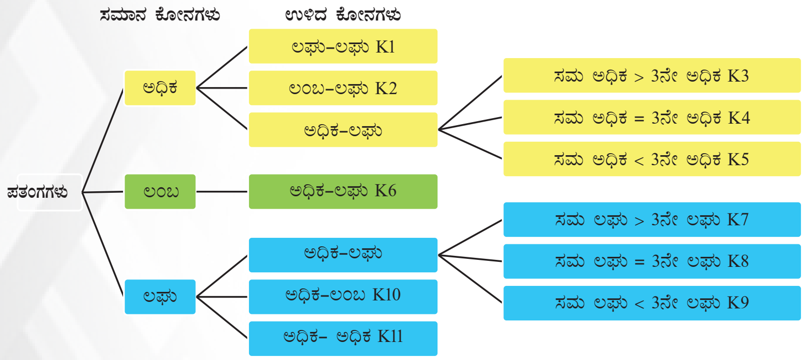
# ಪತಂಗ ಕುಟುಂಬಗಳು: ವಂಶವೃಕ್ಷದ ಒಂದು ತನಿಖೆ

ಪೋಸ್ಟರಿನ ಪ್ರಕಾರ 11 ಬಗೆಯ ಪತಂಗಗಳಿವೆ (ವಜ್ರಾಕೃತಿಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ)

ಮೇಲಿನ 11 ಬಗೆಯ ಪತಂಗಗಳೊಂದಿಗೆ ಗೆಳೆತನ ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಈ ಪೋಸ್ಟರ್ ನಿಮ್ಮ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಪತಂಗ K1,K2,.....K11 ಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿ, ಅವುಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ತಾವೇ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಮಯಾವಕಾಶ ನೀಡಿರಿ. ಕೆಲವು ಪ್ರಮುಖ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಚರ್ಚೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಥವಾ ಇತರ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾದ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅವರ ಜೊತೆ ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳಿ.

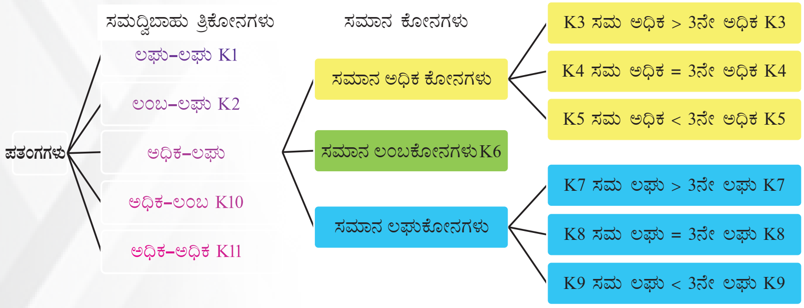
**a. ಸಮಮಿತಿಯ ರೇಖೆಯುದ್ದಕ್ಕೂ**




ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಎರಡು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು:

1. ಅಧಿಕ–ಲಘು i.e. ಚೌಕವಲ್ಲದ ವಜ್ರಾಕೃತಿ
2. ಲಂಬ i.e. ಚೌಕ

**b. ಎರಡು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ:**




**ವಜ್ರಾಕೃತಿ:** ಅಧಿಕ-ಅಧಿಕ ಅಥವಾ ಲಘು–ಲಘು. ಇದು ನಾವು ಯಾವ ಕರ್ಣರೇಖೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದರ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ.

ಚೌಕ: ಲಂಬ–ಲಂಬ

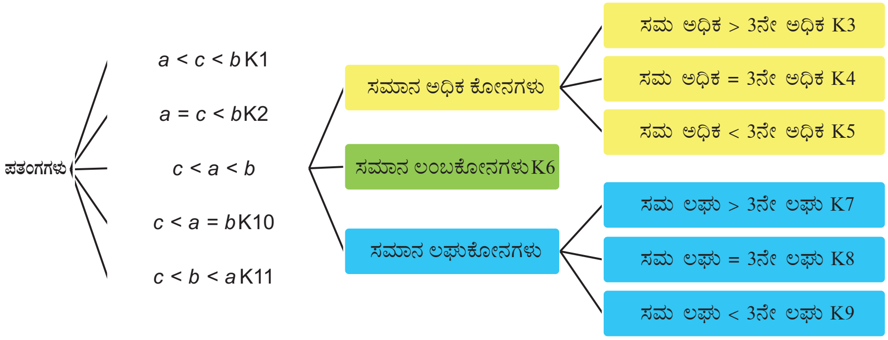
*ಪ್ರಮುಖ ಪದಗಳು: ಚತುರ್ಭುಜ, ಪತಂಗಗಳು, ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು, ಕೋನಗಳು, ವರ್ಗೀಕರಣ, ಅನ್ವೇಷಣೆ*

**c. ಕೋನಾನುಸಾರ:**

ಇದರ ವರ್ಗೀಕರಣವು A ರೀತಿಯಾಗಿಯೇ ಇದೆ.

ಎಲ್ಲಾ ನಾಲ್ಕು ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಒಂದೇ ಆವರ್ತಕ ಪತಂಗ ಎಂದರೆ ಅದು K6.

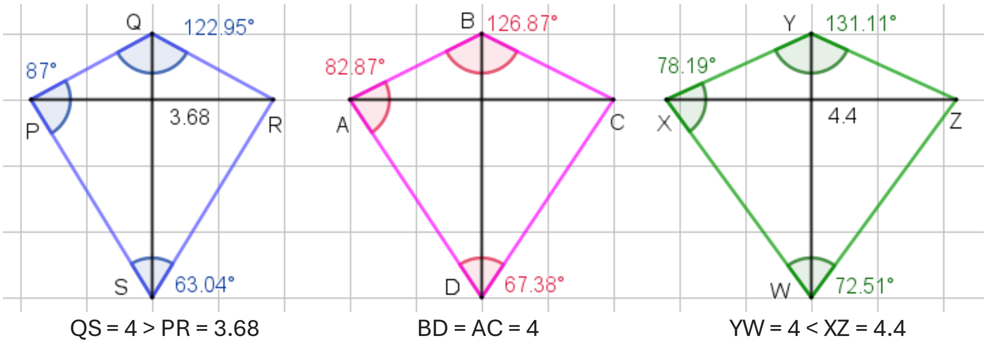
**d. ಕರ್ಣರೇಖೆಯ ಅನುಸಾರ:**




K1,K2,...K6 ಗಳಲ್ಲಿ ಉದ್ದವಿರುವ ಕರ್ಣರೇಖೆಯು ಅರ್ಧಿಸುವುದು

K8, (ಚೌಕವಲ್ಲದ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ) K9,...K11: ಅರ್ಧಿಸುವ ಕರ್ಣರೇಖೆಯು ಗಿಡ್ಡವಾಗಿದೆ.

ABCD, PQRS, XYZW: ಇವು ಸಮಾನ ಲಘು ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ K7 ಆಗಿದ್ದು, ಈ ಕೋನಗಳು >3ನೇ ಲಘುಗಳಿಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿವೆ.




ಚಿತ್ರ 1

**ಸಾಧನೆ:**

ABCD ಪತಂಗವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಇದರಲ್ಲಿ AB = BC ಮತ್ತು AD = DC. ಅದರ ಕರ್ಣಗಳಾದ AC = BD O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

$\angle BCD < 90^\circ$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

BD ವ್ಯಾಸದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

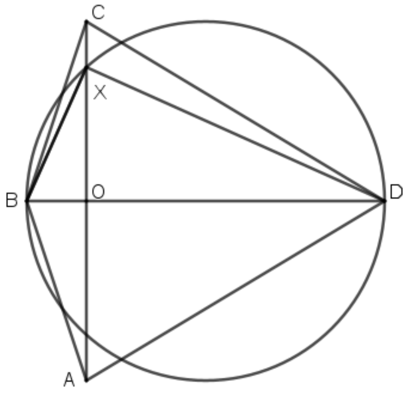
ವೃತ್ತವು OCಯನ್ನು Xನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. $\angle BXD=90^\circ$, ಏಕೆಂದರೆ ಇದು ಅರ್ಧವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವಾಗಿದೆ.

$\angle BCO + \angle XBC = \angle BXO$ (ಬಾಹ್ಯ ಕೋನವು ಎರಡು ವಿರುದ್ಧ ಆಂತರಿಕ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ)

$\Rightarrow \angle BCO < \angle BXO$

ಹಾಗೆಯೇ, $\angle DCO < \angle DXO$

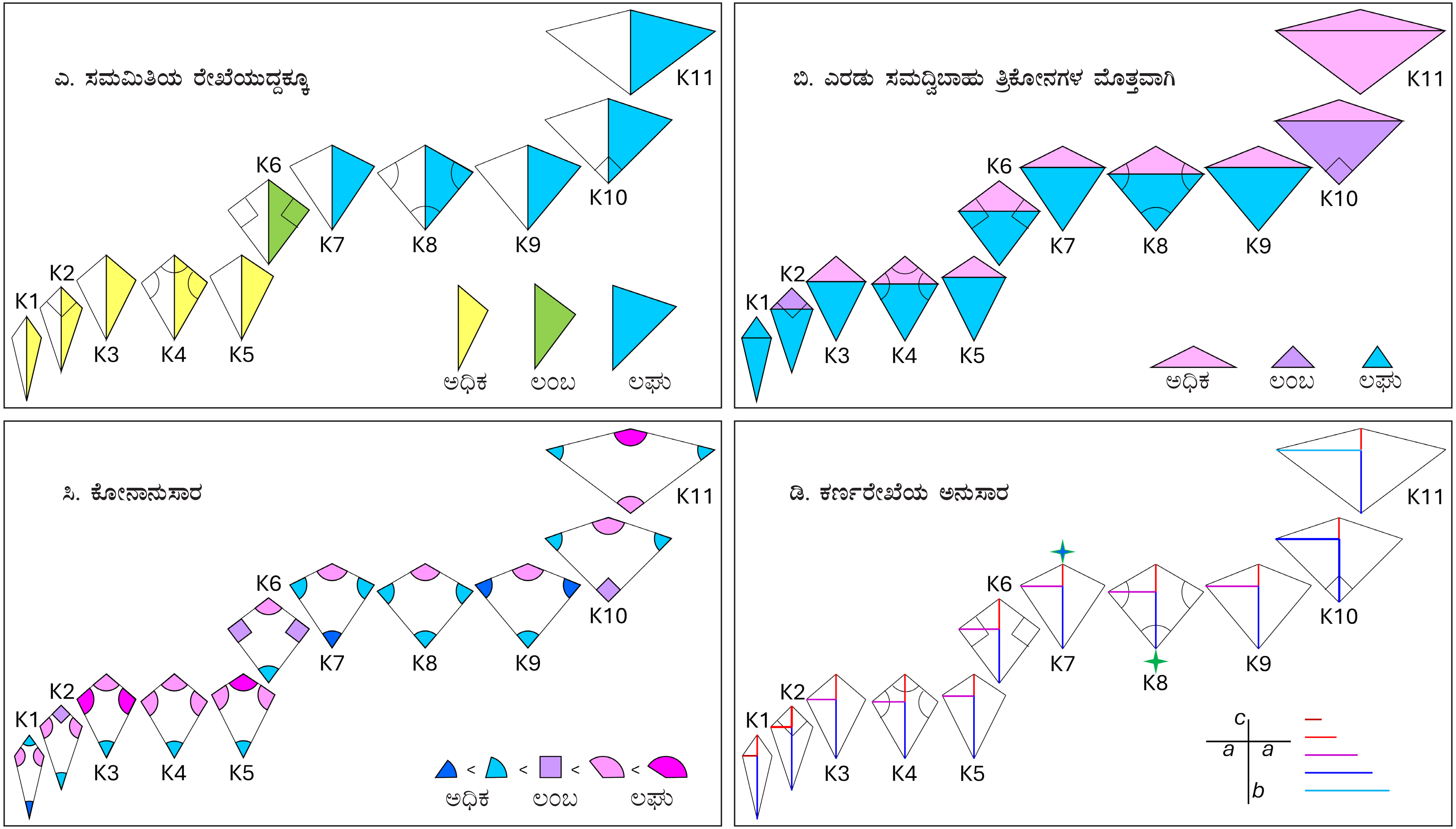
$\therefore \angle BCD = \angle BCO + \angle DCO < \angle BXO + \angle DXO = \angle BXD = 90^\circ$




ಚಿತ್ರ 2

ಅನುವಾದ: **ಸಿತಾರ ಎಚ್. ಎಂ.** | ಪರಿಶೀಲನೆ: **ಮಧುಕರ ಎಸ್ ಪುಟ್ಟಿ**

# ಪತಂಗ ಕುಟುಂಬಗಳು




ಈ ಚಿತ್ರಗಳ ಪ್ರಕಾರ 11 ಬಗೆಯ ಪತಂಗಗಳಿವೆ (ವಜ್ರಾಕೃತಿಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ). ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ K6 ವಿಶೇಶವಾದದ್ದು. ಏಕೆ? ನೀವು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪತಂಗದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನೂ ವಿವರಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? ಈ 11 ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿಗೂ, ಕೋನಗಳು ಅಥವಾ ಬಾಹುಗಳು – ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿ ಒಂದು ಪತಂಗವನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿಗೂ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದೇ? ಅರ್ಧಿಸಿರುವ ಕರ್ಣರೇಖೆಯು (ಸಮಮಿತಿಯ ರೇಖೆ) ಯಾವಾಗಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಉದ್ದವಿರುತ್ತದೆಯೇ? “ಕರ್ಣರೇಖೆಯ ಅನುಸಾರ”ದ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ನಕ್ಷತ್ರದಿಂದ ಗುರುತಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ವರ್ಗಗಳು ಪತಂಗಗಳ ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರಬಹುದು? ನೀಲಿ ನಕ್ಷತ್ರದ K6 ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಮೂರೂ ರೀತಿಯ ಪತಂಗಗಳಿವೆ: 1. ಹೆಚ್ಚು ಉದ್ದದ ಅರ್ಧಿಸುವ ಕರ್ಣರೇಖೆ 2. ಸಮ ಕರ್ಣರೇಖೆ 3. ಕಡಿಮೆ ಉದ್ದದ ಅರ್ಧಿಸುವ ಕರ್ಣರೇಖೆ. ಹಸಿರು ನಕ್ಷತ್ರದಿಂದ ಗುರುತಿಸಿರುವ K8 ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಉದ್ದದ ಅರ್ಧಿಸುವ ಕರ್ಣರೇಖೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪತಂಗಗಳಿವೆ. ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳು ಸಮವಾದಾಗ, ಪತಂಗವು ವರ್ಗಾಕೃತಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೆಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅನ್ವೇಷಿಸಬಹುದು:

**ಎ. ಸಮಮಿತಿಯ ರೇಖೆಯುದ್ದಕ್ಕೂ**

1. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪತಂಗದಲ್ಲೂ ಸಮಮಿತಿಯ ರೇಖೆ ಯಾವುದು?
2. ಅದು ಸಮಮಿತಿಯ ರೇಖೆಯಾಗಲು ಕಾರಣವೇನು?
3. ಸಮಮಿತಿಯ ರೇಖೆಯ ಮೂಲಕ ರಚನೆಯಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು, K1,K2,...K11 ಅನ್ನು ಎಷ್ಟು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದು? ಆ ಗುಂಪುಗಳು ಯಾವುವು?
4. ಈ ಗುಂಪುಗಳು ಪತಂಗದ ಸಮಾನ (ಮತ್ತು ವಿರುದ್ಧ ) ಜೋಡಿ ಕೋನಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸುತ್ತವೆ. ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನ ಒಳಗೆ ಒಂದು ಉಪಗುಂಪನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೇ? ಹಾಗಾದಲ್ಲಿ, ಈ ಉಪಗುಂಪುಗಳು ಏನನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸುತ್ತವೆ?
5. ಐಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಶ್ನೆ: ನೀವು ಒಂದು ವೃಕ್ಷ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದೇ?
6. ಪತಂಗಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ ನಾವು ವಜ್ರಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಸಮಮಿತಿಯ ರೇಖೆಯಿಂದ ರೂಪಿಸಲ್ಪಡುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಎಷ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ?

**ಬಿ. ಎರಡು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ**

1. ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಪತಂಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಎರಡು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಸೇರಿರುವ ಬಾಹುವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಈ ಬಾಹುವು ಪತಂಗದೊಂದಿಗೆ ಹೇಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ?
2. ಎಲ್ಲಾ ಸಂಭಾವ್ಯ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು – ಅಂದರೆ ಲಂಬಕೋನ, ಲಘುಕೋನ, ಅಧಿಕಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ – ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಇವುಗಳ ಯಾವ ಸಂಯೋಜನೆಗಳಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು?
   a. ಪತಂಗ
   b. ವಜ್ರಾಕೃತಿ
   c. ಮತ್ಯಾವುದಾದರೂ ವಿಶೇಷ ಚತುರ್ಭುಜದ ರಚನೆ ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ? ಅದು ಯಾವುದು?
3. ಅಂತಹ ಪ್ರತಿ ಪತಂಗದ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳು (ಲಘು/ಲಂಬ/ಅಧಿಕ) ಯಾವುದಾಗಬಹುದು?
4. 2aನ ವರ್ಗೀಕರಣವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ K1,K2,...K11 ಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸಿ. K1,K2,....K11 ನ ಹೊರಗೆ ಯಾವುದಾದರು ಪತಂಗವನ್ನು ಹುಡುಕಬಹುದೇ?

**ಸಿ. ಕೋನಾನುಸಾರ**

1. ಯಾವುದಾದರು ಒಂದು ಪತಂಗದಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಕೋನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರಿ. ಇದು ಯಾವ ರೀತಿಯ ಕೋನವಾಗಿದೆ?
2. ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕ ಕೋನವು ಯಾವ ರೀತಿಯದ್ದು?
3. ಒಂದು ಪತಂಗವು ಸಮಾನ ಮತ್ತು ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಈ ಜೋಡಿಯ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಎಷ್ಟು ರೀತಿಯ ಪತಂಗಗಳಿವೆ?
4. K2 ಪತಂಗದ ತಿಳಿ ನೀಲಿ ಕೋನವು, K7 ಪತಂಗದ ಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಗಾಢ ನೀಲಿ ಏಕೆ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದೆ?
5. ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಪತಂಗಗಳನ್ನು, ಅವುಗಳ ಕೋನಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ವರ್ಗೀಕರಿಸುವ ವೃಕ್ಷ ಚಿತ್ರವೊಂದನ್ನು ರೂಪಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? ಇದರಲ್ಲಿ K1, K2, ....K11 – ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪತಂಗವು ಎಲ್ಲಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸಿ.
6. K1, K2,....K11 ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪತಂಗಕ್ಕೆ ಒಂದೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೀಡಬಹುದೇ? ಉದಾ: K6: 120º–90º–90º –60º
7. K1, K2....K11 ಹೊರಗಿನ ಕೋನ ಸಂಯೋಜನೆಯ ಪತಂಗವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದೇ?
8. ಒಂದು K6 ಪತಂಗವನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಿ. ಅರ್ಧಿಸಿವ ಕರ್ಣರೇಖೆಯನ್ನು (ಅಥವಾ ಸಮತೆಯ ರೇಖೆ) ವ್ಯಾಸವಾಗಿಸಿ, ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ಇದನ್ನೇ K1, K2,...K5 ಅಥವಾ K7, K8,... K11 ಗಳಲ್ಲೂ ಇದನ್ನೇ ಗಮನಿಸುವಿರ?

**ಡಿ. ಕರ್ಣರೇಖೆಯ ಅನುಸಾರ**

1. K1,K2,...K11 ಇವುಗಳನ್ನು ಕರ್ಣರೇಖೆಯ ಭಾಗಗಳಾದ a, b, ಮತ್ತು cಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿ. ಉದಾ: K2: a = c < b.
2. ನಿಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆಯ a, b ಮತ್ತು c ಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ, K1, K2, ... K11ನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗಕ್ಕೂ ಒಂದು ಪತಂಗವನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಿ. b>c ಆಗಿದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.
3. K1, K2,...K6 ಗೆ ಯಾವ ಕರ್ಣರೇಖೆಯು ಉದ್ದವಾಗಿದೆ? K9, K10, ಮತ್ತು K11 ಗೆ ಯಾವುದು ಉದ್ದವಾಗಿದೆ? ಏಕೆ?
5. ಪತಂಗದ ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ ಎಂದಾದರೆ, a, b, ಮತ್ತು c ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪತ್ತೆ ಮಾಡಿ.
5. ಈಗ 3 K7 ಪತಂಗಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ ಚಿತ್ರಿಸಿ:
   a. ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖೆಗಿಂತ ಉದ್ದವಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಕರ್ಣರೇಖೆಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸಿ.
   b. ಎರಡೂ ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವಂತೆ.
   c. ಚಿಕ್ಕದಿರುವ ಕರ್ಣವನ್ನು ಅರ್ಧಸಿ.
6. ಸವಾಲು: ಪತಂಗದ ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಸಮಾನ (ಮತ್ತು ವಿರುದ್ಧ ) ಕೋನಗಳು ಲಘು ಕೋನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಬೀತುಪಡಿಸಿ.

**ಮ್ಯಾಥ್ ಸ್ಪೇಸ್** ಎನ್ನುವುದು ಅಜೀಂ ಪ್ರೇಮ್‌ಜಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಗಣಿತದ ಪ್ರಯೋಗಾಲಯವಾಗಿದ್ದು, ಶಾಲೆಗಳು, ಶಿಕ್ಷಕರು, ಪೋಷಕರು, ಮಕ್ಕಳು, ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ಹಲವು ಸರ್ಕಾರೇತರ ಸಂಸ್ಥೆಗಳು ಹಾಗೂ ಪ್ರಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ಸೇವೆ ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತದೆ. ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟಂತ ತರಹೇವಾರಿ ಕಲಿಕಾ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಇದು ಅನ್ವೇಷಿಸುವುದಲ್ಲದೆ, ಕಸದಿಂದ ಅತೀ ಕಡಿಮೆ ವೆಚ್ಚದಲ್ಲಿ ತಯಾರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳನ್ನೂ ಸಹ ಅನ್ವೇಷಿಸುತ್ತದೆ. ಗಣಿತವನ್ನು ದ್ವೇಷಿಸುವ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕೆ ಹೆದರುವ ಅಂತೆಯೇ ಗಣಿತವನ್ನೇ ಅಚ್ಚುಮೆಚ್ಚಾಗಿಸಿಕೊಂಡ ಎರಡೂ ದಿಕ್ಕಿನ ಮನಸ್ಥಿತಿಗಳಿಗೆ ಇದು ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಇದು ಅನೇಕ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಹುಟ್ಟುವ ಹಾಗೂ ವಿಕಸನಗೊಳ್ಳುವ ಜಾಗವಾಗಿದ್ದು, ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಹಲವಾರು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳೊಟ್ಟಿಗಿನ ಸಂವಹನವೇ ಕಾರಣವಾಗಿದೆ. ಮ್ಯಾಥ್ ಸ್ಪೇಸ್ ಅನ್ನು mathspace@apu.edu.in ಮೂಲಕ ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದು.

ಅನುವಾದ: **ಸಿತಾರ ಎಚ್. ಎಂ.** | ಪರಿಶೀಲನೆ: **ಮಧುಕರ ಎಸ್ ಪುಟ್ಟಿ**