

पूर्ण संख्याओं के लिए मैनिप्यूलेटिव्स सामग्री : कब और क्यों?

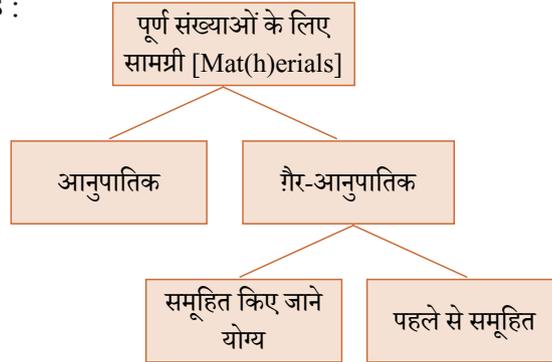
मैथ स्पेस द्वारा समीक्षित

पूर्ण संख्याओं से जुड़ी अवधारणाओं जैसे स्थानीय मान, तुलना, अंकगणितीय संक्रियाओं आदि को सिखाने में उपयोग की जाने वाली मैनिप्यूलेटिव्स वस्तुओं के बारे में कई शिक्षकों के सवाल होते हैं। यह लेख इन वस्तुओं का एक तुलनात्मक अध्ययन है। इनको कब और कैसे इस्तेमाल करना है जैसे मुद्दों पर इस लेख में बात की गई है।

एट राइट एंगल्स ने कई मैनिप्यूलेटिव्स¹ वस्तुओं की समीक्षा की है जिनका उपयोग स्थानीय मान और पूर्ण संख्याओं की तुलना तथा उन पर की जाने वाली अंकगणितीय संक्रियाओं को सिखाने के लिए किया जा सकता है। इन वस्तुओं में (i) ऐरो कार्ड (ii) गणितमाला (iii) काउंटर (iv) 10 के फ्रेम (v) फ्लैट-लॉन्ग-यूनिट (एफएलयू) (vi) डीस ब्लॉक और (vii) स्टेटिक बीड्स शामिल हैं। (इन पर एट राइट एंगल्स के विभिन्न अंकों में इसी क्रम में चर्चा की गई है।) इसके अलावा, तीली बण्डल एक लोकप्रिय और व्यापक रूप से उपयोग की जाने वाली वस्तु है। कुछ और भी ऐसी मैनिप्यूलेटिव्स वस्तुएँ हैं जिन्हें आमतौर पर इस्तेमाल किया जाता है – (क) अबेकस और (ख) नोट एवं सिक्के। इनमें से कई वस्तुएँ एनसीईआरटी और पश्चिम बंगाल तथा सिक्किम जैसे कुछ राज्यों के फ़ाउण्डेशनल (कक्षा 1-2) और प्रिपरेटरी स्टेज (कक्षा 3-5) की गणित की पाठ्यपुस्तकों में शामिल हो गई हैं।

पूर्ण संख्याओं के लिए मैनिप्यूलेटिव्स सामग्री के प्रकार

ऐरो कार्ड को छोड़कर ऊपर उल्लिखित सभी मैनिप्यूलेटिव्स वस्तुएँ मात्राओं की द्योतक होती हैं। इसके विपरीत ऐरो कार्ड इकाइयों, दहाइयों आदि का इस्तेमाल करके संख्यात्मक रूप बनाते हैं। बाक़ी वस्तुओं को मोटेतौर पर दो समूहों में वर्गीकृत किया जा सकता है :



- **आनुपातिक** : जिनमें 10 स्पष्ट रूप से (आकार में) एक से 10 गुना बड़ा होता है या 100 एक का 100 गुना या 10 का 10 गुना होता है। गणितमाला, 10 के फ्रेम, तीली बण्डल, एफएलयू, डीस ब्लॉक, स्टेटिक बीड्स इस श्रेणी में आते हैं और काउंटर भी।

1. मैनिप्यूलेटिव्स यानी ऐसी भौतिक वस्तुएँ जिनका उपयोग गणितीय अवधारणाओं और प्रक्रियाओं की बेहतर समझ बनाने के लिए, अमूर्त अवधारणाओं को ठोस बनाने के लिए किया जाता है। इन वस्तुओं से बने मॉडल विज्ञान अलाइजेशन में मदद करते हैं। अधिकांश मैनिप्यूलेटिव्स संख्याओं से जुड़े होते हैं। इनका उपयोग परिचय, तुलना, जोड़-घटाना-गुणा-भाग करने के लिए किया जा सकता है। बीजगणित टाइलें इनमें से एक है। जियोबोर्ड और रबर बैंड ज्यामिति के लिए हैं। रंगोमेट्री, जोड़ो स्ट्रॉ, इंटरलॉकिंग क्यूब्स, फ्लेक्सिवायर, आकार परिवार, टैनग्राम, पॉलीओमिनो कट जो संख्याओं, पैटर्न और ज्यामिति के लिए काम आते हैं।

की-वर्ड : संख्यात्मकता, संख्या कौशल, मैनिप्यूलेटिव्स, विशेषताएँ, तुलना

- **गैर-आनुपातिक** : इनमें ऐसे अनुपात मान लिए जाते हैं जो वास्तव में वैसे दिखाई नहीं देते। अबेकस और नोट व सिक्के इस श्रेणी में आते हैं। ₹100 का नोट क्षेत्रफल/ आयतन या भार में ₹10 के नोट का 10 गुना नहीं होता और यही बात ₹10 या ₹1 के सिक्के पर लागू होती है।

आनुपातिक मैनिप्युलेटिव्स वस्तुओं के भी दो उप-समूह होते हैं :

I. समूहित किए जाने योग्य : हर इकाई किसी दहाई या सैकड़े का हिस्सा हो सकती है या अकेली भी रह सकती है। तीली बण्डल (और काउंटर) इस श्रेणी में आते हैं।

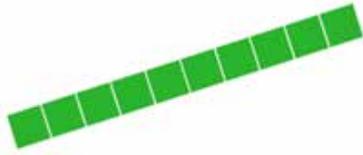
II. पहले से समूहित : हर इकाई, दहाई, सैकड़ा का अपने आप में एक अस्तित्व होता है। इन्हें और नहीं तोड़ा जा सकता या किसी और बड़ी वस्तु का हिस्सा नहीं बनाया जा सकता।



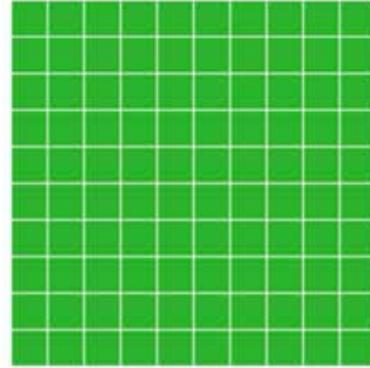
चित्र-1



यह वर्ग सदा सिर्फ एक इकाई ही रहता है।



दस/ लॉन्ग (छड़) – ये वर्ग सदा सिर्फ किसी दहाई का हिस्सा होते हैं, कभी अलग-अलग इकाइयों के रूप में नहीं होते।



सौ/ प्रलैट (तख्ती) – ये वर्ग सदा सिर्फ किसी सैकड़े का हिस्सा होते हैं, कभी किसी दहाई का हिस्सा नहीं होते या कभी अलग-अलग इकाइयों के रूप में नहीं होते।

चित्र-2

दिलचस्प बात है कि गणितमाला और 10 के फ्रेम में उक्त दोनों प्रकारों के गुण शामिल रहते हैं :

उदाहरण के लिए, 7 और 13, दोनों में नीली गोठियाँ इकाइयाँ हैं जबकि 13 में जो गुलाबी काउंटर हैं वे एक पूरे फ्रेम या 10 का हिस्सा हैं; ध्यान दें कि यह किसी भी काउंटर की अपने सम्बन्धित फ्रेम में स्थिति से स्वतंत्र होता है।

चित्र-3 : 10 के फ्रेम

पहली गणितमाला में काले मनकों का समूह 24 को निरूपित करते हुए एक दहाई में हैं, लेकिन दूसरी गणितमाला में 17 को निरूपित करते हुए वे इकाइयाँ बन जाते हैं।

चित्र-4 : गणितमाला

	पहले से समूहित सामग्री के गुण	समूहित किए जाने योग्य सामग्री के गुण
गणितमाला	मनके दस-दस के समूहों में होते हैं और उन्हें उसी के अनुरूप रंग दिया जाता है	हर मनका किसी दहाई का हिस्सा हो सकता है या फिर एक अकेली इकाई माना जा सकता है, जो इस बात पर निर्भर करेगा कि हम किस संख्या को निरूपित कर रहे हैं
दस के फ्रेम	2 × 5 फ्रेम	रखा गया हर काउंटर किसी दहाई का हिस्सा हो सकता है (अगर वह एक पूरा फ्रेम बन जाए) या एक इकाई माना जा सकता है

यह उन्हें बेहद उपयोगी बना देता है!

अब हमें बेस-10 (10 के आधार) यानी स्थानीय मान को समझने की मज़बूत बुनियाद बनाने के लिए आनुपातिक सामग्री से शुरुआत करनी चाहिए। इसके अलावा, चूँकि कम उम्र के शिक्षार्थियों के लिए व्यावहारिक अनुभव बेहद महत्वपूर्ण होता है, हमें ऐसी मैनिप्युलेटिव्स सामग्री से शुरुआत करनी चाहिए जिसमें समूहित किए जाने वाले गुण हों। नीचे दी गई तालिका इन वस्तुओं के विभिन्न गुणों को प्रदर्शित करती है :

सामग्री	संख्या की सीमा	बनाने में आसानी का स्तर	उपयोग	आभासी रूप की उपलब्धता	सम्भावित विस्तार
काउंटर	0-10 और अधिक	शिक्षार्थियों द्वारा जुटाए जा सकते हैं, ये कंकड़, बटन, बीज आदि हो सकते हैं – अच्छा हो यदि ये एक जैसे हों, लेकिन ऐसा होना एकदम ज़रूरी नहीं है	गिनती, तुलना, चार संक्रियाएँ, पैटर्न तथा और भी चीज़ें	हाँ	पूर्णांकों के लिए रंगीन या चिह्नांकित
दस के फ्रेम	0-20, 0-50	आसानी से बनाए जा सकते हैं	गिनती, एक अंकीय जोड़ के तथ्यों का स्वचालीकरण (automatization), सम-विषम की पहचान	हाँ	गुणजों और संख्या पैटर्न के लिए अन्य फ्रेम
गणितमाला	0-100, 0-200	शिक्षार्थियों द्वारा बनाई जा सकती है	गिनती, संख्याओं का क्रम , तुलना, चार संक्रियाएँ व और भी चीज़ें	अभी तक नहीं	पूर्णांकों के लिए चौरंगी रूप
तीली बण्डल	0-100, सम्भवतः 0-999	शिक्षार्थी इकट्ठा करके बण्डल बना सकते हैं	गिनती, समूहीकरण (दहाइयों में) का अभ्यास , तुलना, जोड़-घटाव	अभी तक नहीं	गुणन के लिए लम्बी रंगीन – गैर-आनुपातिक बन जाती है
एफएल्यू	0-999	शिक्षकों द्वारा बनाए जा सकते हैं जिसमें सम्भवतः वे कुछ बड़ी उम्र के विद्यार्थियों की मदद ले सकते हैं	निरूपण, तुलना, चार संक्रियाएँ, क्षेत्रफल के लिए महत्वपूर्ण , वर्ग एवं वर्गमूल	हाँ	दशमलव एफएल्यू, बीजगणितीय टाइल
डीस ब्लॉक	0-1000	स्थानीय स्तर पर बनाना बेहद मुश्किल	तुलना, चार संक्रियाएँ, आयतन के लिए महत्वपूर्ण	हाँ	दशमलव रूप
स्टेटिक बीड्स	0-1000	स्थानीय स्तर पर बनाना मुश्किल	निरूपण, तुलना, चार संक्रियाएँ		
अबेकस	तीन अंकीय संख्याओं के आगे	स्थानीय स्तर पर बनाना मुश्किल	निरूपण, जोड़-घटाव	अभी तक नहीं	दशमलव रूप
नोट एवं सिक्के	0-999	स्थानीय स्तर पर बनाए जा सकते हैं	निरूपण, जोड़-घटाव, इबारती सवाल		

इस तरह, काउंटर और तीली बण्डल सीधे शिक्षार्थियों द्वारा जुटाए जा सकते हैं, जबकि गणितमाला उनके द्वारा आसानी से बनाई जा सकती है। एफएल्यू भी किसी भी स्कूल में स्थानीय स्तर पर बनाए जा सकते हैं लेकिन उनके लिए किसी शिक्षक और मिडिल/ हाई स्कूल विद्यार्थियों के सक्रिय निरीक्षण की आवश्यकता होगी। 10 के फ्रेम तथा नोट व सिक्के भी स्थानीय स्तर पर बनाए जा सकते हैं। मनके स्थानीय स्तर पर बनाए जा सकते हैं – लेकिन इसमें काफ़ी ज़्यादा सामग्री (लगभग 2000 गोलाकार मनके) और बहुत ज़्यादा श्रम लगेगा। इसी प्रकार, अबेकस को भी किसी बड़ई की मदद से स्थानीय स्तर पर बनाया जा सकता है। लेकिन डीस ब्लॉक को बनाना मुश्किल हो सकता है अगर कोई कुशल बड़ई आपके सम्पर्क में न हो तो।²

2. डीस ब्लॉक : इकाई छोटा घन होनी चाहिए, जैसे 1 सेमी × 1 सेमी × 1 सेमी। छड़ (या दहाई) इकाई की 10 गुना होनी चाहिए, यानी, 10 सेमी × 1 सेमी × 1 सेमी। फ्लैट (या सैकड़ा) छड़ का 10 गुना होना चाहिए, यानी, 10 सेमी × 10 सेमी × 1 सेमी। और अन्त में बड़ा घन (हज़ार) फ्लैट का 10 गुना होना चाहिए, यानी, 10 सेमी × 10 सेमी × 10 सेमी। अगर इकाई थोड़ा बड़ा घन हो तो फिर बाक्री के हिस्से उसी अनुपात में बड़े होने चाहिए।

इसके अलावा, यह भी ध्यान रखें कि सीखने के शुरुआती चरण में ये वस्तुएँ शिक्षार्थियों की पहुँच में होना चाहिए। इसलिए, कक्षा में इनका एक ही सेट होना शायद पर्याप्त न हो। यह सही है कि विद्यार्थी अवलोकन के द्वारा सीखते हैं। लेकिन गहराई से सीखने के लिए यह ज़रूरी है कि वे खुद इन वस्तुओं के साथ जुड़ें। इसलिए, आदर्श स्थिति होगी कि 30 बच्चों की कक्षा में इन वस्तुओं के कम-से-कम 6-8 सेट हों ताकि प्रति सेट के साथ 4-5 शिक्षार्थियों को सीखने का मौका मिल सके।

इसलिए, पर्याप्त डीस ब्लॉक और स्टेटिक बीड्स का बन्दोबस्त करना मुश्किल है। यही बात अबेकस के लिए भी हो सकती है।

स्टेज के अनुसार

काउंटर, तीली बण्डल और गणितमाला फ़ाउण्डेशनल स्टेज में गिनती करने, दहाइयों के गट्टर बनाने और संख्याओं के साथ खेलने के लिए बेहद महत्वपूर्ण होते हैं। समूहित किए जाने योग्य सामग्री के रूप में तीली बण्डल दहाइयों के गट्टर बनाने और फिर जब भी एक प्रकार के 10 मौजूद हों तो एक बड़ा बण्डल बनाने का बेहद ज़रूरी ठोस अनुभव प्रदान करते हैं। (इसलिए 10 दहाइयाँ एक बड़ा बण्डल, सैकड़ा बनाती हैं।) गणितमाला दिखाती है कि दहाइयाँ बाईं ओर तथा इकाइयाँ दाईं तरफ़ होती हैं और इस तरह (दो-अंकीय संख्या में) बाएँ अंक को दहाई के रूप में तथा दाएँ अंक को इकाइयों के रूप में दिखाती हैं। चार रंगों वाली 200 मनकों की गणितमाला (जिसमें एक-दूसरे से भिन्न दो रंग 0-100 दिखा रहे हों और ऐसे ही दो और रंग 100-200 दिखा रहे हों) इसे आगे ले जाती है और दिखाती है कि सैकड़े का अंक सबसे बाएँ होना चाहिए। ये मालाएँ संख्या रेखा का मैनिप्युलेटिव्स की सम्भावना वाला रूप भी होती हैं और दोनों के कई साझा गुण होते हैं (चित्र-5)। 10 के फ़्रेम शायद इन दोनों जितने महत्वपूर्ण न हों लेकिन कुछ ज़रूरी मानसिक छवियाँ पैदा करते हैं।



चित्र-5 : गणितमाला और दोहरी गणितमाला

प्रिपेरेटरी स्टेज में, जब हम दो अंकों के आगे जाते हैं, तब जहाँ तक उपयोग करने में आसानी की बात है तो एफएलयू पहले से समूहित सामग्री के रूप में तीली बण्डल की तुलना में अधिक उपयोगी हो जाते हैं। इसके अलावा, गुणा-भाग में एफएलयू की व्यवस्थाएँ बाद की कई अवधारणाओं के लिए पूर्व शर्त होती हैं जिनमें परिधि और क्षेत्रफल शामिल हैं (हालाँकि यह केवल इन तक सीमित नहीं रहती)।

जब हम चार अंकीय संख्याओं पर पहुँचते हैं, तो आनुपातिक सामग्री के साथ काम करना मुश्किल हो जाता है। कोई शिक्षक आसानी से 10 सैकड़ों को जोड़कर बनाए गए हजार को दिखा सकता है, बच्चों को यह दर्शाने के लिए कि 1000 कितना बड़ा होता है। लेकिन इसे किन्हीं भी दो चार-अंकीय संख्याओं की तुलना करने या फिर किसी सामान्य कक्षा में संक्रियाओं आदि के लिए उपयोग करना व्यावहारिक और व्यवस्थागत रूप से असम्भव है। यहीं पर गैर-आनुपातिक सामग्री मदद कर सकती है। दुर्भाग्यवश, 1000 का नोट अब उपलब्ध नहीं है। इसलिए इस स्थिति में अब नोट व सिक्के मदद नहीं कर सकते। अबेकस इसमें मदद कर सकता है, खासतौर से संख्या-संरचना (स्थानीय मान) और जोड़-घटाव के सन्दर्भ में।

हमें यह भी याद रखना चाहिए कि जब कोई शिक्षार्थी चार-अंकीय संख्याओं तक पहुँचता/ पहुँचती है तो उसके पास 10-आधार (यानी स्थानीय मान) की पर्याप्त समझ होनी चाहिए और उसे मैनिप्युलेटिव्स सामग्री के बग़ैर चार-अंकीय संख्याओं के साथ काम करने में सक्षम होना चाहिए।

संक्षेप में

गणितमाला = 1डी (एक-आयामी) बेस 10, एफएलयू = 2डी (दो-आयामी) बेस 10, डीस ब्लॉक = 3डी (त्रि-आयामी) बेस 10

- काउंटर इसलिए महत्वपूर्ण हैं क्योंकि हम इनसे गिनना सीखते हैं, इन्हें प्राप्त करना और बनाना भी बहुत आसान होता है।

- तीली बण्डल भी महत्वपूर्ण हैं क्योंकि ये दहाइयों में समूहित करने का अनुभव प्रदान करती हैं और जुटाने/ बनाने में आसान हैं।
- गणितमाला बहुत बढ़िया है क्योंकि यह संख्या रेखा से जुड़ जाती है और अंकों के क्रम से सम्बन्ध स्थापित करती है और बनाने में आसान है।
- एफएलयू 2डी बेस-10 ब्लॉक के रूप में उत्कृष्ट हैं – 2डी होना इन्हें ज्यादा उपयोगी और पर्याप्त मात्राओं में स्थानीय रूप से बनाना आसान बनाता है।

इसलिए, ऊपर बताई गई इन चारों वस्तुओं को निश्चित रूप से इस्तेमाल किया जाना चाहिए और पर्याप्त मात्रा में यानी, हर 4 विद्यार्थियों के लिए एक सेट।

- दस के फ्रेम बनाने में आसान हैं और उनके ऊपर उल्लिखित गुण हैं।
- नोट एवं सिक्के वास्तविक जीवन में संख्याओं के उपयोग को सन्दर्भ में रखने में मदद कर सकते हैं, खासतौर पर खरीदने-बेचने के सन्दर्भ में और ये विद्यार्थियों द्वारा बनाए जा सकते हैं।

ऊपर बताई गई ये दोनों सामग्रियाँ **वाँछनीय श्रेणी** में आती हैं।

- स्टेटिक बीड्स को बनाने के लिए बहुत ज्यादा प्रयास और सामग्री (मनकों) की जरूरत पड़ती है। लेकिन ये अवधारणात्मक स्पष्टता प्रदान करते हैं।
- डीस ब्लॉक बनाने के लिए विशेष शिल्प कौशल और बारीकरी की जरूरत होती है।

अतः इन दोनों वस्तुओं को प्रदर्शन के हिसाब से रखा जा सकता है। अबेकस – गैर-आनुपातिक है, इसलिए अवधारणात्मक स्पष्टता में मदद नहीं करता। यह उन कुछ शिक्षार्थियों के लिए मददगार हो सकता है जो कक्षा-5 या बाद की कक्षाओं में कुछ अवधारणाओं के साथ जूझ रहे हों। इसे बनाना आसान नहीं है। इसलिए इसका **उपयोग करने की जरूरत नहीं**।

ऐरो कार्ड बेस-10 संरचना को खोलने में मदद करते हैं और इसलिए बेहद उपयोगी हैं, लेकिन इन्हें किन्हीं आनुपातिक वस्तुओं के साथ मिलाकर इस्तेमाल किया जाना चाहिए। इन्हें स्थानीय रूप से एफएलयू की अपेक्षा ज्यादा आसानी से बनाया जा सकता है। इसलिए इन्हें पर्याप्त मात्रा में इस्तेमाल किया जाना चाहिए।

गणितमाला, दस के फ्रेम, तीली बण्डल, एफएलयू और हाँ, ऐरो कार्ड एनसीईआरटी की गणित की पाठ्यपुस्तकों में दाखिल हो चुके हैं। सिक्किम जैसे कुछ राज्यों ने इन्हें पहले ही अपनी पाठ्यपुस्तकों में शामिल कर लिया था। अबेकस पश्चिम बंगाल की प्रादेशिक पाठ्यपुस्तकों में शामिल हो चुका था। हम चाहते हैं कि पाठक इन वस्तुओं की खूब जाँच-पड़ताल करें। सम्बन्धित लिंक नीचे दी गई हैं।

Reference

1. Arrow Cards: <https://bit.ly/42ZuwRX>
2. Ganitmala: <https://bit.ly/4hRl9rs>
3. Counters: <https://bit.ly/3EzT7m2>
4. Ten-Frames: <https://bit.ly/4hXAtCU>
5. Flats-Long-Units (FLU): <https://bit.ly/430USCK>
6. Dienes Blocks and Static Beads: <https://bit.ly/3Qjnb8a>
7. NCERT textbooks: <https://bit.ly/4jSCn9H>
8. Sikkim textbooks: <https://bit.ly/4aZQkPl>
9. West Bengal textbooks: <https://bit.ly/410ikNU>

मैथ स्पेस अजीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी की एक गणित प्रयोगशाला है जो स्कूलों, शिक्षकों, अभिभावकों, बच्चों, स्कूली शिक्षा में काम कर रहे एनजीओ और शिक्षक प्रशिक्षकों की जरूरतों को पूरा करती है। यह गणित के लिए सीखने-सिखाने की विभिन्न सामग्री (mat(h)erials), उसके विस्तार और कबाड़ से बनाए जा सकने वाले उसके कम लागत के विकल्पों की सम्भावनाओं की खोजबीन करती है। यह गणित की दुनिया की विस्तृत श्रेणी के दोनों छोरों पर स्थित लोगों पर ध्यान देने की कोशिश करती है – वे जो गणित से भय खाते हैं या नफ़रत तक करते हैं और वे जिन्हें गणित से जुड़ने में खूब मज़ा आता है। यह एक ऐसी जगह है जहाँ विचार जन्म लेते हैं और विकसित होते हैं जिसका श्रेय कई लोगों के साथ होने वाले पारस्परिक व्यवहारों को जाता है। मैथ स्पेस के साथ यहाँ सम्पर्क किया जा सकता है : mathspace@apu.edu.in

मैथ स्पेस : <https://sites.google.com/apu.edu.in/mathspace/home>

अनुवाद : भरत त्रिपाठी पुनरीक्षण : सुशील जोशी कॉपी एडिटर : अनुज उपाध्याय