At Right Angles
A Resource for School Mathematics

त्रिविमीय वस्तुओं (3-डी) के माध्यम से स्थानिक सोच

पद्मप्रिया शिराली

Azim Premji University
A publication of Azim Premji University together with Community Mathematics Centre, Rishi Valley

त्रिविमीय वस्तुओं के माध्यम से स्थानिक सोच

हमारे दिमाग़ ने लाखों वर्षों के दौरान त्रिविमीय दुनिया के अनुकूल स्वयं को ढाल लिया है और हम अन्य वस्तुओं के सापेक्ष अन्तरिक्ष में अपने स्थान और स्थिति का आकलन करने में सक्षम हैं। जब हम काग़ज़ (2-डी यानी द्विविमीय तल) पर दर्शाई गई किसी वस्तु को देखते हैं, तो अपने आप उसका त्रिविमीय चित्र बना लेते हैं। हम अकसर इस बात पर ध्यान नहीं देते हैं कि हमारे दैनिक जीवन में किए जाने वाले कार्यों में स्थानिक सोच और समझ शामिल है। जब मैं अपने फ़ोन पर नक़्शा देखती हूँ या विभिन्न माप के बर्तनों को फ्रिज़ में रखती हूँ, तो मैं स्थानिक समझ का उपयोग करती हूँ। हम सभी स्थानिक सोच पर उससे कहीं ज़्यादा निर्भर हैं, जितना कि हम सोचते हैं।

स्कूल में हमारे द्वारा अध्ययन की जाने वाली ज्यामिति का एक बड़ा हिस्सा 2-डी आकृतियों, और इन आकृतियों के बीच सम्बन्धों व इनकी विशेषताओं से जुड़ा होता है। हालाँकि, हम एक 3-डी दुनिया में रहते हैं जो और भी ज़्यादा जटिल ज्यामितीय तथ्यों और सम्बन्धों से भरपूर है। इन स्थानों के साथ काम करने के लिए इन वस्तुओं के गुणधर्मों की अच्छी समझ के अलावा कल्पना (visualisation) और अमूर्तन (abstraction) की ज़रूरत होती है। 2-डी ज्यामिति में उपयोग होने वाली कुछ अवधारणाओं को 3-डी आकृतियों पर लागू नहीं किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, एक गोले पर दो बिन्दुओं को जोड़ने वाला सबसे छोटा मार्ग दो बिन्दुओं को जोड़ने वाली सीधी रेखा नहीं है और इस बात का प्रभाव हवाई यात्रा पर पड़ता है।


चित्र-1

स्थानिक सोच (spatial thinking) क्या है? यह वह तरीक़ा है जिससे हमारा मस्तिष्क किसी भौतिक वातावरण में किसी वस्तु की स्थिति और आकृति को समझता है। वह स्थानिक सोच ही है जिसके माध्यम से हम वस्तुओं के स्थान और विमाओं को समझते हैं। साथ ही यह भी समझते हैं कि विभिन्न वस्तुएँ एक-दूसरे से कैसे सम्बन्धित हैं। ऐसी सोच के माध्यम से ही हम वस्तुओं की मानसिक तस्वीर बनाते हैं और उनकी कल्पना करते हैं।

स्थानिक सोच के परिणाम का एक प्रसिद्ध उदाहरण डबल हेलिक्स है, जो कुछ विशिष्ट आवश्यकताओं को पूरा करती है। यह एक जटिल 3-डी संरचना है जिसमें दो समान्तर लेकिन विस्थापित कुण्डलीनुमा शृंखला होती हैं।

स्थानिक सोच में क्या शामिल है? क्या यह एक ही कौशल है? या कई कौशलों का समूह है? इसमें निम्नलिखित बातें स्पष्ट रूप से शामिल हैं :

1. आवश्यक और महत्त्वपूर्ण जानकारी (दूरी, लम्बाई, निर्देशांक, विमाएँ) का सार निकालना।
2. किसी जटिल पृष्ठभूमि में स्थित किसी विशेष वस्तु पर ध्यान केन्द्रित करना, वस्तुओं के बीच सम्बन्धों पर ध्यान देना और उस जानकारी को अनदेखा करना जो कार्य के लिए अप्रासंगिक हो।
3. किसी डिज़ाइन (विभिन्न दृष्टिकोणों, अनुमान की समझ, ग्राफ़, नक़्शे) को प्रस्तुत करना।
4. किसी वस्तु के आकार को आनुपातिक रूप से बढ़ाना या घटाना या उसमें किसी तरह से बदलाव करना।
5. घूर्णन या सममिति की कल्पना करना।
6. एक वस्तु को एक बार मोड़ने या दो बार मोड़ने पर उसके स्वरूप में होने वाले परिवर्तन की कल्पना करना।
7. दिशा ढूँढ़ना (navigating)।
8. याद रखना, एकत्र करना और किसी ग़ायब कड़ी को जोड़ना (पूरा करना)।
9. निष्कर्ष निकालना, मूल्यांकन करना (चक्कर लगाने जैसे कार्यों के लिए)।

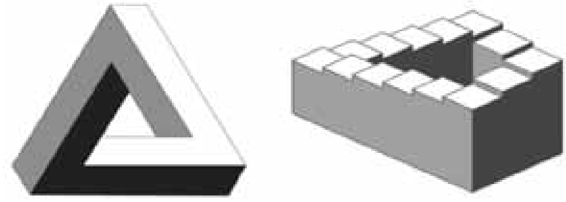
यह वह सोच है जिसमें स्थान की अवधारणा, प्रस्तुतीकरण के तरीक़े और तर्क की प्रक्रिया शामिल है।

स्थानिक सोच कितनी महत्त्वपूर्ण है?

मस्तिष्क के एमआरआई आधारित शोध से पता चला है कि मस्तिष्क का जो हिस्सा स्थानिक सोच से जुड़े कार्यों के दौरान सक्रिय होता है, वही हिस्सा गणित की समस्याओं को हल करते समय भी सक्रिय होता है। प्रशिक्षण और स्थानिक सोच से जुड़े कार्यों को करने के अवसर देकर इस सोच को बेहतर किया जा सकता है।

कई विशेषज्ञ अपने कार्य क्षेत्रों में स्थानिक सोच का उपयोग करते हैं। एक सिविल इंजीनियर या वास्तुकार इमारत डिज़ाइन करते समय इस कौशल का प्रयोग करता है। यही क्षमता एक सर्जन को मानव शरीर के भीतर मार्ग ढूँढ़ने और एक पायलट को विमान को उड़ाने में मदद करती है।

हालाँकि स्थानिक धारणा और स्थानिक समझ मनुष्यों की सोचने-विचारने की प्रक्रिया के लिए मूलभूत है, फिर भी यह कई मायनों में चुनौतीपूर्ण है। हमारी स्थानिक धारणा को काफ़ी आसानी से भ्रमित किया जा सकता है और ऐसी कई पहेलियाँ हैं जो वस्तुओं को समझने की हमारी क्षमता को चुनौती देती हैं। यहाँ दो ऐसे चौंकाने वाले उदाहरण दिए गए हैं।



चित्र-2

स्थानिक सोच को विकसित करना

प्राथमिक विद्यालय के स्तर पर ऐसी विभिन्न गतिविधियाँ की जाती हैं जो स्थानिक भाषा के उपयोग, दिशा बताने के लिए संकेत, सममिति पैटर्न, नक़्शों को पढ़ना और टेनग्राम के साथ खेलने से जुड़ी होती हैं। यह सभी 2-डी स्थान में स्थानिक सोच की क्षमताओं को विकसित करने के प्रयास का हिस्सा हैं।

इसी तरह 3-डी स्थान में स्थानिक सोच को विकसित करने के लिए 3-डी वस्तुओं के साथ काम करना, उनमें बदलाव करके देखना और उनका अध्ययन करना शामिल है। इस अध्ययन का एक महत्त्वपूर्ण हिस्सा 3-डी वस्तुओं के स्थान (स्थिति) और विमाओं (जैसे लम्बाई और आकार) को समझना और यह अध्ययन करना है कि विभिन्न वस्तुएँ एक-दूसरे से कैसे सम्बन्धित हैं। इसमें ब्लॉक या प्लास्टिसिन और क्ले से इन वस्तुओं का बनाना या जोड़ना, ऐसी संरचनाओं के जाल (net) का अध्ययन करना, काग़ज़ और पेंसिल से किए जाने वाले काम करना और ज्यामितीय सॉफ़्टवेयर का उपयोग करना शामिल है।

हालाँकि हम अपने दैनिक जीवन को व्यवस्थित करने के लिए उस स्थानिक समझ का उपयोग करते हैं जो हमने समय के साथ विकसित की है, लेकिन आज की दुनिया की जटिल स्थानिक समस्याओं से निपटने के लिए हमें जीआईएस या 'भौगोलिक सूचना प्रणाली' तकनीक का उपयोग करने की आवश्यकता होती है।

स्थानिक सोच को विभिन्न विषयों में शामिल किया जा सकता है क्योंकि यह कई क्षेत्रों में प्रासंगिक है। अलबत्ता, 3-डी सन्दर्भ में एक अलग इकाई के रूप में इसका अध्ययन करना अच्छा है। इसके अलावा, सम बहुफलकों (regular polyhedron) में ऐसी सुन्दरता होती है कि इनके अध्ययन को ज्यामिति पाठ्यचर्या का हिस्सा नहीं बनाना बहुत अफ़सोस की बात होगी।

दा विंची इतिहास के एक ऐसे व्यक्ति थे, जिनके पास विज़ुअलाइज़ेशन करने की ज़बरदस्त क्षमता थी। माइकल एंजेलो जैसे मूर्तिकार ने इस क्षमता का इस्तेमाल तब किया जब उन्होंने पत्थर के एक अनगढ़ टुकड़े में बनाई जा सकने वाली मूर्ति की कल्पना की।

नोट : विद्यार्थियों के विज़ुअलाइज़ेशन कौशल को विकसित करने के लिए ऐसी विभिन्न गतिविधियाँ सिलसिलेवार ढंग से करवाई जा सकती हैं जिनमें 3-डी वस्तुओं का उपयोग शामिल हो। इन गतिविधियों में कई छोटे कौशल शामिल हैं जैसे कि दिशा, स्थिति (orientation), स्थान, दूरी, आकार, रंग, आकृति और अन्य विशेषताओं का निर्धारण और तुलना करना। कुछ प्रारम्भिक गतिविधियों का उपयोग प्राथमिक विद्यालय में भी किया जा सकता है।

अधिक विकसित गतिविधियाँ परिप्रेक्ष्य (सन्दर्भ फ्रेम) बदलने, स्थिति बदलने (मानसिक घूर्णन), आकृतियों का स्वरूप बदलने, आकार बदलने, पूर्ण को स्थानान्तरित करने और भागों को पुन: संयोजित करने जैसे प्रमुख कौशलों का उपयोग करेंगी।

स्थानिक सोच में सम्बन्धों की कल्पना करना, एक स्केल से दूसरे स्केल पर बदलाव की कल्पना करना, किसी वस्तु को मानसिक रूप से घुमाकर उसके अन्य पक्षों को देखना, देखने का एक नया कोण या परिप्रेक्ष्य बनाना और स्थानों और जगहों में चित्रों को याद रखना शामिल है। स्थानिक सोच हमें इन क्रियाओं को मूर्त रूप में व्यक्त करने के मौक़े भी देती है, जैसे कि मानचित्र बनाना।

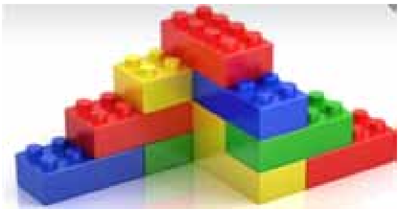
यह लेख सरल 3-डी गणितीय वस्तुओं पर ध्यान केन्द्रित करता है ताकि उनके गुणों की कल्पना करने और अमूर्तीकरण करने की क्षमता विकसित की जा सके।

गतिविधि 1

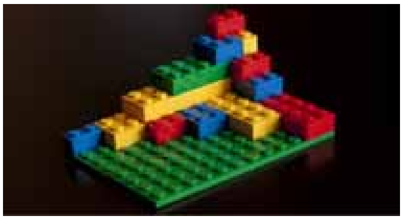
उद्देश्य : किसी दी गई 3-डी संरचना का एक मॉडल बनाना।
सामग्री : इंटरलॉकिंग क्यूब्स (आपस में जुड़ सकने वाले घन), क्यूब्स से बनाई गई कोई जटिल संरचना।

विद्यार्थियों को जोड़ियों में काम करने के लिए कहें। एक विद्यार्थी एक जटिल 3-डी संरचना बनाए। दूसरा विद्यार्थी उस संरचना को ध्यान से देखे और ठीक वैसी ही एक संरचना (जो आकार, रंग संयोजन और स्थिति में उसके साथी द्वारा निर्मित संरचना के समान हो) बनाए।

क्या वे स्थानिक भाषा (शीर्ष, बाएँ, समकोण पर, समान्तर,...) का उपयोग करके अपनी आकृति का वर्णन कर सकते हैं?



चित्र-3



चित्र-4

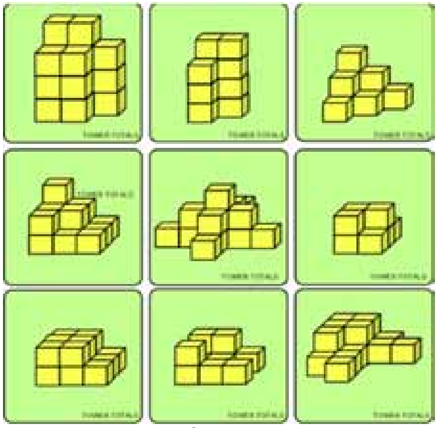
जटिल मॉडल बनाने से विद्यार्थियों को समस्या के सूक्ष्म पहलुओं पर ध्यान केन्द्रित करने में मदद मिलती है। उन्हें रंग और लम्बाई पर ध्यान देना चाहिए। साथ ही उन्हें भागों और पूर्ण व इनके बीच के सम्बन्धों को भी समझना चाहिए।

उन्हें कोणों और स्थिति (orientation) पर भी ध्यान देना चाहिए।

गतिविधि 2

उद्देश्य : 3-डी संरचना की तस्वीर का उपयोग करके एक मॉडल बनाना।

किसी चित्र को समझने, छिपे हुए घन की कल्पना करने और एक मॉडल को फिर से बनाने की क्षमता विद्यार्थी को स्थानिक समझ की प्रक्रिया के दूसरे स्तर पर ले जाती है।



चित्र-5

दिए गए मॉडलों की तस्वीरों को देखकर क्या विद्यार्थी ब्लॉक का उपयोग करके मॉडल को सटीक रूप से फिर से बना सकते हैं (यह मानते हुए कि इसका कोई भी हिस्सा ग़ायब नहीं है)?

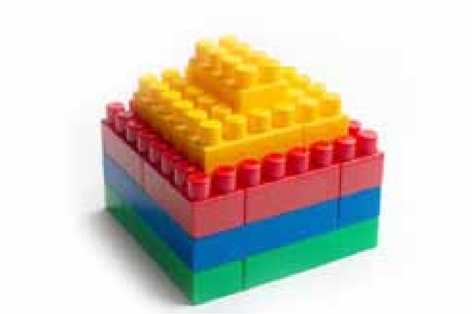
क्या वे इन मॉडलों को बनाने के पहले यह समझ सकते हैं कि प्रत्येक मॉडल के लिए कितने ब्लॉक की ज़रूरत होगी?

उनका तर्क कितना सही है?

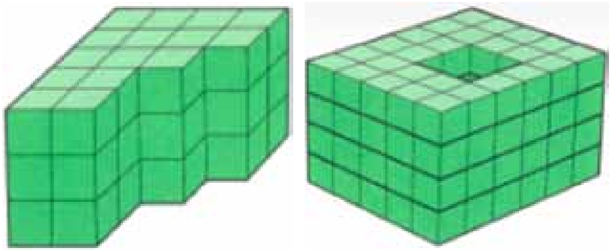
प्रत्येक मॉडल की ख़ास विशेषताएँ क्या हैं?

क्या यह ऊपर की ओर सँकरा होता है? क्या इसमें सममिति है?

क्या घुमाने पर भी यह ऐसा ही दिखेगा?



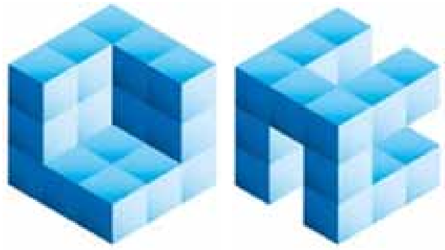
चित्र-6



चित्र-7

आधार की लम्बाई क्या है? आधार की चौड़ाई क्या है? इसके उच्चतम बिन्दु पर ऊँचाई कितनी है?

वे किसी अनियमित वस्तु (irregular object) का आयतन कैसे निकाल सकते हैं?



चित्र-8

क्या विद्यार्थी इन अनियमित मॉडलों के आयतन की गणना कर सकते हैं? वे कौन-कौन से अलग-अलग तरीक़े अपना सकते हैं?

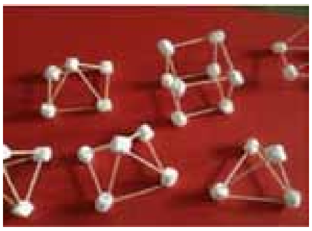
गतिविधि 3

उद्देश्य : प्लास्टिसिन/क्ले और स्ट्रॉ/टूथपिक्स से 3-डी संरचनाओं को बनाना।

सामग्री : स्ट्रॉ/टूथपिक्स और प्लास्टिसिन/क्ले, प्रिज़्म और पिरामिड को नाम सहित दर्शाने वाला चार्ट।

विद्यार्थियों को अलग-अलग 3-डी वस्तुएँ बनाने के लिए 3-डी संरचनाओं का निर्माण करने को कहें। यह काम उन्हें जोड़ियों में करने को कहें। उन्हें इन आकृतियों का अध्ययन करने और उनके शीर्ष, किनारों और फलकों के बारे में आँकड़े दर्ज करने को कहें।

चित्र-9



चित्र-10

विद्यार्थियों की जोड़ियाँ अपने निष्कर्षों को नीचे दी गई तालिका के रूप में दर्ज और संकलित कर सकती हैं :

वस्तु	शीर्ष	किनारे	फलक
एक वर्गाकार आधार वाला पिरामिड	5	8	5
त्रिकोणीय प्रिज़्म			
....			

अन्त में विद्यार्थियों को अपने निष्कर्षों पर चर्चा करनी चाहिए।

शीर्षों, किनारों और फलकों की संख्या एक-दूसरे से कैसे सम्बन्धित है? क्या इसमें कोई पैटर्न है?

विद्यार्थियों को इन वस्तुओं के पृष्ठीय क्षेत्रफल (surface area) को निकालने के तरीक़ों का पता लगाने को कहें; जैसे कि उनके जाल का उपयोग करना।

इन वस्तुओं का आयतन कैसे निकाला जा सकता है? क्या विद्यार्थी इस बारे में कुछ विचार प्रस्तुत कर सकते हैं?

परियोजना

पिरामिड ने कई सभ्यताओं को बहुत आकर्षित किया है। मिस्रवासियों ने इन्हें दफ़न करने के मकबरों के रूप में इस्तेमाल किया। ऐसा ही एक पिरामिड गीज़ा का महान पिरामिड है। यह लगभग 480 फीट ऊँचा व 750 फीट के आधार पर बना है और इसकी ढलान 50º है। विद्यार्थी इस पिरामिड का एक स्केल मॉडल बना सकते हैं और इसकी विशेषताओं का अध्ययन कर सकते हैं।

यदि आप पिरामिड के आधार के चारों ओर चलें, तो आप कुल कितनी दूरी चलेंगे?

यदि पिरामिड को क्षैतिज रूप से आधे में काटा जाए तो कौन-सी आकृति उभरेगी? यदि इसे शीर्ष से लम्बवत काटा जाए तो कौन-सी आकृति उभरेगी?

चित्र-11

गतिविधि 4

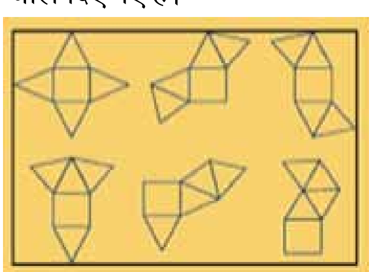
उद्देश्य : सरल 3-डी वस्तुओं के लिए जाल बनाना।

सामग्री : प्रिज़्म और पिरामिड जैसी आकृति वाली वस्तुएँ।

चित्र-12

यदि विद्यार्थियों को 3-डी वस्तुओं की कुछ तस्वीरें दी जाएँ तो क्या वे उनके जाल बना सकते हैं?

यहाँ एक वर्ग पिरामिड (square pyramid) के कुछ सम्भावित जाल दिए गए हैं।

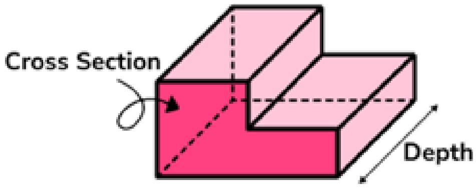


चित्र-13

विद्यार्थियों को पिरामिड और प्रिज़्म के बीच के अन्तर को स्पष्ट रूप से समझना ज़रूरी है। पिरामिड में एक नुकीला सिरा होता है। इसके तिरछे किनारे इसे बहुभुज आधार के सभी शीर्षों से जोड़ते हैं। इसका आधार एक त्रिभुज हो सकता है, जिससे चतुष्फलक (tetrahedron) बनता है। इसका आधार एक वर्ग हो सकता है, जिससे वर्ग पिरामिड बनता है; या यह पंचभुज, या षटभुज,... हो सकता है। इस तरह पिरामिड के अनगिनत प्रकार हैं। पिरामिड के आधार की भुजाओं की संख्या की कोई सीमा नहीं है।

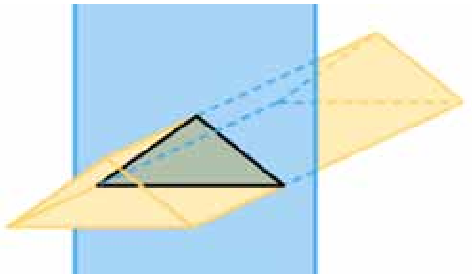
प्रिज़्म के दोनों सिरों पर एक ही फलक होती है। फलक की भुजाओं की संख्या 3 से लेकर किसी भी संख्या तक हो सकती है।

विद्यार्थियों के मन में प्रिज़्म को लेकर एक स्थाई धारणा होती है क्योंकि वे प्रिज़्म को मुख्यत: भौतिकी की प्रयोगशाला में देखते हैं। हालाँकि, प्रिज़्म का आधार बहुभुजाओं वाला हो सकता है। यहाँ तक कि यह अक्षर एल (L) की आकृति का भी हो सकता है जैसा कि यहाँ दिखाया गया है।



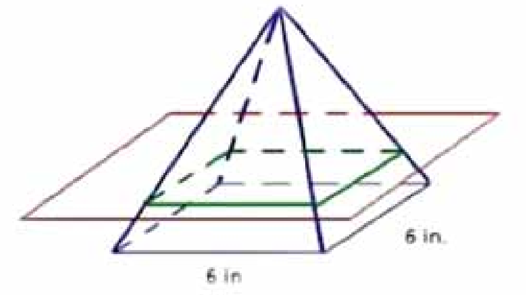
चित्र-14

प्रिज़्म को किसी एक भुजा के समान्तर परतों में काटा जा सकता है और सभी परतें बिल्कुल एक जैसी होंगी (चित्र देखें)।



चित्र-15

इसके विपरीत, एक पिरामिड को ऐसी परतों में नहीं काटा जा सकता है जो एक-दूसरे के समान हों। चित्र में दिखाया गया हरा वर्ग पिरामिड के आधार के समान नहीं है।



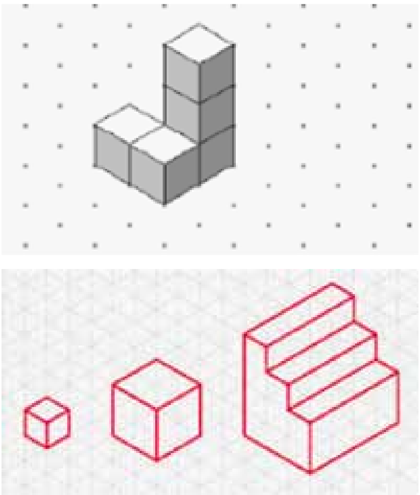
चित्र-16

गतिविधि 5

उद्देश्य : समदूरीक/त्रिभुजीय बिन्दुकित काग़ज़ पर 3-डी वस्तुओं या संरचनाओं के चित्र बनाना।

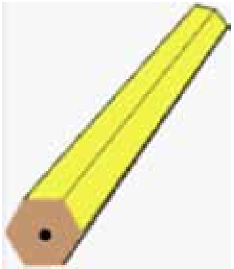
विद्यार्थियों को समदूरीक काग़ज़ (isometric paper) पर विभिन्न ठोस वस्तुओं के समदूरीक चित्र (isometric sketches) बनाने के लिए कहें।

यहाँ पर ऐसे दो समदूरीक चित्र दिए गए हैं :

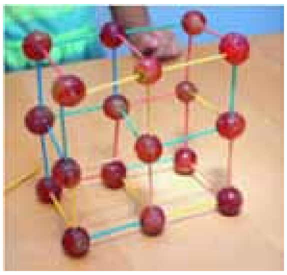


चित्र-17

विद्यार्थी विभिन्न प्रकार की संरचनाओं का निर्माण कर सकते हैं और उन्हें बिन्दुकित काग़ज़ पर बना सकते हैं। 3-डी वस्तुओं को 2-डी के रूप में दर्शाने का कौशल धीरे-धीरे विकसित करना होगा और इसके लिए विद्यार्थियों को मार्गदर्शन व सहायता की ज़रूरत होगी।

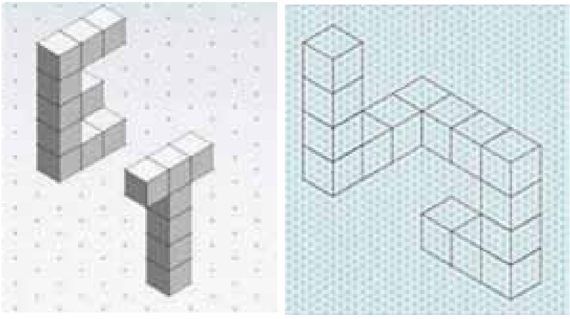


चित्र-18



चित्र-19

समदूरीक चित्र बनाने के बाद विद्यार्थियों को वस्तु के साथ उसकी तुलना करनी चाहिए ताकि यह सुनिश्चित किया जा सके कि दोनों बिल्कुल मेल खाते हैं। यहाँ कुछ और जटिल उदाहरण दिए गए हैं :

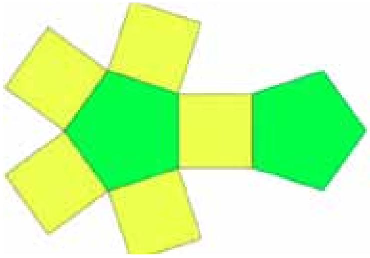


चित्र-20

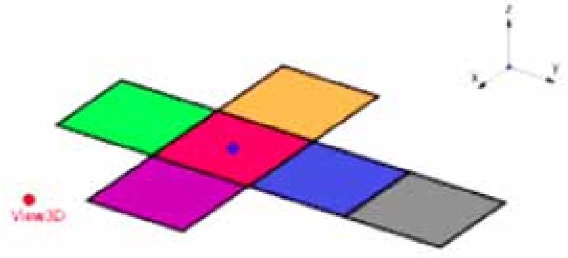
गतिविधि 6

उद्देश्य : जालों से आकृतियों की कल्पना करना।
सामग्री: रंगीन पैटर्न या नम्बरिंग वाले अलग-अलग जाल।

यदि इस जाल को मोड़ दिया जाए तो वस्तु किस आकृति की होगी? उत्तर प्राप्त करने के लिए विद्यार्थियों को प्रिज़्म के मोड़े जाने की मानसिक तस्वीर बनानी होगी।



चित्र-21

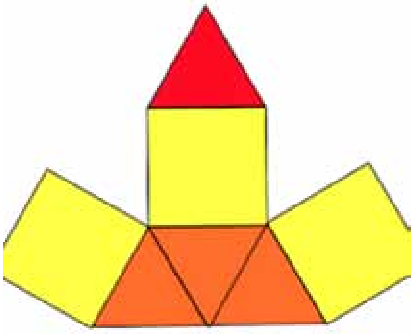


चित्र-22

ऐसा करते समय, उन्हें विभिन्न रंगीन सतहों की सापेक्ष स्थितियों पर ध्यान देना होगा। जैसे कि पंचभुज के सामने कौन-सी आकृति होगी?

यदि **चित्र-22** में दिए गए जाल को मोड़ा जाए, तो गुलाबी वर्ग के सामने कौन-से रंग का वर्ग होगा? हरे वर्ग से सटे कौन-से रंग के वर्ग होंगे?

चित्र-23 में दिए गए जाल से कौन-सी आकृति बनेगी?



चित्र-23

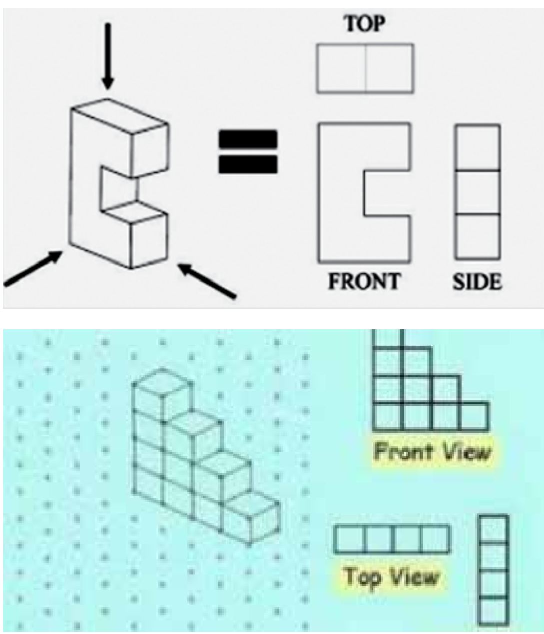
गतिविधि 7

उद्देश्य : दो वस्तुओं का उपयोग करके सरल 3-डी संरचनाओं के विभिन्न दृश्यों के चित्र बनाना।

सामग्री : एक-दूसरे से सटाकर रखे गए कुछ ब्लॉक।

ऊपर के दृश्य (top view), सामने के दृश्य (front view) और पार्श्व दृश्य (side view) का चित्र बनाना एक कौशल है जो धीरे-धीरे विकसित होता है। यह महत्त्वपूर्ण है कि शुरुआत कुछ सरल वस्तुओं से की जाए। (नोट : समदूरीक चित्र समदूरीक बिन्दुकित काग़ज़ पर बनाए जाते हैं, जैसा कि ऊपर दिखाया गया है; जबकि इन दृश्यों के चित्रों को आमतौर पर वर्ग या आयतों वाली ग्रिड शीट पर बनाया जाता है।)

यहाँ कुछ चित्र उदाहरण के रूप में दिए गए हैं।

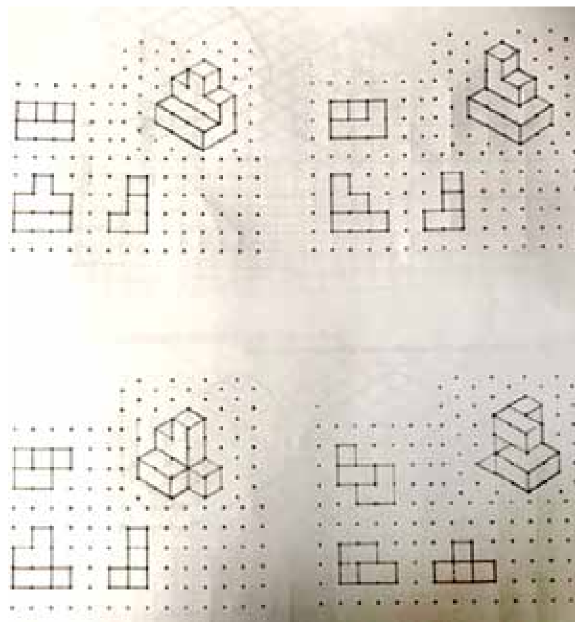


चित्र-24

विद्यार्थियों को इसे ऊपर से देखने और ऊपर के दृश्य का चित्र बनाने के लिए कहें। इसके बाद सामने के दृश्य का चित्र और पार्श्व दृश्य का चित्र बनाया जा सकता है। चित्र बनाने की इस प्रक्रिया में सहायता के लिए वे समदूरीक काग़ज़ या वर्गों वाले ग्रिड पेपर का उपयोग कर सकते हैं।

चित्र-25

संरचना की जटिलता को धीरे-धीरे बढ़ाया जा सकता है। बिन्दुकित काग़ज़ पर बनाए गए चित्रों के कुछ और उदाहरण **चित्र-26** में दिखाए गए हैं।



चित्र-26

दृश्य

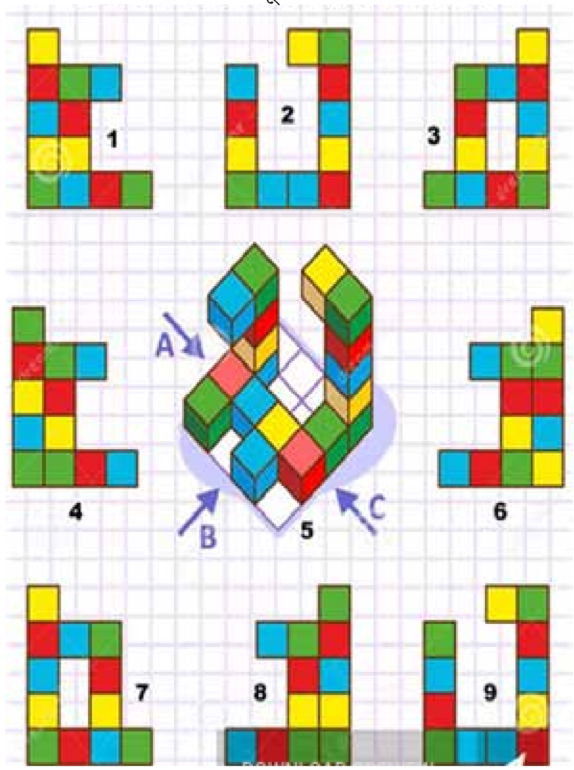
वे यहाँ दिखाई गई घन संरचनाओं के विभिन्न दृश्यों का अध्ययन कर सकते हैं।

रूबिक क्यूब इस तरह के चित्रों के लिए एक बहुत अच्छा मॉडल होगा। इस पर आधारित कई मिलान अभ्यास तैयार किए जा सकते हैं।

चुनौती !

8 एक समान घनों से बनी एक ऐसी संरचना का निर्माण करें जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल सबसे ज़्यादा हो।

क्या आप यह पता लगा सकते हैं कि घन संरचना 5 के A,B,C साइड व्यू कैसे दिखेंगे?



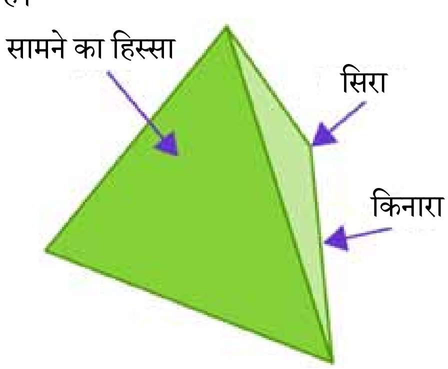
चित्र-27

गतिविधि 8

उद्देश्य : बहुफलक और सम बहुफलक को समझना।
सामग्री : विभिन्न आकारों की 3-डी गणितीय वस्तुएँ या विभिन्न 3-डी गणितीय वस्तुओं के चित्रों वाला चार्ट।
शब्दावली : फलक, किनारे, शीर्ष, बहुभुज, बहुफलक, सम (regular), उत्तल (convex)

दी गई वस्तुओं (या उनके चित्रों) को दो समूहों में बाँटने पर चर्चा की शुरुआत करें। विद्यार्थी घुमावदार सतह और सपाट सतह के आधार पर उन्हें बाँट सकते हैं।

चर्चा करें कि बहुत सारी फलकों वाली किसी वस्तु को बताने के लिए 'बहुफलक' शब्द का उपयोग क्यों किया जाता है।



चित्र-28

'बहु'(Poly) शब्द का मतलब है *बहुत* और 'फलक' (hedra) शब्द फलकों के बारे में बताता है। इसलिए बहुफलक (polyhedra) का अर्थ है 'बहुत-सी फलकों वाली वस्तु'। (इसी तरह बहुभुज शब्द भी बहुत-से कोणों वाली आकृति को बताता है।)

बहुफलक वे वस्तुएँ होती हैं जो 3-डी होती हैं, जिनमें बहुभुजीय समतलीय फलकें, सीधे किनारे और शीर्ष होते हैं जहाँ तीन या अधिक फलकें आपस में मिलती हैं। हम केवल *उत्तल बहुफलक* (convex polyhedra) पर विचार करेंगे; इनमें न तो सतह पर कोई धँसाव (indentations) होते हैं, न छेद।

घन और प्रिज़्म बहुफलक के उदाहरण हैं। बेलन और गोले बहुफलक नहीं होते हैं।

क्या अब विद्यार्थी बहुफलक को विभिन्न श्रेणियों में बाँटने

का प्रयास कर सकते हैं? वे इस बात पर ध्यान देंगे कि प्रिज़्म और पिरामिड के अलावा अन्य वस्तुएँ भी हैं जो बहुफलक हैं।

वे देखेंगे कि इनमें से कुछ वस्तुएँ बहुत ज़्यादा सममित हैं : हर फलक और हर शीर्ष से देखने पर वे समान दिखाई देती हैं। उनकी फलकें सर्वांगसम (congruent) सम बहुभुज होती हैं। ये *सम बहुफलक* (regular polyhedra) हैं। इन्हें *प्लेटोनिक ठोस* (platonic solid) के नाम से भी जाना जाता है।

एक बहुफलक कई मायनों में सम नहीं हो सकता है। उदाहरण के लिए, हो सकता है कि उसकी सभी फलकें सर्वांगसम न हों। बजाय इसके, उसकी फलकें सम बहुभुज हों जिनमें भुजाओं की संख्या अलग-अलग हो (ऐसे कई बहुफलक हैं, जो दिखने में अत्यधिक सममित हैं)। या फिर हो सकता है कि बहुफलक उत्तल न हो, यानी कि उसमें धँसाव हों।

(**नोट :** यहाँ बहुफलकीय कोणों की धारणा पर बात करने की ज़रूरत नहीं है।)

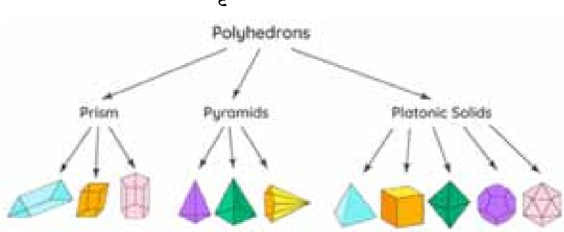
चर्चा करें, प्रयोग करें और खोजें : ऐसे प्रश्न पूछें जो विद्यार्थियों को यह खोजने में मदद करें कि एक बन्द आकृति बनाने के लिए न्यूनतम 3 फलकों को एक शीर्ष पर मिलना चाहिए।

एक शीर्ष पर कितने समबाहु त्रिभुज मिल सकते हैं?

विद्यार्थी देखेंगे कि यदि एक शीर्ष पर छह समबाहु त्रिभुज मिलते हैं, तो त्रिभुज समतल हो जाएँगे। क्या वे बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है?

एक शीर्ष पर कितने वर्ग मिल सकते हैं? एक शीर्ष पर कितने सम पंचभुज मिल सकते हैं? क्या समषटभुज एक शीर्ष पर मिल सकते हैं? क्यों या क्यों नहीं?

यह प्रक्रिया इस खोज की ओर ले जा सकती है कि एक उत्तल 3-डी बहुफलक के किसी भी शीर्ष पर सभी कोणों का योग हमेशा 360 डिग्री से कम होगा। क्या वे इस परिणाम को सामान्यीकृत कर सकते हैं?



चित्र-29

वस्तुओं को घुमाना

शुरुआत में विद्यार्थियों को किसी वस्तु को घुमाने के लिए स्पष्ट निर्देश दिए जाने चाहिए। वे पहले भौतिक रूप से वस्तुओं को घुमाकर प्रक्रिया की शुरुआत करेंगे।

दूसरे चरण में, वे अपने मन की आँखों का उपयोग करके यानी कल्पना करके वस्तु को घुमाने का प्रयास करेंगे।

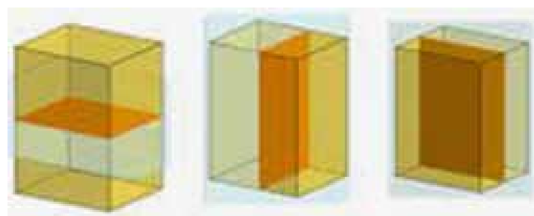
यदि वस्तु को 45°, 90° या 120° से झुकाया जाए तो वह कैसी दिखाई देगी?

विद्यार्थियों को घुमाई गई वस्तुओं की जोड़ियों की कुछ तस्वीरें दें।

फिर उनसे पूछें : क्या ये दोनों वस्तुएँ अलग हैं? या क्या ये वास्तव में एक ही हैं, केवल अलग-अलग स्थिति (orientation) में रखी गई हैं?

इन वस्तुओं पर रंग करके या पैटर्न बनाकर इन्हें एक कलाकृति के रूप में बनाना बहुत मज़ेदार है।

तल सममिति (Plane symmetry) और घूर्णन सममिति (Rotational symmetry)



चित्र-30

उदाहरणों के साथ तल सममिति पर चर्चा करें।

किसी आकृति में *तल सममिति* होती है यदि उसे एक तल द्वारा दो हिस्सों में इस तरह विभाजित किया जा सके कि प्रत्येक आधा हिस्सा दूसरे का प्रतिबिम्ब हो।

ऐसे तल को *सममिति तल* (*plane of symmetry*) कहते हैं।

एक घनाभ में ऐसे 3 सममित तल होते हैं।

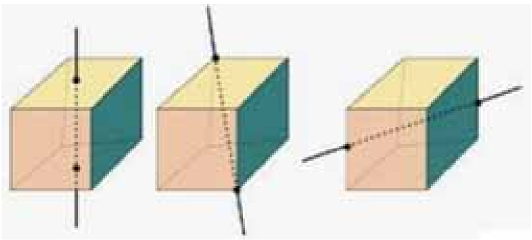
एक घन में कितने सममित तल होते हैं?

उदाहरणों के साथ *घूर्णन सममिति* पर चर्चा करें।

इसके लिए हम कुछ व्यावहारिक मॉडलों को इस्तेमाल करने की सलाह देंगे, जैसे कि काग़ज़ के मॉडलों की फलकों या कोनों में छेद करके उसमें एक स्ट्रॉ (या खिंचा हुआ धागा या तार) डालना।

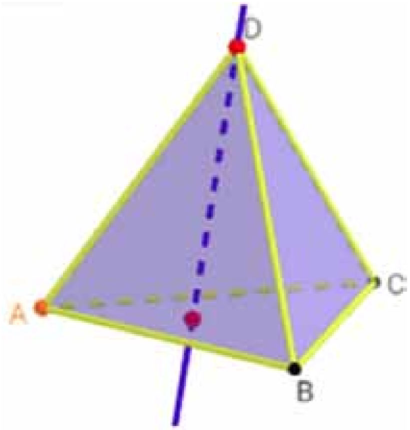
यदि किसी 3-डी आकृति को एक निश्चित रेखा के चारों ओर घुमाया जाता है, तो इसे घूर्णन कहा जाता है।

जो वस्तुएँ एक निश्चित मात्रा में घूर्णन के बाद समान दिखाई देती हैं, उनमें घूर्णन सममिति होती है।



चित्र-31

घूर्णन सममिति को 'क्रम' (order) के रूप में मापा जाता है। जब आमने-सामने की फलकों के केन्द्रों को जोड़ने वाले अक्ष के चारों ओर घन जैसी किसी वस्तु को 360° पर घुमाया जाता है, तो चार स्थितियों में घन वैसा ही दिखाई देता है जैसा कि वह शुरुआत में था। यह चार स्थितियाँ 90°, 180°, 270° और 360° के घूर्णन के बाद आती हैं। इसलिए इसे क्रम 4 की घूर्णन सममिति कहा जाता है। जिस अक्ष पर इसे घुमाया जाता है, उसे घूर्णन सममिति का अक्ष कहते हैं। एक त्रिकोणीय पिरामिड की घूर्णन सममिति का क्रम 3 होगा, क्योंकि यह 120°, 240° और 360° के घूर्णन के बाद अपनी मूल स्थिति में आ जाता है।



चित्र-32

गतिविधि 9

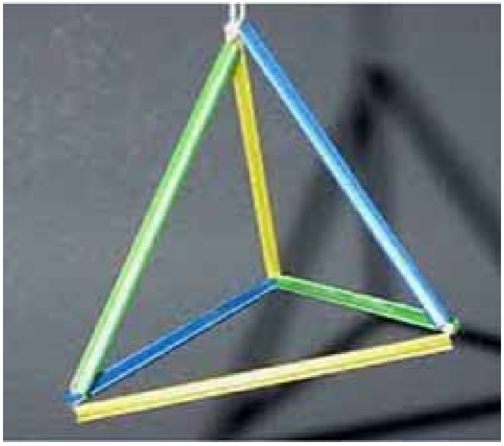
उद्देश्य : सम बहुफलक (चतुष्फलक - tetrahedron) का अध्ययन करना।

सामग्री : स्ट्रॉ और प्लास्टिसिन/धागा।

इस प्रकार, सम बहुफलक का अध्ययन करने का मुख्य कारण अभी भी वही है जो पाइथागोरस के समय पर था, और वह कारण यह है कि उनकी सममित आकृतियाँ आपकी कलात्मक भावना को आकर्षित करती हैं।

–एच. एस. एम. कॉक्सेटर

समबाहु त्रिभुजों से ऐसी कौन-सी बन्द संरचना बनाई जा सकती है जिसके प्रत्येक शीर्ष पर 3 त्रिभुज जुड़े हुए हों?



चित्र-33

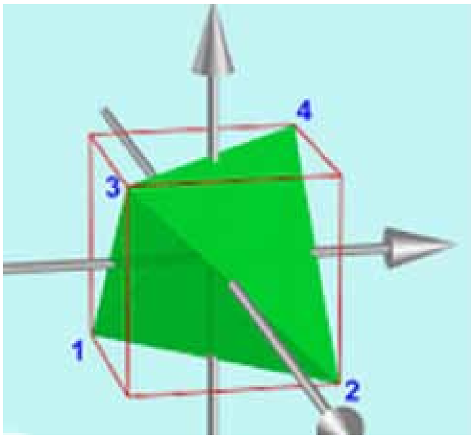
विद्यार्थियों को स्ट्रॉ का उपयोग करके एक शीर्ष पर 3 समबाहु त्रिभुज बनाने को कहें।

वे देखेंगे कि उन्होंने एक सम चतुष्फलक (4 फलकों वाले बहुफलक) बनाया है।

क्या इससे एक बन्द आकृति बनती है?

सिद्ध करें कि प्रत्येक शीर्ष पर 3 त्रिकोणीय फलकें हैं।

इसमें किस प्रकार की सममिति होती है?



चित्र-34

क्या इसमें तल सममिति है? इनसे गुज़रने वाला तल कौन-सा होगा? एक सम चतुष्फलक में आप ऐसे कितने तल ढूँढ़ सकते हैं?

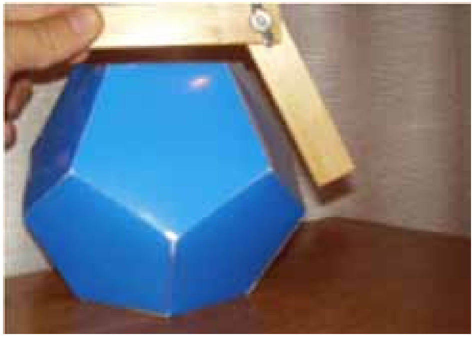
जाल : विद्यार्थियों को चतुष्फलक के लिए जाल बनाने के लिए प्रेरित करना चाहिए। वे जाल बना सकते हैं और उसे मोड़कर एक ठोस आकृति बना सकते हैं।

घूर्णन सममिति की जाँच करने के लिए इसमें छेद करके स्ट्रॉ (या तार या तना हुआ धागा) डालें।

क्या इसमें कोई घूर्णन सममिति है? सममिति का अक्ष किन बिन्दुओं से होकर गुज़रता है?

इसका क्रम क्या होगा?

डायहेड्रल मीटर (एल-आकृति का एक लचीला कोण मापक) का उपयोग डायहेड्रल कोणों (वह कोण जिस पर आसन्न फलकें मिलती हैं) को मापने के लिए किया जा सकता है। विद्यार्थियों को ऐसे उपकरण बनाने में सक्षम होना चाहिए।



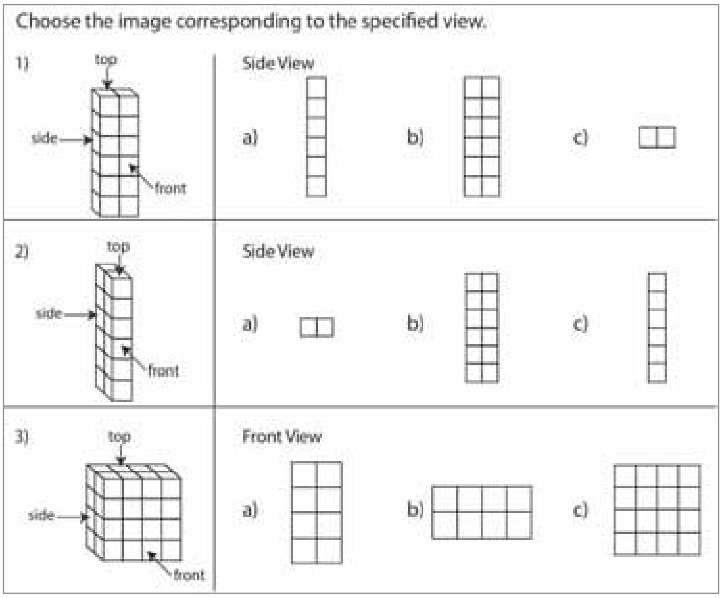
चित्र-35

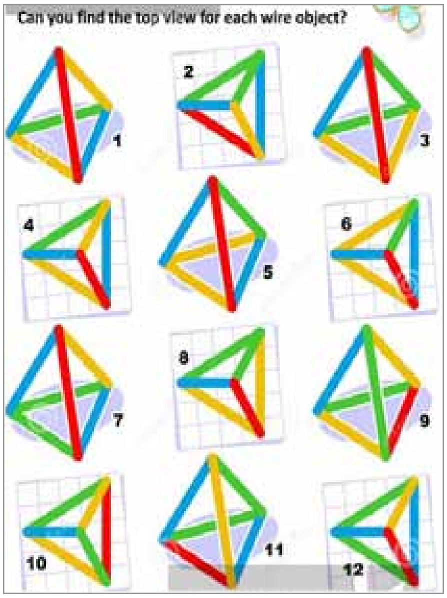
चित्र-35 में इसका उपयोग एक द्वादशफलक (dodecahedron) की फलकों के बीच के कोण को मापने के लिए किया जा रहा है।

विद्यार्थी विभिन्न प्रकार से ऐसी वस्तुओं की पड़ताल कर सकते हैं और इन पड़तालों में अलग-अलग कौशल उपयोग कर सकते हैं :

- वे डायहेड्रल मीटर का उपयोग करके पृष्ठों के बीच के कोणों को माप सकते हैं।
- वे पृष्ठीय क्षेत्रफल और भुजाओं के बीच के सम्बन्ध का अध्ययन कर सकते हैं।
- वे वस्तु के अलग-अलग दृश्य पैदा कर सकते हैं और उनके चित्र बना सकते हैं।

ऑनलाइन ऐसे कई संसाधन उपलब्ध हैं जो उनके कौशल और ज्ञान को पुख्ता कर सकते हैं। (उदाहरण के लिए, **चित्र-36**)।

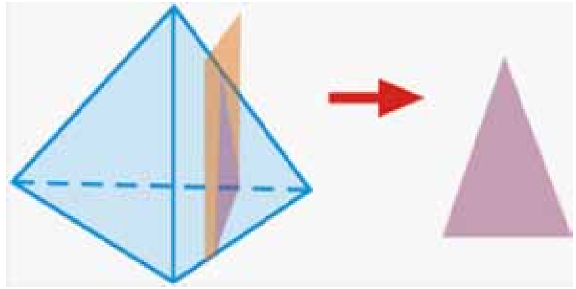




चित्र-36

वैकल्पिक अन्वेषण

अनुप्रस्थ काट (Cross section) : विद्यार्थी वस्तुओं की क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर अनुप्रस्थ काट की भी पड़ताल कर सकते हैं।



गतिविधि 10

उद्देश्य : सम बहुफलक (घन) का अध्ययन करना।
सामग्री : स्ट्रॉ और प्लास्टिसिन/धागा।

एक समान वर्गों का उपयोग करके ऐसी कौन-सी बन्द संरचना बनाई जा सकती है जिसमें प्रत्येक शीर्ष पर 3 वर्ग जुड़े हुए हों?

चित्र-38

विद्यार्थियों को स्ट्रॉ का उपयोग करके 3 जुड़े हुए वर्ग बनाने को कहें, जो एक कोने जैसी संरचना तैयार करें। फिर उन्हें इस संरचना में और वर्ग जोड़ने को कहें, यह ध्यान में रखते हुए कि प्रत्येक शीर्ष पर तीन वर्ग मिलते हों।

वे देखेंगे कि इस तरह उन्होंने एक षटफलक (घन) बनाया है।

क्या इससे एक बन्द आकृति बनती है? सिद्ध करें कि प्रत्येक शीर्ष पर 3 वर्गाकार फलकें हैं।

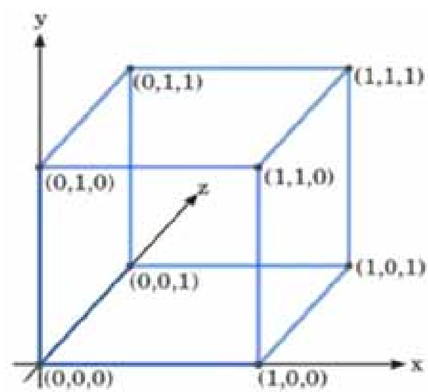
वे इसकी पड़ताल कर सकते हैं और घन के किनारों, पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन के बीच के सम्बन्ध की खोज कर सकते हैं।

वे भुजा और किसी आन्तरिक विकर्ण के बीच एवं भुजा और किसी भी फलक के विकर्ण के बीच के सम्बन्ध की पड़ताल भी कर सकते हैं।

क्या घन में कोई तल सममिति है?

क्या इसमें कोई घूर्णन सममिति है? सममिति का अक्ष किन बिन्दुओं से होकर गुज़रता है?

वे निर्देशांकों की अपनी समझ को 3-डी वस्तुओं पर लागू कर सकते हैं और विभिन्न बिन्दुओं का निर्देशांकों के रूप में वर्णन कर सकते हैं।



चित्र-39

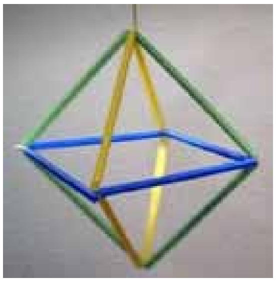
वे घन के लिए एक जाल बना सकते हैं और उसे मोड़कर एक ठोस आकृति बना सकते हैं।

गतिविधि 11

उद्देश्य : सम बहुफलक (अष्टफलक - octahedron) का अध्ययन करना।

सामग्री : स्ट्रॉ और प्लास्टिसिन/धागा।

समबाहु त्रिभुजों से ऐसी कौन-सी बन्द संरचना बनाई जा सकती है जिसमें हर शीर्ष पर 4 त्रिभुज जुड़े हुए हों?



चित्र-40

विद्यार्थियों को एक शीर्ष पर चार समबाहु त्रिभुज बनाने के लिए कहें। फिर उन्हें इस संरचना में और त्रिभुज जोड़ने को कहें, यह ध्यान में रखते हुए कि प्रत्येक शीर्ष पर चार त्रिभुज मिलते हों।

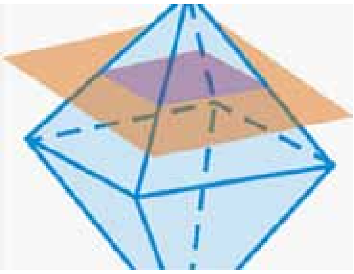
इस तरह एक सम अष्टफलक बन गया है। सिद्ध करें कि प्रत्येक शीर्ष पर 4 फलकें मिलती हैं।

क्या इसमें कोई तल सममिति है?

क्या इसमें कोई घूर्णन सममिति है? सममिति का अक्ष किन बिन्दुओं से होकर गुज़रता है? एक सम अष्टफलक में सममिति के कितने अक्ष होते हैं?

अनुप्रस्थ काट

एक अष्टफलक की अनुप्रस्थ काट (ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज) कैसी दिखाई देती हैं?



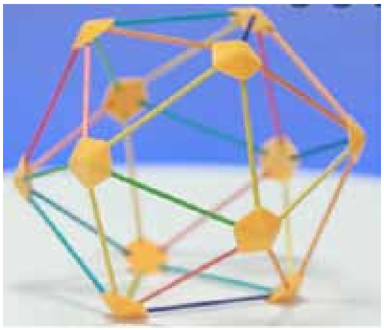
चित्र-41

गतिविधि 12

उद्देश्य : सम बहुफलक (आइकोसाहेड्रन - icosahedron) का अध्ययन करना।

सामग्री : स्ट्रॉ और प्लास्टिसिन/धागा।

समबाहु त्रिभुजों से ऐसी कौन-सी बन्द संरचना बनाई जा सकती है, जिसमें हर शीर्ष पर 5 त्रिभुज जुड़े हुए हों?



चित्र-42

विद्यार्थियों को 5 समबाहु त्रिभुजों को बनाने व उन्हें एक साथ जोड़कर एक उत्तल आकृति बनाने के लिए कहें। अगले चरणों में, हर नए शीर्ष पर वे 3 और समबाहु त्रिभुज जोड़ें, जैसा कि **चित्र 42** में दिखाया गया है।

चित्र-43

अन्त में यह आकृति एक आइकोसाहेड्रन का रूप ले लेती है।

इस संरचना में सममिति की जाँच करें।

मॉड्युलर ओरिगेमी का उपयोग करके एक आइकोसाहेड्रन (वास्तव में, किसी भी सम बहुफलक को बनाना) को बनाना बहुत मज़ेदार हो सकता है (**चित्र-43** देखें)।

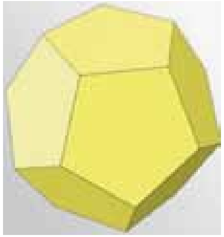
गतिविधि 13

उद्देश्य : सम बहुफलक का अध्ययन (द्वादशफलक - dodecahedron) करना।

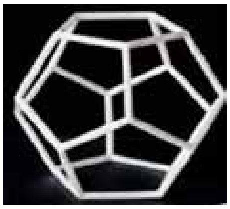
सामग्री : स्ट्रॉ और प्लास्टिसिन/धागा।

सम पंचभुजों से ऐसी कौन-सी बन्द संरचना बनाई जा सकती है, जहाँ हर शीर्ष पर 3 पंचभुज जुड़े हुए हों?

विद्यार्थियों को एक सम पंचभुज बनाने और इसकी सभी भुजाओं पर 5 सम पंचभुजों को जोड़ने के लिए कहें।



चित्र-44



चित्र-45

तीन पंचभुजों को एक साथ जोड़कर एक बहुफलक का शीर्ष बनाया जा सकता है, लेकिन चार पंचभुजों को एक साथ जोड़ने पर शीर्ष कोण 360° से अधिक हो जाता है और एक अवतल शीर्ष बन जाता है।

आगे के चरणों में, हर नए शीर्ष पर पाँच और पंचभुज जोड़ें, जैसा कि **चित्र 44-45** में दिखाया गया है। अन्त में यह आकृति द्वादशफलक का रूप ले लेती है।

निष्कर्ष

कितने सम बहुफलक बनाए जा सकते हैं?

हमने देखा कि सम बहुफलक बनाना सम्भव है जब हर शीर्ष पर 3 या 4 या 5 समबाहु त्रिभुज मिलते हैं, लेकिन 6 त्रिभुजों के मिलने पर यह सम्भव नहीं है। सम बहुफलक बनाना सम्भव है जब हर शीर्ष पर 3 वर्ग मिलते हैं, लेकिन 4 वर्गों के मिलने पर यह सम्भव नहीं है। इसी तरह हर शीर्ष पर 3 सम पंचभुजों के मिलने पर यह सम्भव है, लेकिन 4 या इससे अधिक पंचभुजों के मिलने पर यह सम्भव नहीं है।

क्या केवल सम षटभुजों का उपयोग करके उत्तल आकृति बनाना सम्भव है? तीन सम षटभुज के कोण 360° के होते हैं जिससे एक सपाट शीर्ष बनता है। इसलिए, यह सम्भव नहीं है।

क्या केवल 6 से अधिक भुजाओं वाले सम बहुभुजों का उपयोग करके एक उत्तल आकृति बनाना सम्भव है? 6 से अधिक भुजाओं वाले बहुभुजों के कोण 120° से अधिक होते हैं, इसलिए ऐसे तीन बहुभुजों को एक शीर्ष पर एक साथ नहीं जोड़ा जा सकता। इसलिए, यह भी सम्भव नहीं है।

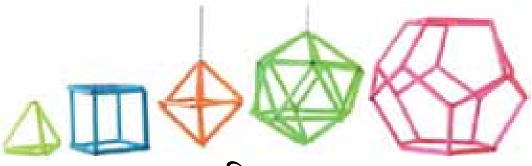
इसलिए केवल 5 सम ठोस (regular solid) बनाए जा सकते हैं।

अब विद्यार्थी इन पाँच सम बहुफलकों के लिए एक तालिका बना सकते हैं जिसमें इनकी फलकों, किनारों और शीर्ष की संख्या को रिकॉर्ड कर सकें और प्रत्येक प्लेटोनिक ठोस पदार्थों की फलकों का वर्णन कर सकें।

बहुफलक का नाम	फलक(F) शीर्ष (V)	किनारे (E)	चतुष्फलक
चतुष्फलक	4	4	6

विद्यार्थी अब उस सम्बन्ध को सिद्ध कर सकते हैं जो उन्होंने पहले एक बहुफलक संरचना के शीर्षों, फलकों और किनारों के बीच देखा था।

यह यूलर का सूत्र है : $F + V = E + 2$ जहाँ F, V और E क्रमश: बहुफलक की फलकों, शीर्षों और किनारों की संख्या को दर्शाते हैं।



चित्र-45

References

- Teaching Mathematics with Art (ldlewis.com)
- Make Space: The Importance of Spatial Thinking for Learning Mathematics · Frontiers for Young Minds (frontiersin.org)
- How to teach ... 3D shapes | Teacher Network | The Guardian

आभार :

इस लेख के लिए मिले फीडबैक और सुझावों हेतु मैं सुश्री स्वाती सरकार की आभारी हूँ।

पद्मप्रिया शिराली

पद्मप्रिया शिराली सह्याद्रि स्कूल (पुणे) और ऋषि वैली (आन्ध्र प्रदेश) में स्थित कम्युनिटी मैथ सेंटर में 1983 से काम कर रही हैं। यहाँ वह विभिन्न विषय पढ़ाती रही हैं, जैसे कि गणित, कम्प्यूटर अनुप्रयोग, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू। 1990 के दशक में, उन्होंने चेन्नई के प्रसिद्ध गणित शिक्षक स्वर्गीय श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ मिलकर काम किया था। वह उस टीम का हिस्सा थीं जिसने ऋषि वैली रूरल सेंटर के मल्टीग्रेड एलिमेंट्री लर्निंग प्रोग्राम को बनाया था। इस प्रोग्राम को 'स्कूल इन ए बॉक्स' के नाम से जाना जाता है। पद्मप्रिया से padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

यह अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय तथा कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेंटर, ऋषि वैली की संयुक्त पत्रिका Azim Premji University At Right Angles (a resource for school mathematics) जुलाई 2022 में प्रकाशित Spatial Thinking With 3-D Objects का हिन्दी अनुवाद है।

अनुवाद : निदेश सोनी

पुनरीक्षण एवं कॉपी एडीटिंग : कविता तिवारी

सम्पादन : राजेश उत्साही