At Right Angles
A Resource for School Mathematics

संख्या आधार

पद्मप्रिया शिराली

Azim Premji University

A publication of Azim Premji University
together with Community Mathematics Centre,
Rishi Valley

संख्या आधार

विद्यार्थी अपनी स्कूली शिक्षा के पहले सात वर्षों के दौरान दशमलव पद्धति (Decimal number system) में संख्याओं को गिनना, पढ़ना और लिखना सीखते हैं। वे एनालॉग घड़ियों को पढ़ना और रोमन अंकों का उपयोग करना भी सीखते हैं। साथ ही उनका परिचय फुट, दर्जन और पाउण्ड जैसे शब्दों से भी हो सकता है।

यदि आप चाहते हैं कि विद्यार्थी दशमलव आधार पद्धति (decimal base system) को अच्छी तरह समझ पाएँ, तो यह ज़रूरी है कि उन्हें बाइनरी और हेक्साडेसिमल जैसी अन्य संख्या आधार वाली पद्धतियों से अवगत कराया जाए। साथ ही उन्हें रोमन संख्या पद्धति जैसी ग़ैर-स्थानिक (non-positional system) पद्धतियों में कुछ संक्रिया करने के अवसर भी दिए जाने चाहिए।

इस अभ्यास के माध्यम से विद्यार्थी स्थानिक पद्धति (positional system) की मूल संरचना और अन्य संख्या आधार वाली पद्धतियों में इसके उपयोग को समझने लगते हैं। इससे उन्हें यह समझने में मदद मिलती है कि दशमलव आधार पद्धति ही एकमात्र पद्धति नहीं है, बल्कि कई अन्य संख्या पद्धतियाँ भी सम्भव हैं। कक्षा-6 के विद्यार्थियों को संख्या आधारों को पढ़ाने का मेरा अनुभव हमेशा बहुत सन्तोषजनक रहा है, और मैं कक्षा-6 और 7 के सभी गणित शिक्षकों को इसे पढ़ाने की सलाह देती हूँ।

लगभग 5,000 साल पहले सिन्धु घाटी की मोहनजोदड़ो संस्कृति दशमलव संख्या के एक रूप का उपयोग वज़न मापने के लिए करती थी : 1/20, 1/10, 1/5, 1/2। कवि और गणितज्ञ पिंगला (तीसरी/दूसरी शताब्दी ईसा पूर्व) ने संस्कृत के छन्दशास्त्र के लिए द्विआधारी संख्या पद्धति (Binary number system) विकसित की थी, जिसमें दशमलव पद्धति के आधार दस से स्पष्ट सम्बन्ध था।

यह तो जानी-मानी बात है कि बाद में एक संख्या के रूप में शून्य का आविष्कार भारत में हुआ। (हालाँकि पहले की कुछ संस्कृतियों में शून्य की धारणा उभरी थी, लेकिन इसे केवल एक स्थानधारक [place holder] के रूप में उपयोग किया गया था। साथ ही इसे कभी भी किसी भी अंकगणितीय संक्रिया में इस्तेमाल नहीं किया गया था।)

रोमन संख्या पद्धति स्थानिक पद्धति नहीं है। इसमें कई प्रतीकों (I, V, X, L, C, D और M) का इस्तेमाल किया जाता है। जैसे-जैसे संख्याएँ बड़ी होती जाती हैं, इस पद्धति में उन्हें दर्शाना बोझिल और मुश्किल हो जाता है। एक लाख लिखने के लिए इस पद्धति में आपको एक हज़ार M का उपयोग करना होगा! अधिक प्रतीकों को बनाने की अपनी अलग कठिनाइयाँ होती हैं। रोमन पद्धति के साथ एक और बड़ी कठिनाई यह है कि इसमें संख्याओं के साथ संक्रियाएँ करना मुश्किल होता है। LDVXC में CLMDV जोड़ने का प्रयास करके देखें। आप ख़ुद ही इस कठिनाई को समझ जाएँगे!

इतिहास में बढ़ईगिरी और चुनाई जैसे काम-धन्धों के लिए भिन्नों के साथ काम करने के कौशल की ज़रूरत होती थी। पानों (wrenches) में इंच के आधे, एक चौथाई, आठवें और सोलहवें माप का इस्तेमाल किया जाता है। इन मापों के साथ काम करना और गणितीय संक्रियाएँ करना मुश्किल हो सकता है, उदाहरण के लिए, तब जब भिन्नों का गुणा करना हो। फिर भी, कई क्षेत्रों में हम भिन्नों का उपयोग करते रहते हैं। पिज़्ज़ा में भिन्नों का उपयोग स्पष्ट रूप से देखा जा सकता है : एक पिज़्ज़ा को आमतौर पर 8 टुकड़ों में बाँटा जाता है। एक पिज़्ज़ा को 10 बराबर टुकड़ों में बाँटना मुश्किल होगा!

वज़न और मात्रा के मापन में अकसर आधार 16 का उपयोग किया जाता है। एक औंस, 16 ड्रैम के बराबर होता है। एक पाउंड, 16 औंस के बराबर होता है। एक कप, 16 बड़ी चम्मच के बराबर होता है और एक गैलन, 16 कप के बराबर होता है।

समय को मापने, खाना बनाने आदि में आधार 12 के उपयोग से हम परिचित हैं। हम फलों और अण्डों जैसी वस्तुओं की गिनती अकसर दर्जनों में करते हैं। एक दर्जन दर्जन (12 दर्जन को) को ग्रॉस कहा जाता है। और एक वर्ष में 12 महीने होते हैं।

http://en.wikipedia.org/wiki/duodecimal

आज की दुनिया में कम्प्यूटर बाइनरी पद्धति का उपयोग करते हैं क्योंकि बाइनरी पद्धति को विद्युत सर्किट में ऑन/ऑफ़ के रूप में आसानी से दर्शाया जा सकता है। इसमें इनपुट या तो शून्य होता है या एक। इससे जानकारी को सरल बनाना सम्भव हो जाता है क्योंकि इसमें केवल दो स्थितियों का उपयोग करना होता है। कम्प्यूटर चार अंकों, आठ अंकों और सोलह अंकों के समूहों का भी उपयोग करते हैं। बाइनरी पद्धति और ऑक्टल (Octal system) या हेक्साडेसिमल पद्धति (Hexadecimal system) के बीच आसान रूपान्तरण गणनाओं में सहायता करते हैं। अलबत्ता, हम इस लेख में इस सम्बन्ध पर चर्चा नहीं करेंगे।

हालाँकि इतिहास में हमने विभिन्न पद्धतियों का उपयोग किया है, फिर भी रोज़मर्रा के कामों के लिए हम आमतौर पर दशमलव पद्धति का उपयोग करते हैं। यह समझना ज़रूरी है कि प्रत्येक पद्धति के अपने फ़ायदे और नुक़सान हैं। कुछ पद्धतियों में संख्या का निरूपण बहुत लम्बा हो सकता है (क्योंकि पद्धति में बहुत कम प्रतीक हैं), जबकि कुछ अन्य पद्धतियों में बहुत अधिक प्रतीक हो सकते हैं।

दशमलव पद्धति की तुलना अन्य संख्या आधार वाली पद्धतियों के साथ कैसे की जाती है?

उँगलियों पर गिनना (figure counting) : मनुष्यों की दस उँगलियाँ होती हैं - इस तथ्य के कारण दस के समूह में गिनती करना आसान हो जाता है। अन्य संख्या आधार वाली पद्धतियों में उँगलियों का उपयोग करके गिनती करना मुश्किल हो सकता है।

संख्या निरूपण की लम्बाई : बाइनरी संख्या पद्धति में संख्याओं का निरूपण लम्बा होता है। उदाहरण के लिए, 10 आधार वाली संख्या पद्धति में लिखी गई संख्या 365 को आधार दो वाली पद्धति यानी बाइनरी पद्धति में 101101101 के रूप में लिखा जाता है। वहीं हेक्साडेसिमल पद्धति में यही संख्या 16D के रूप में लिखी जाती है। इन प्रणालियों को लेख में आगे समझाया गया है।

प्रतीकों की संख्या : यदि प्रतीकों की संख्या ज़्यादा हो, जैसे हेक्साडेसिमल पद्धति (0 से 9, A, B, C, D, E, F) में, तो हमें कई प्रतीकों को याद करना पड़ता है और कई संक्रियाओं को करना सीखना पड़ता है। उदाहरण के लिए, हमें C + F, D × E इत्यादि का मान पता होना चाहिए।

दैनिक जीवन में हमें एक ऐसा आधार चुनने की आवश्यकता होती है जिसमें संख्या का निरूपण बहुत लम्बा न हो। साथ ही प्रतीकों की संख्या प्रबन्धनीय हो। अगर हमें आज कोई एक विकल्प चुनना हो, तो शायद दशमलव पद्धति स्पष्ट रूप से हमारी पसन्द बनी रहेगी।

हालाँकि बाइनरी, हेक्साडेसिमल और डुओडेसिमल पद्धति (आधार बारह) का अपना महत्त्व है और यह अलग-अलग क्षेत्रों में उपयोग की जाती हैं।

इस लेख में हम बाइनरी, हेक्साडेसिमल और डुओडेसिमल पद्धतियों की पड़ताल करेंगे।

टिप्पणी

मैं विद्यार्थियों को संख्याओं के साथ खेलने और उन्हें कुशलतापूर्वक प्रयोग करने के मौक़े देकर विभिन्न संख्या पद्धतियों की मूलभूत संरचना की खोज करने में मदद करना पसन्द करती हूँ। दूसरे चरण में, मैं संख्याओं को घातांक रूप (exponential form) में लिखने की उनकी समझ से इसे जोड़ती हूँ। इससे विद्यार्थियों को विभिन्न संख्या पद्धतियों में निहित एक समान संरचना को समझने में मदद मिलती है। कुछ लोग शायद सभी संख्या आधारों पर लागू होने वाली अन्तर्निहित समान संरचना को समझाकर फिर विषय को विस्तारपूर्वक समझाना पसन्द करें। मैं यह पाठकों पर छोड़ती हूँ कि वे कौन-सा विकल्प चुनते हैं।

आधार 2 : बाइनरी पद्धति

हज़ारों सालों पहले मिस्र, चीन और भारत जैसी प्राचीन सभ्यताओं में बाइनरी पद्धति का उपयोग अलग-अलग रूपों में किया गया था। हाल के समय में, लीबनिज और जॉर्ज बोले नाम के दो व्यक्तियों ने इन अलग-अलग रूपों का अध्ययन किया और इन पर काम किया।

https://en.wikipedia.org/wiki/binary_number

‘बाइ’ शब्द का अर्थ है ‘दो’। यह दो अंकों वाली एक पद्धति है। इसमें प्रत्येक अंक को एक बिट (बाइनरी और डिजिट शब्द से मिलकर बना) कहा जाता है।

एक बाइनरी अंक को ‘बिट’ कहा जाता है। 1001 को ‘एक, शून्य, शून्य, एक’ के रूप में पढ़ा जाता है। यह चार बिट्स लम्बा है।

बाइनरी पद्धति या आधार 2 वाली पद्धति का मतलब यह है कि इसमें एक स्थानिक पद्धति के ढाँचे में दो अंकों 1 और 0 का उपयोग किया जाता है।

अब देखते हैं कि इस पद्धति में विभिन्न संख्याओं को कैसे दर्शाया जाता है।

- ज़ाहिर है कि 1 (आधार दस वाली पद्धति में) को 1 द्वारा दर्शाया जाता है, और 0 को शून्य द्वारा।
- 2 (आधार दस वाली पद्धति में) को दर्शाने के लिए, एक नए स्थान की आवश्यकता है; 2 को हम 10 के द्वारा दर्शाते हैं।

शिक्षक इस विषय को बण्डल बनाने के उस तरीक़े से जोड़ सकते हैं जिसे विद्यार्थियों ने अपने शुरुआती वर्षों में सीखा है। इस तरीक़े में दस इकाइयों का बण्डल बनाकर एक दस (दहाई) बनाया जाता है, जिसे 10 के नए स्थान के रूप में दर्शाया जाता है। दस इकाइयों वाले दस बण्डलों को मिलाकर एक सौ (सैकड़ा) बनाया जाता है, जिसे 100 के रूप में दर्शाया जाता है।

इसी तरह, बाइनरी पद्धति में दो इकाइयों के बण्डल से 10 बनाया जाता है। चूँकि 3 (आधार दस वाली पद्धति में), 2 (आधार दस वाली पद्धति में) से 1 अधिक है, इसलिए बाइनरी पद्धति में 3 (आधार दस वाली पद्धति में) को 11 द्वारा दर्शाया जाता है।

4 (आधार दस वाली पद्धति में) को दो के दो समूहों के रूप में देखा जा सकता है। इसलिए बाइनरी पद्धति में दो के दो समूहों से 100 बनता है।

5 (आधार दस की पद्धति में), 4 (आधार दस की पद्धति में) से 1 अधिक है, इसलिए बाइनरी पद्धति में इसे 101 लिखा जाता है।

डेसिमल नम्बर	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
बाइनरी नम्बर	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100

इसलिए बाइनरी पद्धति में क्रम कुछ इस तरह दिखेगा :

विद्यार्थियों को प्रोत्साहित किया जाना चाहिए कि वे 25 (आधार दस की पद्धति में) तक इस प्रकार की एक तालिका क्रम में बनाएँ।

इसके अलावा, उन्हें क्रम को बनाए रखना होता है, यानी (मान लीजिए) 1000 तक पहुँचने के बाद पूरी प्रक्रिया फिर से दाईं ओर से शुरू होती है : 1001, 1010, 1011 आदि। क्या विद्यार्थी इस पद्धति की संख्याओं और दशमलव पद्धति में लिखी संख्याओं के बढ़ने के बीच कोई समानता देख पाते हैं : 101, 102, 103, 104…?

बाइनरी रूप में 25 तक संख्या लिखने के बाद विद्यार्थियों को इन सवालों के जवाब देना चाहिए :

किन बिन्दुओं पर हमें एक नया स्थान बनाना पड़ा? अगली संख्या कौन-सी होगी जिसमें हमें एक नए स्थान की आवश्यकता होगी? जाँच करें और देखें। यह 32 होगी।

पैटर्न का अवलोकन करें और निर्धारित करें कि 32 के बाद अगली संख्या कौन-सी होगी जिसमें एक नए स्थान की आवश्यकता होगी। यह 64 होगी।

आप इन संख्याओं के बारे में क्या कह सकते हैं?

2, 4, 8, 16, 32, 64,…

इन सभी को 2 की घातों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। 2 की प्रत्येक घात एक नए स्थान के लिए परिवर्तन बिन्दु बन जाती है। ध्यान दें कि दशमलव पद्धति में भी 10 की प्रत्येक घात एक परिवर्तन बिन्दु बन जाती है।

9 के बाद दस (10^1) लिखने के लिए हमें दहाई के स्थान (जो 10 इकाइयों का एक बण्डल है) की आवश्यकता होती है। सौ (10^2) लिखने के लिए हमें फिर से एक नए स्थान (यानी दस इकाइयों वाले 10 बण्डल) की आवश्यकता

होती है। इसी तरह, एक हज़ार (10^3) लिखने के लिए हमें फिर से एक नए स्थान (यानी सौ इकाइयों वाले 10 बण्डल) की आवश्यकता होती है।

विद्यार्थी बाइनरी और दशमलव संख्याओं की स्थानिक पद्धति की तुलना कर सकते हैं।

विद्यार्थियों को नीचे दिए गए आँकड़े का अध्ययन करके समानताओं का अवलोकन करना चाहिए ताकि वे विभिन्न आधार वाली पद्धतियों की अन्तर्निहित संरचना को समझ सकें। संख्या 2^7 से 2^0 तक की संख्याओं की जगह पर दशमलव पद्धति में कौन-सी संख्याएँ आएँगी?

इसमें 0 और 1 के बजाय कौन-कौन-से अंक आ सकते हैं?

उदाहरण के लिए, दशमलव पद्धति में लिखी गई एक संख्या लेते हैं : 59012

नोट : यहाँ आपको *गुणांक* शब्द को समझाना होगा।

$$59012 = 5 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

इस प्रसार (expansion) में गुणांकों पर ध्यान दें। इसमें गुणांक कौन-सी संख्याएँ हैं? वे 0, 1, 2, 5, 9 हैं। दशमलव पद्धति में गुणांक 0 से 9 के बीच का कोई भी अंक हो सकता है।

अब एक बाइनरी संख्या का उदाहरण लेते हैं : 10110011

$$10110011 = 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

इस प्रसार में गुणांकों पर ध्यान दें। इसमें कौन-सी संख्याएँ गुणांक हैं? वे 0, 1 हैं। बाइनरी पद्धति में गुणांक केवल 0 या 1 हो सकते हैं।

दोनों प्रसारों में कौन-सी बात एक जैसी है?

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	1	1	0	0	1	1
1×2^7		1×2^5	1×2^4			1×2^1	1×2^0
128		32	16			2	1

$$128 + 32 + 16 + 2 + 1 = 179$$

बाइनरी संख्याओं की एक तालिका बनाएँ। तालिका में आए सभी 1 को छायांकित करें। क्या इससे कोई सुन्दर पैटर्न बनता है?

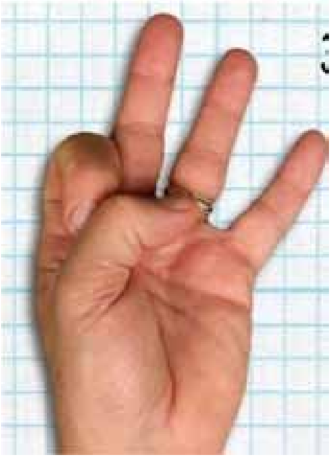
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

मज़ेदार गतिविधि

आप अपनी उँगलियों का उपयोग करके कितनी संख्याएँ गिन सकते हैं? अधिकांश विद्यार्थियों का जवाब होगा 'दस', क्योंकि हमारे पास दस उँगलियाँ हैं।

विद्यार्थियों को दिखाएँ कि हम केवल एक हाथ की उँगलियों का उपयोग करके 31 तक और दोनों हाथों की उँगलियों का उपयोग करके 1023 तक कैसे गिन सकते हैं!

उँगलियों का उपयोग बाइनरी संख्याओं के रूप में करें। शुरुआत छोटी उँगली से करें। यदि उँगली नीचे है, तो इसे 0 मानें। यदि उँगली ऊपर है, तो इसे 1 मानें। प्रत्येक उँगली 2 की किसी घात को दर्शाती है, यदि वह ऊपर है।



अँगूठा नीचे, तर्जनी उँगली नीचे, मध्यमा उँगली ऊपर, अनामिका उँगली ऊपर, छोटी उँगली ऊपर। कौन-सी संख्या हुई? 7।

अँगूठा नीचे, तर्जनी उँगली ऊपर, मध्यमा उँगली ऊपर, अनामिका उँगली ऊपर, छोटी उँगली नीचे। यह कौन-सी संख्या हुई? 14।

दस उँगलियों से 0 से 1023 तक की सभी संख्याओं को दिखाना सम्भव है।

बाइनरी संख्याओं का रूपान्तरण

क्या विद्यार्थी अब बाइनरी संख्या को दशमलव संख्या में बदल सकते हैं? इस रूपान्तरण को करने की उनकी दक्षता मूलभूत संरचना की उनकी समझ को प्रकट करेगी। बाइनरी संख्या को दशमलव संख्या में बदलने की प्रक्रिया में वे 2 की घातों और प्रसार संकेतों (expanded notations) का उपयोग करेंगे।

क्या वे दशमलव संख्या को बाइनरी संख्या में बदल पाएँगे?

दशमलव संख्या को बाइनरी संख्या में बदलने की प्रक्रिया को समझना कक्षा में आज़माने के लिए एक दिलचस्प गतिविधि है। क्या विद्यार्थी दी गई संख्या से छोटी और उसके निकटतम 2 की उच्चतम घात वाली संख्या का उपयोग करके चरणबद्ध तरीक़े से इसे हल कर पाएँगे? उदाहरण के लिए : 1050 को लें। 1050 की निकटतम और 1050 से छोटी 2 की घात वाली संख्या 1024 है। जब इसे घटाया जाता है, तो शेष 1050 - 1024 = 26 होता है। 26 की निकटतम और 26 से छोटी 2 की घात वाली संख्या 16 है। इसे घटाने पर शेष 26 - 16 = 10 होता है। अब हमारे पास इसकी निकटतम और इससे छोटी 2 की घात वाली संख्या 8 है। इसे घटाने पर शेष 2 होता है। इसलिए संख्या 1050 को बाइनरी रूप में इस तरह लिखा जाता है :

$$1 \times 2^{10} + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1$$

इसलिए 1050 (आधार दस की पद्धति में) को बाइनरी पद्धति में 10000011010 लिखा जाता है।

किसी संख्या को 2 की घातों के योग के रूप में लिखकर विद्यार्थी आधार दो की बहुपद संरचना का अध्ययन कर सकते हैं :

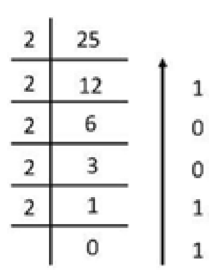
$$25 = 16 + 8 + 1 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

इसे भाग की विधि और प्रत्येक चरण में शेष के उपयोग से जोड़ा जा सकता है।

$$\begin{aligned} 25 &= (2 \times 12) + 1 \\ &= 2 \times (2 \times 6) + 1 \\ &= 2 \times (2 \times (2 \times 3)) + 1 \\ &= 2^3 \times (2 + 1) + 1 \\ &= 2^4 + 2^3 + 2^0 \end{aligned}$$

उदाहरण के तौर पर 25 (आधार दस वाली पद्धति में) को बाइनरी संख्या में बदलने के लिए 2 से बार-बार भाग दें और शेष को लिखते जाएँ।

परिणाम को नीचे से ऊपर की ओर लिखें। हमें 11001 मिलता है :



बाइनरी पद्धति में संक्रियाएँ

विद्यार्थी बाइनरी पद्धति में जोड़ और घटाने की संक्रियाओं की पड़ताल कर सकते हैं ताकि हासिल (carry over) और दो व चार के साथ आदान-प्रदान (exchange) की अवधारणा के उपयोग को समझ सकें।

यह देखना दिलचस्प है कि बाइनरी पद्धति में भी वही तरीक़ा काम करता है जो दशमलव पद्धति में करता है। इसे जोड़ और घटाने की संक्रियाओं वाले कुछ सवालों के माध्यम से दर्शाया जा सकता है।

$$
\begin{array}{r}
\scriptstyle 1\,1 \\
01010 \\
+\ 11101 \\
\hline
100111
\end{array}
$$

0 + 1 क्या होगा? 1 + 1 क्या होगा? हासिल के रूप में कौन-सा अंक जाता है?

$$
\begin{array}{r}
1\,\overset{0}{\cancel{1}}\,\overset{10}{\cancel{0}} \\
-\ 101 \\
\hline
1
\end{array}
$$

घटाने के सवाल में दाईं ओर के सबसे आख़िरी स्थान पर शून्य को 10 से क्यों बदला गया है?

क्या जोड़ने और घटाने की यह विधियाँ दशमलव पद्धति की विधियों के समान ही हैं?

क्या क्रमविनिमेय, साहचर्य, संक्रामिता (transitivity) और वितरण नियम बाइनरी संख्याओं पर भी लागू होते हैं?

बाइनरी पद्धति में गुणा की प्रक्रिया कैसे काम करती है? क्या बाइनरी संख्याओं में कोई तत्समक अवयव (identity element) है? यहाँ बाइनरी पद्धति में गुणे का एक सवाल उदाहरण के रूप में दिया गया है।

$$\begin{array}{rrrrr} & & 1 & 1 & 0 \\ \times & & & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & \times \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

बाइनरी पद्धति में गुणे की सम्भावित स्थितियाँ क्या हो सकती हैं?

$$0 \times 0 = 0$$

$$0 \times 1 = 0$$

$$1 \times 1 = 1$$

इन तालिकाओं को याद करना बहुत सरल है!

यहाँ बाइनरी संख्याओं के भाग का एक सवाल उदाहरण के तौर पर दिया गया है। दशमलव पद्धति में, यह 45 को 5 से भाग देने पर 9 प्राप्त करने के समान होगा।

क्या सामान्य भाग विधि बाइनरी पद्धति में काम करती है? करके देखें।

क्या बाइनरी पद्धति में भिन्न संख्याएँ होती हैं? बाइनरी पद्धति में .1 का क्या मतलब होगा?

$$\begin{array}{l} 101)\ 101101\ (1001 \\ (-)\ 101 \\ \hline \quad\ \ 101 \\ \quad (-)\ 101 \\ \hline \qquad\ 0 \end{array}$$

जैसे दशमलव पद्धति में दशमलव बिन्दु के बाईं ओर की संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ होती हैं, वैसे ही बाइनरी पद्धति में भी दशमलव बिन्दु के बाईं ओर की संख्याएँ पूर्ण संख्याओं को दर्शाती हैं।

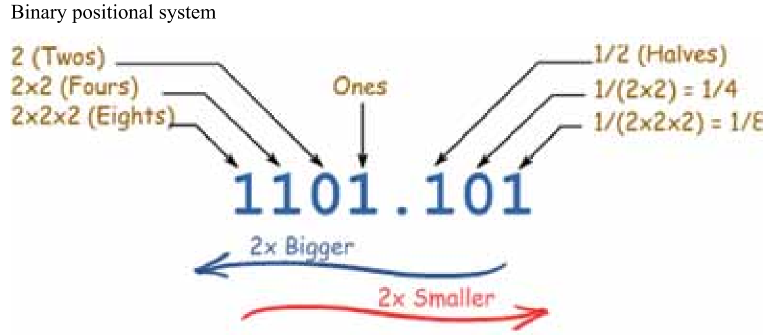
जैसे-जैसे हम बाईं ओर जाते हैं, प्रत्येक चरण पर स्थानीय मान दोगुने हो जाते हैं (यानी, वे दोगुने बड़े होते जाते हैं)। जैसे-जैसे हम दाईं ओर जाते हैं, प्रत्येक चरण पर स्थानीय मान आधे हो जाते हैं (यानी, वे आधे छोटे होते जाते हैं)। इसलिए दाईं ओर (.1) के पहले अंक का अर्थ है ‘आधा’, और .01 का अर्थ है ‘एक चौथाई’।

बाइनरी संख्या को पहचानने का तरीक़ा क्या है? संख्या के आधार को दर्शाने के लिए यह तरीक़ा अपनाया जाता है कि आधार को सबस्क्रिप्ट के रूप में दिखाया जाए। उदाहरण के लिए, 1011_2

जाँच-पड़ताल

क्या बाइनरी पद्धति में दर्शाने पर सभी परिमेय संख्याएँ सान्त (terminate) होती हैं? या उनमें से कुछ में पुनरावृत्ति होती है?

Binary positional system



आधार 16 : हेक्साडेसिमल संख्याएँ

‘हेक्साडेसिमल’ शब्द का अर्थ है ‘16 पर आधारित।’ हेक्साडेसिमल पद्धति में आधार का मान 16 होता है।

हेक्साडेसिमल पद्धति में बुनियादी अंक क्या हैं?

0 से 9 के अलावा 10 को A, 11 को B, 12 को C, 13 को D, 14 को E और 15 को F द्वारा दर्शाया जाता है।

डेसिमल नम्बर	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
हेक्साडेसिमल नम्बर	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
डेसिमल नम्बर	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
हेक्साडेसिमल नम्बर	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	20	21

विद्यार्थियों को हेक्साडेसिमल संख्याओं को दशमलव संख्याओं में और दशमलव संख्याओं को हेक्साडेसिमल संख्याओं में बदलने के मौक़े देकर हेक्साडेसिमल संख्याओं के साथ प्रयोग करने दें।

उन्हें हेक्साडेसिमल पद्धति के लिए स्थानिक तालिका (positional table) बनाने और रूपान्तरणों के लिए इस तालिका का उपयोग करने को कहें।

16^3	16^2	16^1	16^0	
1	B	7	E	$4096 + 2816 + 112 + 14 = 7038$
1×16^3	11×16^2	7×16^1	14×16^0	
4096	2816	112	14	

हेक्साडेसिमल पद्धति में .1 का मान क्या होगा?

हेक्साडेसिमल पद्धति में जैसे-जैसे हम बाईं ओर बढ़ते हैं, प्रत्येक स्थान 16 गुना बड़ा होता जाता है। बिन्दु के दाईं ओर की पहली संख्या सोलहवाँ भाग होती है। जैसे-जैसे हम दाईं ओर चलते हैं, प्रत्येक स्थान 16 गुना छोटा होता जाता है।

इस पद्धति में 1/2 या 1/4 जैसी भिन्न संख्याओं को कैसे दर्शाया जाएगा?

इसमें ऋणात्मक संख्याओं को कैसे दर्शाया जाएगा?

विद्यार्थी यह जाँच सकते हैं कि बाइनरी पद्धति में रूपान्तरणों के लिए उपयोग की जाने वाली प्रक्रियाएँ इस पद्धति में काम करती हैं या नहीं। वे इन प्रक्रियाओं को इस पद्धति के लिए उपयुक्त कैसे बनाएँगे?

यहाँ पर 447 को हेक्साडेसिमल संख्या में बदलने के लिए भाग की प्रक्रिया का एक उदाहरण दिया गया है। परिणाम को नीचे से ऊपर की ओर 1BF के रूप में पढ़ा जाता है। (याद रखें कि इस पद्धति में प्रतीक 0 से 9 और A, B, C, D, E, और F हैं।)

भाग	भागफल	शेष
$447 \div 16$	27	$15 = F$
$27 \div 16$	1	$11 = B$
$1 \div 16$	0	$1 = 1$

यहाँ पर हेक्साडेसिमल संख्याओं के लिए जोड़ और घटाव के सवाल उदाहरण के रूप में दिए गए हैं। (लाल रंग में दिखाए गए अंक ‘हासिल वाली संख्याएँ’ हैं।)

सामान्य जोड़ का सवाल	सामान्य घटाव का सवाल
$\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & & & \\ & & 7 & F & B & 3 \\ + & 1 & B & 6 & 2 & 1 \\ \hline & 2 & 3 & 5 & \mathrm{D} & 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{cccccc} & & E & 21 & 6 & 26 \\ & 3 & F & 5 & 7 & A \\ - & & C & 8 & 5 & E \\ \hline & 3 & 2 & D & 1 & C \\ \hline \end{array}$

इस पद्धति में हासिल के 1 का क्या मतलब है?

घटाव के सवाल में A के ऊपर 26 क्यों लिखा है?

क्या जोड़ और घटाव की यह विधियाँ दशमलव पद्धति की विधियों के समान हैं? किस तरह से यह समान हैं? किस तरह से यह अलग हैं?

आधार 12 : डुओडेसिमल पद्धति

प्राचीन काल से ही मानव जाति का आधार 12 के साथ घनिष्ठ सम्बन्ध रहा है, और यदि विद्यार्थियों को इसका अध्ययन करने का मौक़ा न मिले तो यह अफ़सोस की बात होगी।

एनालॉग घड़ी के डायल पर बारह घण्टे दिखाए जाते हैं। एक दिन में घण्टों की संख्या (24) 12 का एक गुणज है। एक घण्टे में साठ मिनट होते हैं जो 12 का एक गुणज है। एक वृत्त में कुल 360 डिग्री होती हैं और 360 भी 12 का एक गुणज है।

चारों उँगलियों के भागों की संख्या 12 है और इसका उपयोग आधार 12 में गिनने के लिए किया जा सकता है। कहा जाता है कि बेबीलोनियन अपनी चार उँगलियों के तीन-तीन खण्ड गिनकर 12 तक गिनते थे। वे दूसरे हाथ की एक उँगली उठाकर 12 को दर्शाते थे। इस तरीक़े से वे 60 तक (बारह गुना पाँच उँगलियाँ बराबर 60) गिन सकते थे। 60 में उत्कृष्ट गुणधर्म हैं, क्योंकि यह 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 और 60 से विभाज्य है। इसका मतलब यह है कि आधार 12 में भिन्नों को व्यक्त करने में अधिक कठिनाई नहीं होगी।

https://www.earthdate.org/how-10-fingers-became-12-hours

डेसिमल नम्बर	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
डुओडेसिमल नम्बर	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	10	11	12	13	14	15	16	17	18

विद्यार्थी आधार 12 में संक्रियाओं के अध्ययन को आगे बढ़ाने के लिए आधार 12 के जोड़ तथ्यों/ की एक तालिका बना सकते हैं।

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A

आधार 12 में गुणे की प्रक्रिया में कई सुन्दर पैटर्न बनते हैं और यह एक दिलचस्प प्रोजेक्ट का विषय हो सकता है।

1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	10
2	4	6	8	A	10	12	14	16	18	1A	20
3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29	30
4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38	40
5	A	13	18	21	26	2E	34	39	42	47	50
6	10	16	20	26	30	B	36	40	46	50	60
7	12	19	24	2E	B	41	48	53	5A	65	70
8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74	80
9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83	90
A	18	26	34	42	46	5A	68	76	84	92	A0
B	1A	29	38	47	50	65	74	83	92	A1	B0
10	20	30	40	50	60	70	80	90	A0	B0	100

अलग-अलग संख्या पद्धतियों का अध्ययन करना व उनकी तुलना करना उच्च प्राथमिक विद्यालय के विद्यार्थियों के लिए मज़ेदार व प्रेरणादायक होता है।

समापन टिप्पणी

अन्य आधारों के साथ आधार दस की तुलना करते हुए हमने निम्न दो कारकों पर पहले विचार नहीं किया था।

- **विभाज्याता की जाँच** : आधार दस में 2 और 5 से भाग देना बहुत आसान होता है, क्योंकि 2 और 5 दोनों ही 10 के भाजक हैं। यही कारण है कि आधार दस में 2 और 5 से विभाज्यता की जाँच करना व समझना आसान होता है। सामान्य रूप में किसी दिए गए आधार b के लिए अलग-अलग संख्याओं द्वारा विभाज्यता की जाँच तब करना आसान होता है जब संख्या b (या b की घातों) की भाजक हो। आधार 12 (डुओडेसिमल पद्धति) इस अर्थ में अच्छी तरह से काम करता है, क्योंकि 12 के कई भाजक (उचित भाजक : 2, 3, 4 और 6) हैं।
- **सान्त दशमलव :** आधार दस में किसी भिन्न का दशमलव रूप सान्त होता है यदि भिन्न का हर 2 और 5 की घातों का एक गुणनफल होता है। यदि ऐसा नहीं हो तो दशमलव रूप अनवसानी (non-terminating) होता है (इसमें भागफल में अंकों का एक पुनरावृत्ति खण्ड प्राप्त होता है)। बाइनरी पद्धति का एक नुक़सान यह है कि अन्य पद्धतियों की तुलना में इसमें कुछ ही भिन्न (वे जिनके हर 2 की घातें हैं) सान्त होते हैं। जैसे, 1/10 को बाइनरी पद्धति में दर्शाने पर अंकों का पुनरावृत्ति खण्ड मिलता है।

पद्मप्रिया शिराली

पद्मप्रिया शिराली सह्याद्रि स्कूल (पुणे) और ऋषि वैली (आन्ध्र प्रदेश) में स्थित कम्युनिटी मैथ सेंटर में 1983 से काम कर रही हैं। यहाँ वह विभिन्न विषय पढ़ाती रही हैं, जैसे कि गणित, कम्प्यूटर अनुप्रयोग, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू। 1990 के दशक में, उन्होंने चेन्नई के प्रसिद्ध गणित शिक्षक स्वर्गीय श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ मिलकर काम किया था। वह उस टीम का हिस्सा थीं जिसने ऋषि वैली रूरल सेंटर के मल्टीग्रेड एलिमेंट्री लर्निंग प्रोग्राम को बनाया था। इस प्रोग्राम को 'स्कूल इन ए बॉक्स' के नाम से जाना जाता है। पद्मप्रिया से padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

यह अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय तथा कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेंटर, ऋषि वैली की संयुक्त पत्रिका Azim Premji University At Right Angles (a resource for school mathematics) मार्च 2022 में प्रकाशित Number Bases का हिन्दी अनुवाद है।

अनुवाद : निदेश सोनी

पुनरीक्षण एवं कॉपी एडीटिंग : कविता तिवारी

सम्पादन : राजेश उत्साही