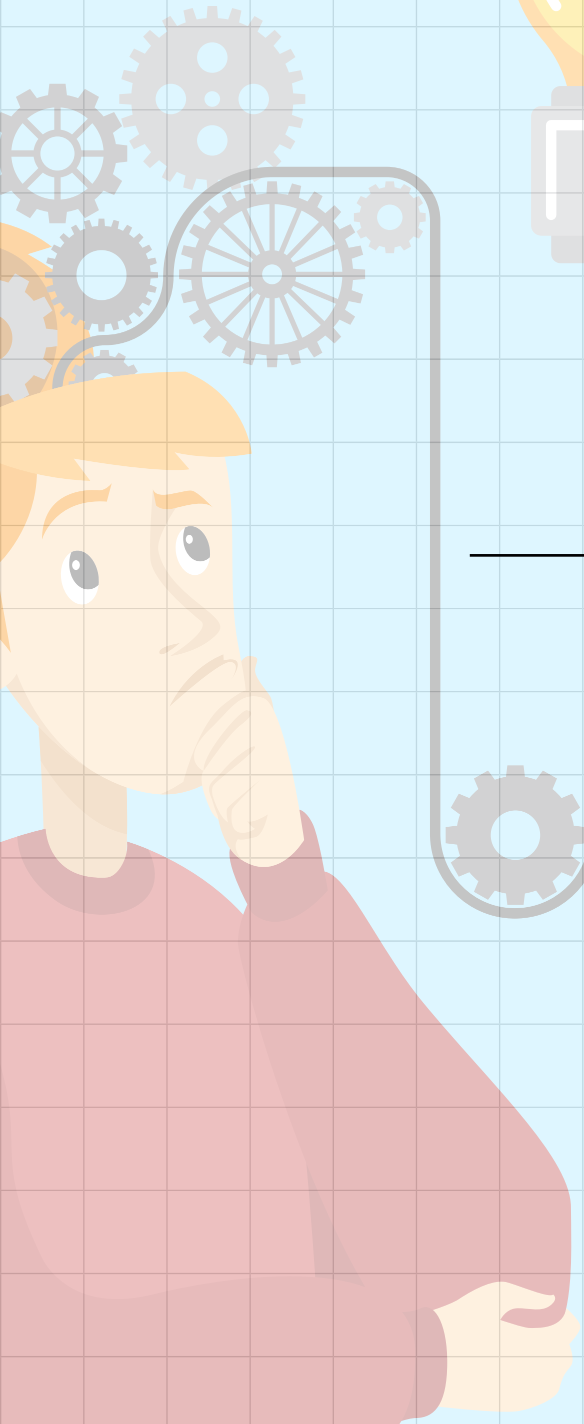
At Right Angles
A Resource for School Mathematics



तर्क, विवेचन और प्रमाण

पद्मप्रिया शिराली

Azim Premji University

A publication of Azim Premji University together with Community Mathematics Centre, Rishi Valley

तर्क, विवेचन और प्रमाण

प्रमाण (जिसे हाई स्कूल में औपचारिक रूप से प्रस्तुत किया जाता है) की दिशा में पहले क़दम तर्क (logic) और विवेचन (reasoning) होते हैं। प्राथमिक कक्षाओं से ही स्कूल की पाठ्यचर्या का डिज़ाइन और प्रश्नों का चयन इस प्रकार किया जाना चाहिए कि यह पहलू सचेत रूप से विकसित हों। पाठ्यचर्या में ऐसे प्रश्न होने चाहिए जिन्हें प्रमाणित करने की ज़रूरत हो।

प्राथमिक स्तर पर तार्किक सोच (logical thinking) ठोस घटनाओं और अनुभवों से जुड़ी होती है। विद्यार्थी अनुभव, ज्ञान, पारस्परिक क्रियाओं के माध्यम से तार्किक सम्बन्ध बनाते हैं और निष्कर्ष निकालते हैं। प्रयत्न और त्रुटि की प्रक्रिया के माध्यम से वे अवधारणाओं को अपने ज्ञान का हिस्सा बना लेते हैं। यह प्रक्रिया उन्हें अवधारणात्मक समझ विकसित करने में मदद करती है और उनकी तार्किक सोच आकार लेने लगती है। जब विद्यार्थी 10 साल या उससे ज़्यादा उम्र के हो जाते हैं, तो वे अमूर्त अवधारणाओं के बारे में तार्किक ढंग से सोचने लगते हैं।

सामान्यत: प्रश्नों के हल में तर्क का उपयोग होता है और प्रश्नों को तर्क की श्रेणी के तहत वर्गीकृत करना कठिन होता है। हालाँकि कुछ प्रश्न ऐसे हो सकते हैं जिनमें गणनात्मक कौशलों, प्रक्रियात्मक ज्ञान की आवश्यकता होती है और जो स्मृति और अवधारणाओं की स्पष्टता पर निर्भर होते हैं। कुछ प्रश्नों को हल करने के लिए तर्क के प्रयोग और सम्बन्धों को देख पाने की क्षमता की आवश्यकता होती है। इससे संख्याओं या आकृतियों के बीच मौजूद गुणधर्मों या सम्बन्धों की गहन समझ विकसित होती है। इससे सवालों के बारे में सोचने और उन्हें हल करने के लिए रणनीतियों का प्रयोग करने की विद्यार्थियों की क्षमता बढ़ती है। यह अनुमान लगाने या सोची-समझी अटकल लगाने की विद्यार्थियों की क्षमता को विकसित करता है। विद्यार्थी यह भी समझने लगते हैं कि बिना शब्दों के प्रमाण कैसे दर्शाए जा सकते हैं।

इस प्रकार की समस्याओं को हल करने से विवेचन और सिद्ध करने के कौशल धीरे-धीरे विकसित होते हैं। साथ ही इससे अवधारणाओं की स्पष्ट समझ विकसित करने में मदद मिलती है। इस प्रकार की समस्याओं पर अकेले या जोड़ियों में काम किया जा सकता है और इन्हें कक्षा के बाक़ी विद्यार्थियों के साथ चर्चा/प्रस्तुति के माध्यम से साझा किया जा सकता है।

स्वाभाविक रूप से, इस प्रक्रिया में विद्यार्थियों के लिए पहला चरण यह है कि वे अपने द्वारा उपयोग की गई तार्किक विचार प्रक्रिया से पूरी तरह से आश्वस्त हों। दूसरा चरण यह है कि वे अपनी विचार प्रक्रियाओं को किसी अन्य विद्यार्थी के साथ साझा कर सकें। तीसरा चरण यह है कि वे अपनी विचार प्रक्रिया के बारे में पूछे गए प्रश्नों या फिर उस पर उठाई गई आपत्तियों का सन्तोषपूर्ण उत्तर देने में सक्षम हों।

कक्षा में प्रश्न पूछने व प्रश्न पूछने की जगह बनाने के अवसर देने, पूर्वानुमान लगाने, पैटर्न का अवलोकन करने व खोज करने और सम्बन्धों को स्थापित करने के लिए विद्यार्थियों को प्रेरित करने से तार्किक सोच को बढ़ावा मिलता है। जब हम विद्यार्थियों को अपने तर्क को व्यक्त करने के अधिक अवसर देते हैं, तो वे समस्याओं के साथ जूझने में ज़्यादा दिलचस्पी दिखाते हैं और उन्हें हल करने के लिए ज़्यादा प्रयास करते हैं। इससे उनमें आत्मविश्वास और अधिक स्पष्ट समझ विकसित होने की सम्भावना बढ़ जाती है।

गणित के सभी क्षेत्रों में और सभी स्तरों पर ऐसे प्रश्नों को प्रस्तुत करने की अच्छी सम्भावना है। ऐसे प्रश्नों की जटिलता को धीरे-धीरे बढ़ाया जा सकता है। शुरुआती चरणों में, केवल एक स्तर के तर्क वाले, इसके बाद दो स्तरीय तर्क वाले प्रश्न हो सकते हैं और इसी तरह जटिलता को बढ़ाया जा सकता है। विद्यार्थी अपनी बात को सिद्ध करने के लिए प्रस्तुतीकरण के विभिन्न तरीक़े उपयोग कर सकते हैं। कुछ चित्रकला का उपयोग कर सकते हैं, कुछ लेखन का, या कुछ अन्य विद्यार्थी प्रतीकों का इस्तेमाल भी कर सकते हैं। साझा करने की प्रक्रिया के माध्यम से वे अपने सोचने और प्रस्तुत करने के तरीक़ों को बेहतर बनाना सीखते हैं और अपने तर्क में कमियों को पहचानते हैं। यह विद्यार्थियों को सन्देहवाद (skepticism) के एक उच्च स्तर को विकसित करने में मदद करता है।

किसी खोजबीन की ओर ले जाने वाली पड़ताल और उसके बाद उसका प्रमाण किसी भी उभरते हुए गणितज्ञ के लिए बहुत सन्तोषजनक हो सकता है।

की-वर्ड : प्रमाण, प्रश्न उठाना, तर्क, विवेचन, प्रमाणिकता, अनुमान, संख्या, आकृति, पैटर्न

“किसी कथन को सिद्ध करना उसकी सत्यता को दर्शाना है।”

औपचारिक प्रमाण लेखन से पहले विद्यार्थियों को कई सन्दर्भों में अनौपचारिक तरीक़ों से अपने प्रमाण प्रस्तुत करने के अवसर दिए जाने चाहिए। प्रमाण के लिए सिलसिलेवार तर्क की आवश्यकता होती है जिसे धीरे-धीरे विकसित किया जाना चाहिए। प्रमाण को लिखित रूप में प्रस्तुत करने और ऐसा करने में सटीकता पर ध्यान केन्द्रित करने की अपेक्षा करने से पहले तार्किक विचार की प्रक्रिया को दृढ़तापूर्वक स्थापित किया जाना चाहिए। समझ और प्रमाण एक साथ विकसित होते हैं।

प्रमाण की प्रक्रिया किसी दिए गए तथ्य (आधार) के कुछ गुणों के चयन से निष्कर्ष तक पहुँचने का एक तरीक़ा है। दी गई जानकारी के कई पहलू हो सकते हैं और चयनित पहलू के आधार पर एक विशेष निष्कर्ष पर पहुँचा जा सकता है।

प्रमाण क्या है? यह एक ऐसा तार्किक तर्क (logical argument) है जो किसी कथन की सत्यता स्थापित करता है। तो फिर तर्क क्या है? क्या यह चरणों की एक ऐसी शृंखला है जिसमें प्रत्येक चरण पूर्व के चरण से प्राप्त होता है? इस प्रक्रिया में निगमन शामिल (deduction) है। वास्तविक जीवन में निर्णय लेने के लिए हम समय-समय पर तार्किक सोच का उपयोग करते हैं। हालाँकि जब हम किसी समस्या का सामना करते हैं, तो उसे हल करने के लिए उपलब्ध तथ्यों का उपयोग करते हैं।

किसी कथन को प्रमाण कहने के लिए क्या यह पर्याप्त है कि वह केवल एक विशिष्ट परिस्थिति में ही काम करे? क्या यह पर्याप्त है कि वह कई परिस्थितियों में काम करे? इसके अलावा, किसी चीज़ की सत्यता को प्रमाणित करने के लिए विद्यार्थियों को ऐसे कथनों से अवगत होना चाहिए जो किसी विशेष परिस्थिति में सत्य हों। साथ ही उन्हें अपने कथनों को उचित रूप से व्यक्त करना भी सीखना चाहिए।

विद्यार्थी किसी चीज़ को कैसे प्रमाणित करते हैं? वे प्रमाण के रूप में उदाहरण दे सकते हैं। हालाँकि किसी सिद्धान्त को दर्शाने के लिए उदाहरण का इस्तेमाल किया जा सकता है, लेकिन यह प्रमाण के रूप में पर्याप्त नहीं होता है। यहाँ शिक्षकों के लिए एक मौक़ा है यह दिखाने का कि उदाहरण पर आधारित व्याख्या प्रमाण के रूप में पर्याप्त नहीं होती है। विद्यार्थी गणितीय सोच के एक घटक के रूप में चित्र के माध्यम से कुछ दिखा सकते हैं। प्रयोगात्मकता तर्क की प्रक्रिया से पहले आती है और अकसर लोग पहले इसी चरण से शुरू करते हैं। फिर सैद्धान्तिक व्याख्या की ओर बढ़ते हैं।

विद्यार्थियों द्वारा दी गई व्याख्या को सही रूप में फिर से प्रस्तुत करना आवश्यक है। साथ ही उन जानकारियों को नोट करना भी महत्त्वपूर्ण है जिन्हें सत्य माना गया है।

विस्तृत पाठ्यक्रम की माँगों के कारण इस प्रक्रिया को जारी रखने में समय अकसर बाधा बन जाता है, लेकिन विवेचन को विकसित करने में लगाया गया समय गणितीय सोच को गहराई प्रदान करता है।

शोध से पता चला है कि विद्यार्थी प्रमाण को समझ सकते हैं, भले ही वे उसे ख़ुद सिद्ध न कर सकें। इसका मतलब यह है कि अर्थपूर्ण तर्कों से परिचित होने से उन्हें विवेचन कौशल को धीरे-धीरे विकसित करने में मदद मिल सकती है।

यहाँ स्कूल के विभिन्न स्तरों पर कक्षा में प्रमाण से परिचित कराने के लिए कुछ सुझाव दिए गए हैं। इनमें से कुछ में संख्याएँ और कुछ में ज्यामिति शामिल है, जबकि कुछ अन्य में संचय (combination) और ग्राफ़ शामिल हैं।

जैसा कि हम देख सकते हैं, ‘क्यों’ पूछने और अपने जवाब को उचित ठहराना सीखने की प्रक्रिया को शुरुआती चरण से विकसित किया जा सकता है।

चित्र-1

सवाल 1

यदि $X + Y = X + Z$ हो तो क्या आप दिखा सकते हैं कि $Y = Z$?

जब मैंने इस सवाल को कक्षा 4 में पूछा, तो यह दिखाने के लिए कि यह सत्य क्यों है बहुत-से विद्यार्थियों ने संख्याओं और चित्रों का उपयोग किया। कुछ विद्यार्थियों ने Y और Z को अलग-अलग मान दिए क्योंकि वह अलग-अलग अक्षर थे और पाया कि दोनों पक्षों का योग समान नहीं था। इसके लिए मुझे उन्हें कुछ संकेत देने पड़े ताकि वे समझ सकें कि दोनों पक्षों का बराबर होना एक आवश्यक शर्त है, जिस पर उन्हें काम करना है। इससे विद्यार्थियों को Y और Z पर इस शर्त के प्रभाव को समझने में मदद मिली। एक विद्यार्थी ने अनूठा समाधान प्रस्तुत किया। उसने एक पुस्तक और एक पेंसिल को एक ओर रखा और एक अन्य पुस्तक और वैसी ही एक पेंसिल को दूसरी ओर रखा और कहा कि यदि Y एक पेंसिल है, तो Z को भी एक पेंसिल होना पड़ेगा ताकि दोनों बराबर हों।

यह समाधान एक रोचक चर्चा का कारण बना क्योंकि कुछ विद्यार्थियों ने कहा कि दूसरी पेंसिल थोड़ी छोटी थी और इसलिए वे बराबर नहीं थीं।

हमने अपनी चर्चा इस बात पर ख़त्म की कि हम कब कहते हैं कि चीज़ें बराबर हैं, कब हम कहते हैं कि चीज़ें एक जैसी हैं, और कब हम कहते हैं कि चीज़ें समरूप (similar) हैं।

चित्र-2

सवाल 2

सिद्ध करो कि दो सम संख्याओं का योगफल सदैव एक सम संख्या होती है।

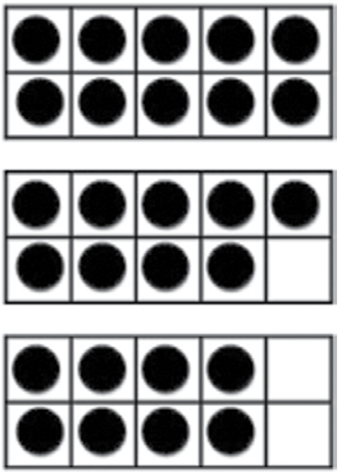
ज़्यादातर विद्यार्थियों ने इस समस्या को हल करने के लिए दो सम संख्याओं को लिया और उदाहरण के ज़रिए यह बताने की कोशिश की कि इनका योगफल एक सम संख्या है। मैंने इस पर कोई आपत्ति नहीं की, लेकिन मैंने उन्हें चित्र के माध्यम से इसे बताने के लिए प्रेरित किया। पिछले वर्ष मैंने जोड़ी बनाने वाली एक गतिविधि के माध्यम से सम और विषम संख्याओं से विद्यार्थियों का परिचय करवाया था।

जब उन्होंने संख्याओं को दर्शाने के लिए बिन्दुओं वाले चित्र (dot drawing) बनाने शुरू किए, तो कुछ विद्यार्थियों को पिछले साल अपनाई प्रक्रिया याद आ गई और वे चित्रों में जोड़ियों पर गोले बनाने लगे। अचानक किसी विद्यार्थी ने ध्यान दिया कि प्रत्येक समूह में कोई भी बिन्दु बिना जोड़ी के नहीं बचा था और इसलिए दोनों समूहों को मिलाने पर उनका योगफल सम ही होगा। वह विद्यार्थी इस तर्क को अन्य विद्यार्थियों को समझाने में सफल रहा क्योंकि इसे चित्र के रूप में प्रस्तुत किया गया था।

कुछ ही समय में इस खोज ने समान तर्क को विस्तार देकर दो अन्य परिणामों को सिद्ध करने के लिए प्रेरित किया।

- सिद्ध करें कि दो विषम संख्याओं का योगफल हमेशा एक सम संख्या होती है।
- सिद्ध करें कि एक विषम और एक सम संख्या का योगफल हमेशा एक विषम संख्या होती है।

एक बार जब यह तरीक़ा विद्यार्थियों को समझ आ गया तो अधिकांश विद्यार्थियों ने परिणामों को सिद्ध करने के लिए चित्र और जोड़ियाँ बनाने के विचार का उपयोग किया।



चित्र-3

विद्यार्थी पूछने लगे कि यदि हम तीन विषम या सम संख्याओं को जोड़ें तो क्या होगा? उत्तर विषम संख्या होगी या सम संख्या?

यह मेरे लिए एक अच्छा उदाहरण था कि कैसे कुछ विद्यार्थियों की सीख दूसरे विद्यार्थियों को प्रभावित कर सकती है और समूह एक साथ आगे बढ़ सकता है!

सवाल 3 : कक्षा 5 में क्रमागत संख्याओं की पड़ताल

सिद्ध करें कि तीन क्रमागत संख्याओं का योगफल 3 का गुणज होता है।

1,2,3	2,3,4	3,4,5	4,5,6	5,6,7	6,7,8

हमने इस प्रश्न को क्रमागत संख्याओं की पड़ताल के रूप में हल करना शुरू किया, न कि ऊपर लिखे कथन के रूप में। विद्यार्थियों ने तीन क्रमागत संख्याओं के समूहों की सूची बनाई। इन संख्याओं के साथ हम क्या कर सकते हैं? अगर हम इन्हें जोड़ें, तो क्या होगा? अगर हम इन्हें गुणा करें, तो क्या होगा?

हमने पहले संख्याओं को जोड़ा और योगफल की सूची बनाई।

6	9	12	15	18	21

विद्यार्थियों ने देखा कि सभी योगफल 3 के गुणज हैं। उन्होंने इसे कुछ और संख्याओं के साथ भी करके देखा और पाया कि यह पैटर्न जारी था।

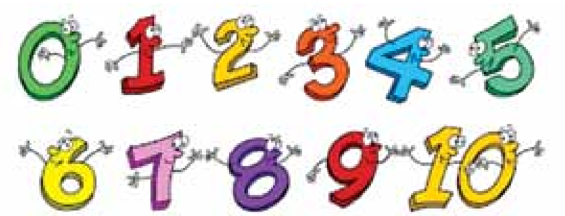
ऐसा क्यों होता है कि सभी योगफल 3 के गुणज होते हैं?

जब कोई प्रश्न किसी खोज से पैदा होता है, तो विद्यार्थियों को उसमें ज़्यादा दिलचस्पी होती है। वह इसलिए कि वह प्रश्न उन्हें किसी और ने हल करने के लिए नहीं दिया होता है। इससे विद्यार्थियों को उस प्रश्न पर अपना मालिक़ाना हक़ महसूस होता है।

इसे समझाने के लिए कुछ और प्रयास किए गए लेकिन वह बहुत सन्तोषजनक नहीं थे। मुझे बीच में हस्तक्षेप करना पड़ा और मैंने उनसे पूछा कि उन्होंने प्रत्येक समूह के बारे में क्या नोटिस किया। विभिन्न जवाब आए और हमने देखा कि प्रत्येक समूह में एक ऐसी संख्या है जो 3 का गुणज है। वास्तव में, यह अपने आप में एक प्रश्न हो गया। यदि आपके पास तीन क्रमागत संख्याएँ हैं, तो क्या उनमें से एक संख्या हमेशा 3 का गुणज होगी? क्यों?

फिर मैंने उनसे पूछा कि इन संख्याओं का एक-दूसरे के साथ क्या सम्बन्ध है। फिर से विभिन्न जवाब आए। एक विद्यार्थी ने कहा कि बीच की संख्या बाईं ओर की संख्या से एक अधिक और दाईं ओर की संख्या से एक कम है। एक अन्य विद्यार्थी ने इसे इस प्रकार व्यक्त किया कि बाईं ओर की संख्या बीच की संख्या से एक और सबसे दाईं ओर की संख्या से दो कम है। किसी अन्य विद्यार्थी ने कहा कि दाईं ओर की संख्या बाईं ओर की संख्या से दो ज़्यादा और बीच की संख्या से एक ज़्यादा है।

एक विद्यार्थी ने कहा कि इनमें से एक संख्या तीन का गुणज है और बाकी की दो संख्याओं का योगफल पहली संख्या से 3 ज़्यादा है।



चित्र-4

इस कथन ने थोड़ा भ्रम पैदा कर दिया क्योंकि उस विद्यार्थी ने अपनी समझ को ठीक तरह से व्यक्त नहीं किया था। वह संख्याओं के अन्तर की बात कर रहा था जिन्हें जोड़ने पर 3 प्राप्त होता है। इस व्याख्या को स्पष्ट करने की ज़रूरत थी।

मैंने उनसे पूछा कि क्या वे प्रत्येक संख्या को 3 के गुणज और अतिरिक्त संख्या के रूप में लिख सकते हैं।

हमने समूह 3, 4, 5 और 4, 5, 6 और 8, 9, 10 को इस तरह से दुबारा लिखा :

$$3 \times 1, (3 \times 1) + 1, (3 \times 1) + 2$$

$$(3 \times 1) + 1, (3 \times 1) + 2, (3 \times 2)$$

$$(3 \times 2) + 2, 3 \times 3, (3 \times 3) + 1$$

तब एक विद्यार्थी ने कहा कि एक संख्या 3 का गुणज है, दूसरी संख्या 3 का गुणज और 1 अतिरिक्त है और तीसरी संख्या 3 का गुणज और 2 अतिरिक्त है। इस प्रकार इन अतिरिक्त संख्याओं का जोड़ 3 का गुणज होता है।

हमने इसे दिखाने के लिए बिन्दु वाले चित्र भी बनाए।

हालाँकि विद्यार्थी किसी परिणाम को उचित ढंग से प्रमाणित कर सकते हैं, लेकिन यह ज़रूरी है कि शिक्षक उसे सटीक भाषा में फिर से प्रस्तुत करें।

अकसर एक प्रमाण एक अन्य परिणाम की ओर ले जाता है, जिसे सिद्ध किया जाना चाहिए।

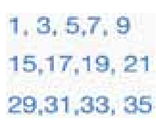
अगली चुनौती यह सिद्ध करना थी कि तीन क्रमागत संख्याओं का योगफल बीच की संख्या का तीन गुना होता है।

तीन क्रमागत संख्याओं के समूह में खोजने के लिए बहुत कुछ था।

सवाल 4

सिद्ध करें कि दो क्रमागत विषम संख्याओं का योगफल हमेशा 4 का एक गुणज होता है।

कक्षा-5 में हमने इसे भी करके देखा था। हमने पहले कुछ क्रमागत विषम संख्याओं के समूहों की सूची बनाई।



चित्र-5

1 + 3	3 + 5	5 + 7	7 + 9	9 + 11	11 + 13

शुरू में उन्होंने विभिन्न जोड़ियों को जाँचकर देखा कि क्या यह कथन सही है। कई उदाहरणों के लिए इस कथन के सत्य पाए जाने पर अब चुनौती यह थी इसके पीछे के तर्क का पता लगाया जाए।

मैंने उन्हें प्रेरित किया कि वे 4 से बड़ी संख्या वाले समूहों से शुरू करें और संख्या की जोड़ियों को बिन्दु वाले चित्रों के माध्यम से दर्शाएँ। पिछले प्रश्नों को हल करने के दौरान हुए अनुभवों की वजह से विद्यार्थी अब इन संख्याओं को 4 के गुणज के साथ अतिरिक्त संख्या के रूप में देखने लगे थे। इससे उन्हें संख्याओं के बीच सम्बन्धों को देखने में मदद मिली।

उन्होंने पहले 5, 7 और 7, 9 और 9, 11 को 4 + 1, 4 + 3 और 4 + 3, 4 + 4 + 1 और 4 + 4 + 1, 4 + 4 + 3, के रूप में लिखा और फिर इस तरह लिखा :

$$4 \times 1 + 1,\ 4 \times 1 + 3$$

$$4 \times 1 + 3,\ 4 \times 2 + 1$$

$$4 \times 2 + 1,\ 4 \times 2 + 3$$

अन्त में उन्होंने अपनी समझ को इन शब्दों में बताया, ‘प्रत्येक संख्या 4 का गुणज और कुछ अतिरिक्त है’। जोड़ी में जो अतिरिक्त संख्याएँ हैं उनका योगफल 4 का गुणज है। इसलिए दो क्रमागत विषम संख्याओं का योगफल 4 का गुणज होता है।

बाद में हमने समूह 1, 3 और 3, 5 को इस तरह से तोड़कर लिखा :

$4 \times 0 + 1,\ 4 \times 0 + 3$	$4 \times 0 + 3,\ 4 \times 1 + 1$

विद्यार्थी देख सकते थे कि यहाँ भी वही स्थिति थी।

सवाल 5

यह ज़रूरी नहीं है कि प्रमाण और तार्किकता के अनुभव को विकसित करने का काम हमेशा किसी बड़े परिणाम के माध्यम से हो। इसे सत्य या असत्य कथनों को प्रस्तुत करके भी किया जा सकता है ताकि विद्यार्थी असत्य कथनों को पहचानना सीखें और यह भी बता सकें कि कोई कथन सत्य या असत्य क्यों है।

क्या ये कथन सत्य हैं या असत्य? क्या आप बता सकते हैं कि ये सत्य या असत्य क्यों हैं?

यहाँ ‘संख्या’ शब्द का उपयोग प्राकृत संख्याओं के लिए किया गया है।

- जब आप किसी संख्या को विषम संख्या से गुणा करते हैं, तो उत्तर हमेशा एक विषम संख्या होती है।
- जब आप किसी संख्या को सम संख्या से गुणा करते हैं, तो उत्तर हमेशा एक सम संख्या होती है।
- किसी संख्या को दोगुना करने पर उत्तर में एक सम संख्या प्राप्त होती है।

- चार सम संख्याओं का योगफल 4 का एक गुणज होता है।
- जब आप किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा करते हैं, तो उत्तर एक सम संख्या होती है।
- तीन क्रमागत संख्याओं का योगफल एक सम संख्या होती है।

चित्र-6

सवाल 6

विद्यार्थियों को यह समझना भी सीखना चाहिए कि कोई कथन कब हमेशा सत्य होता है, कब वह केवल कुछ विशेष परिस्थितियों में सच होता है, और कब वह पूरी तरह असत्य होता है। यह समझ भविष्य में तब मदद कर सकती है जब उनका सामना 'यदि और केवल यदि' की स्थितियों वाले सशर्त कथनों से होता है।

शिक्षक कुछ ऐसे कथनों के उदाहरण भी दे सकते हैं जो कभी-कभी सत्य होते हैं। उदाहरण के लिए, जब आप दो संख्याओं को जोड़ते हैं तो आपको वही परिणाम मिलता है जो आपको उन संख्याओं का गुणा करने पर मिलता है। यह कथन तभी सच है जब दोनों संख्याएँ या तो शून्य हों, या फिर दोनों संख्याएँ 2 हों। लेकिन यह तब सत्य नहीं होता जब संख्याएँ 2 व 3 हों (उदाहरण के तौर पर)।

क्या नीचे दिए गए यह कथन हमेशा सत्य हैं, कुछ परिस्थितियों में सत्य हैं, या कभी सत्य नहीं हैं?

- यदि कोई संख्या 10 का गुणज है, तो वह 5 का गुणज भी होगी।
- यदि कोई संख्या 4 का गुणज है, तो वह 8 का गुणज भी होगी।
- यदि कोई संख्या 9 का गुणज है, तो वह 2 का गुणज भी होगी।
- 5 के दो क्रमागत गुणजों को जोड़ने पर हमें 10 का एक गुणज मिलता है।
- 2 के पाँच क्रमागत गुणजों को जोड़ने पर हमें 10 का एक गुणज मिलता है।

विपरीत कथनों को देखना भी ज़रूरी है। उदाहरण के लिए,

- वर्ग एक विशेष आयत होता है। क्या आयत एक विशेष वर्ग होता है?

चित्र-7

सवाल 7

प्रमाण से सम्बन्धित प्रश्नों को ज्यामिति और आकृतियों के माध्यम से भी प्रस्तुत किया जा सकता है। यहाँ एक सवाल दिया गया है जिसे मैंने कक्षा-6 के साथ आज़माया था।

सभी समतल फलकों वाली किसी त्रिविमीय आकृति (बहुफलक) में न्यूनतम कितनी फलकें हो सकती हैं?

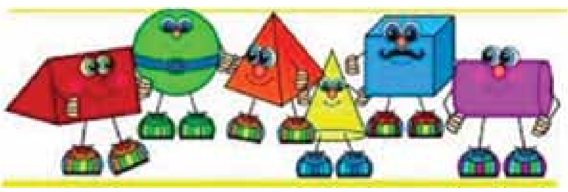
जब मैंने विद्यार्थियों के सामने यह प्रश्न रखा, तो उनमें से अधिकांश ने घन या घनाभ की आकृति के बारे में सोचा और पूरे आत्मविश्वास से कहा कि त्रिविमीय आकृतियों में न्यूनतम 6 फलकें होंगी। मैंने पूछा कि क्या सच में ऐसा है।

अधिक पड़ताल करने पर उन्हें अन्य त्रिविमीय आकृतियों के बारे में पता चला, जिनमें 6 से कम फलकें होती हैं, जैसे कि पिरामिड और टेट्राहेड्रल पैक (टेट्रापैक्स)।

अब सवाल यह था कि आप कैसे दिखा सकते हैं कि सभी त्रिविमीय आकृतियों में कम-से-कम चार फलकें होती हैं?

यह पहली बार था जब विद्यार्थियों के सामने 'कम-से-कम' वाक्यांश का उपयोग हो रहा था और इसे समझाने की आवश्यकता थी।

इससे पहले कि हम इस प्रश्न के बारे में किसी आकृति के सन्दर्भ के बिना सोचें, हमें विभिन्न आकृतियों का एक व्यावहारिक अध्ययन करना था। मेरा मानना है कि यह महत्त्वपूर्ण है कि मूलभूत अवधारणाओं को काग़ज़ पर दर्शाने से पहले विद्यार्थियों को ठोस वस्तुओं के साथ के अपने व्यावहारिक अनुभवों की मदद लेने दी जाए।



चित्र-8

फिर हमने देखा कि एक द्विविमीय आकृति बनाने के लिए न्यूनतम कितने बिन्दु आवश्यक हैं। यह बहुत सरल था क्योंकि विद्यार्थियों को त्रिभुज के बारे में पता था। उन्होंने कहा, 'तीन'। अब सवाल यह था कि तीसरी विमा बनाने के लिए क्या आवश्यक है? क्या एक बिन्दु पर्याप्त होगा?

यदि हम एक त्रिभुज बनाते हैं और त्रिविमीय आकृति बनाने के लिए न्यूनतम बिन्दुओं का उपयोग करते हैं, तो इस तरह की आकृति में कितनी फलकें होंगी?

जल्द ही सभी को इस कथन का प्रमाण देखने को मिल गया कि 'त्रिविमीय आकृति में न्यूनतम 4 फलकें होती हैं।'

सवाल 8

"जब आप किसी आकृति का एक टुकड़ा काटते हैं, तो आप उसका क्षेत्रफल व परिमाप दोनों कम कर देते हैं!" क्या यह कथन हर स्थिति के लिए सत्य है, कभी-कभी सत्य है, अथवा कभी भी सत्य नहीं है? क्या यह केवल कुछ विशेष परिस्थितियों में ही सत्य है?

यदि ज़रूरी हो तो विद्यार्थी फिर से काग़ज़ की आकृतियाँ काटने के प्रयोग को कर सकते हैं। हमारा इरादा अन्ततः तर्क के माध्यम से समझ तक पहुँचने पर केन्द्रित है, लेकिन तर्क से पहले प्रयोग हो सकता है।

चित्र-9

जब मैंने कक्षा-6 के विद्यार्थियों के सामने इस प्रश्न को रखा, तो शुरू में वे इस बात को लेकर काफ़ी आश्वस्त थे कि क्षेत्रफल व परिमाप कम होंगे। क्षेत्रफल के बारे में उनका तर्क यह था कि आकृति पहले से एक निश्चित स्थान को घेरती है और यदि उसे काटकर छोटा बना दिया जाए तो वह कम जगह घेरेगी। यह तर्क समझ में आता है।

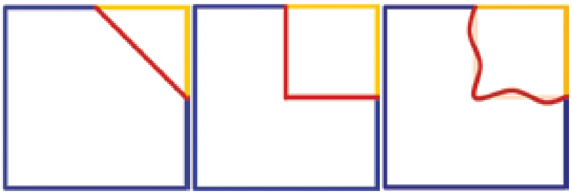
परन्तु उन्होंने यह तर्क भी दिया कि छोटी आकृति का परिमाप भी छोटा होना चाहिए। मैंने उनसे पूछा, "क्या सच में ऐसा है?"

इस बात ने उनके मन में कुछ सन्देह पैदा किया और वे अपने कथन की सच्चाई के बारे में सोचने लगे।

हमने काग़ज़ की कुछ आकृतियाँ लीं और उन्हें काटकर उनके परिमाप की लम्बाई जाँची। हमने कई तरह से उन्हें काटा जैसे कि ज़िगज़ैग कट, घुमावदार कट, सीढ़ीनुमा कट (stepped cut) आदि।

धीरे-धीरे हम इस प्रश्न की खोजबीन की ओर बढ़े कि क्या होता है जब हम एक सीधी रेखा को ज़िगज़ैग रेखा या लहरदार रेखा से बदलते हैं। हमने दो बिन्दुओं के बीच की सबसे छोटी दूरी पर चर्चा के साथ अपनी बातचीत को समाप्त किया।

यह स्पष्ट हुआ कि किसी आकृति के एक टुकड़े को काटने से उसके परिमाप पर तीन अलग-अलग तरीक़ों से प्रभाव पड़ सकता है। परिमाप समान रह सकता है **(चित्र-10 ब)**, कम हो सकता है **(चित्र-10 अ)** और बढ़ **(चित्र-10 स)** भी सकता है। यह काटने के तरीक़े पर निर्भर करता है।



चित्र-10 अ चित्र-10 ब चित्र-10 स

यह मेरे लिए एक उदाहरण था कि कैसे एक साधारण-सा प्रश्न बहुत अधिक खोजबीन का कारण बन सकता है।

क्या होगा यदि काग़ज़ को एक आयत के रूप में मोड़ा जाए और मोड़ के बीचों-बीच L आकृति का एक कट लगा दिया जाए?

सवाल 9

यहाँ एक प्रश्न दिया गया है जिसे कक्षा-6 या 7 के विद्यार्थियों के साथ आज़माया जा सकता है।

क्या यह कथन सत्य है, "किसी संख्या का दुगुना मान हमेशा उस संख्या से अधिक होता है? " अपने जवाब को प्रमाणित करें।

शुरुआत में यह कथन कई विद्यार्थियों को सही लग सकता है। लेकिन जब वे विभिन्न प्रकार की संख्याओं को देखना शुरू करते हैं, तो उन्हें समझ आ जाता है कि यह कथन हमेशा सत्य नहीं है।

चित्र-11

सवाल 10

क्या यह कथन सत्य है, "यदि कोई संख्या 10 और 15 से विभाजित हो जाती है, तो वह संख्या 150 से भी विभाजित होगी? " अपने उत्तर का प्रमाण दें।

विद्यार्थियों को चाहिए कि प्रमाण की समस्याओं को हल करते समय वे पहले से सीखी गई अवधारणाओं और तथ्यों के ज्ञान का उपयोग करें। दिए गए सवाल में कथन की असत्यता को प्रमाणित करने के लिए विद्यार्थी गुणनखण्डों, अभाज्य गुणनखण्डन और लघुत्तम समापवर्त्य के ज्ञान का उपयोग करेंगे।

चित्र-12

सवाल 11

सिद्ध करें कि दो क्रमागत पूर्ण संख्याओं का गुणनफल सदैव एक सम संख्या होती है।

इस कथन पर अपने तर्क प्रस्तुत करने के लिए विद्यार्थी गुणन को बार-बार योग (repeated addition) के रूप में समझने के अपने ज्ञान का उपयोग करेंगे।

सवाल 12

यहाँ एक प्रश्न दिया गया है जिसे कक्षा-6 व 7 के स्तर पर आज़माया जा सकता है।

सिद्ध करें कि यदि b एक धनात्मक पूर्णांक है, तो $3b$ का मान हमेशा $12b$ के मान का एक गुणनखण्ड होगा।

इस कथन की सत्यता को स्थापित करने के लिए विद्यार्थी धनात्मक संख्या, गुणज व गुणनखण्ड के सम्बन्धों के अपने ज्ञान का उपयोग करेंगे।

एक और खोजबीन यह हो सकती है कि क्या यह कथन ऋणात्मक पूर्णांकों के लिए भी सत्य है।

शिक्षक चाहें तो इसे आगे बढ़ा सकते हैं और 3 को k और 12 को nk से बदलकर सामान्यीकरण के विचार से विद्यार्थियों को अवगत करा सकते हैं।

चित्र-13

सवाल 13

ऐसे प्रश्न पूछकर जिनमें संख्या के गुणधर्मों और अंकगणित के नियमों की अच्छी समझ शामिल हो, विद्यार्थियों को विषयवस्तु को बेहतर तरीक़े से समझने की चुनौती दी जाती है।

सिद्ध करें कि 3 के दो गुणजों के बीच का अन्तर भी 3 का गुणज होता है।

इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए विद्यार्थी अंकगणित के किन नियमों या तथ्यों का उपयोग करेंगे?

1	2	**3**	4	5	**6**	7	8	**9**	10
11	**12**	13	14	**15**	16	17	**18**	19	20
21	22	23	**24**	25	26	**27**	28	29	**30**
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

चित्र-14

सवाल 14

यहाँ एक प्रश्न दिया गया है जिसे मैंने कक्षा-7 व 8 के विद्यार्थियों के साथ आज़माया था।

सिद्ध करें कि जब दो क्रमागत धनात्मक सम संख्याओं के गुणनफल में एक जोड़ा जाता है तो परिणाम एक वर्ग संख्या (square number) होती है।

मुझे यह उपयोगी लगता है कि विद्यार्थियों को इस प्रश्न का प्रमाण खोजने के लिए बिन्दुओं के क्रमविन्यास (array) का उपयोग करने के लिए प्रेरित किया जाए। जब वे बिन्दुओं के क्रमविन्यास के साथ काम करते हैं और बिन्दुओं को पुनर्व्यवस्थित करते हैं, तो वे यह समझने लगते हैं कि पुनर्व्यवस्था के दौरान वर्गाकार क्रमविन्यास को बनाने के लिए एक बिन्दु कम पड़ जाता है।

जो विद्यार्थी बीजगणितीय प्रक्रियाओं के साथ सहज हैं, वे इस प्रश्न के लिए बीजगणितीय प्रमाण निकाल सकते हैं।

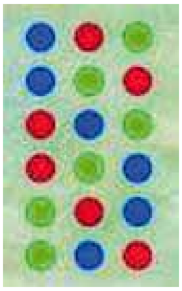
शिक्षक बिन्दुओं की व्यवस्था को बीजगणितीय प्रमाण की अवधारणा से जोड़ सकते हैं।

सवाल 15

क्रमचय व संचय से सम्बन्धित प्रश्न :

1, 2 और 3 का उपयोग करके आप 3 अंकों वाली कितनी अलग-अलग संख्याएँ बना सकते हैं? क्या आप इसे अधिकतम संख्या के रूप में प्रमाणित कर सकते हैं?

इस तरह के प्रश्नों को हल करने के लिए व्यवस्थित क्रमबद्ध रणनीतियों (systematic ordering strategies) का उपयोग किया जाता है। विद्यार्थी एक संख्या से शुरू करके सभी सम्भावित संयोजनों को निकाल सकते हैं। फिर वे अगली संख्या पर जाते हैं।



चित्र-15

सवाल 16

विद्यार्थियों को बीजगणितीय व्यंजकों के साथ सहज होने और अपनी समझ के पक्ष में तर्क देने के लिए प्रोत्साहित करें।

कौन बड़ा है, $3n$ या $n + 3$? आप अपने उत्तर को कैसे सही ठहराएँगे?

सवाल 17

यहाँ एक प्रश्न दिया गया है जिसे कक्षा-8 के स्तर पर आज़माया जा सकता है।

तीन संख्याओं m, n और p की विशेषता है कि m, n को विभाजित करता है; n, p को विभाजित करता है और p, m को विभाजित करता है। इन संख्याओं के बारे में क्या सत्य होना चाहिए? अपने अनुमान को प्रमाणित करें।

चित्र-16

सवाल 18

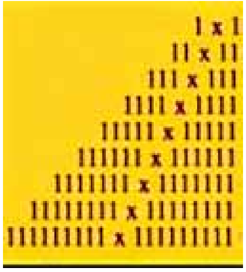
कक्षा-8 के लिए एक और प्रश्न इस प्रकार है :

X और Y दो अलग-अलग संख्याएँ हैं। प्रमाणित करें कि उनका माध्य $(X+Y)/2$, X और Y के बीच में स्थित होता है।

सवाल 19

यहाँ एक प्रश्न दिया गया है जिसके लिए गुणन प्रक्रिया और उससे सम्बन्धित तर्क की अच्छी समझ की आवश्यकता है।

11111111×11111111 के गुणनफल में सबसे बड़ा अंक क्या है? आप यह कैसे सुनिश्चित कर सकते हैं कि आपका उत्तर सही है?

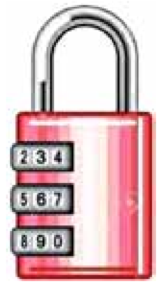


चित्र-17

सवाल 20

यहाँ क्रमचय से सम्बन्धित एक और प्रश्न दिया गया है। क्रमचय और संचय एक ऐसा विषय है जिसमें तर्कपूर्ण आधार और अपने उत्तर के समर्थन में दिए जाने वाले तर्कों से जुड़े प्रश्नों को खोजना आसान होता है।

केवल सम अंकों से बनने वाली कितनी तीन अंकीय संख्याएँ हैं जो 9 से विभाजित होती हैं? क्या आप अपने उत्तर को प्रमाणित कर सकते हैं?



चित्र-18

सवाल 21

यहाँ कक्षा-7 के लिए एक प्रश्न दिया गया है जिसमें सन्निकटन (round off) की अवधारणा शामिल है।

किसी चार अंकीय संख्या को दो अंकों तक सन्निकटित करने पर उत्तर 8000 आता है। संख्या का सबसे बड़ा मान क्या हो सकता है? संख्या का सबसे छोटा मान क्या हो सकता है? अपने उत्तर को प्रमाणित करें।

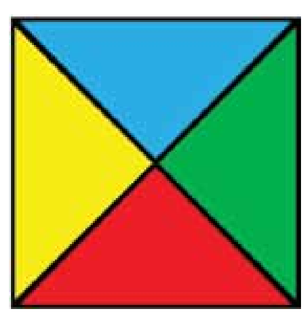
सवाल 22

यहाँ मिडिल स्कूल के विद्यार्थियों के साथ समूह में काम करने के लिए कुछ प्रश्न दिए गए हैं।

क्रेडिट : https://www.youcubed.org/tasks/paper-folding/

एक वर्गाकार काग़ज़ लें और एक नई आकृति बनाने के लिए मोड़ बनाएँ। बताएँ कि आपको कैसे पता कि आपके द्वारा निर्मित आकृति का क्षेत्रफल प्रश्न में दिए गए क्षेत्रफल के बराबर है।

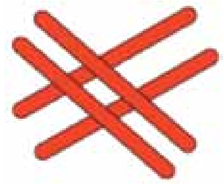
- एक त्रिभुज बनाएँ जिसका क्षेत्रफल मूल वर्ग के क्षेत्रफल का ठीक 1/4 भाग हो। अपने साथी को यक़ीन दिलाएँ कि इसका क्षेत्रफल 1/4 है।
- एक और त्रिभुज बनाएँ जिसका क्षेत्रफल मूल वर्ग के क्षेत्रफल का 1/4 भाग हो, परन्तु यह आपके द्वारा निर्मित पहले त्रिभुज के सर्वांगसम न हो। अपने साथी को यक़ीन दिलाएँ कि इसका क्षेत्रफल 1/4 है।
- एक वर्ग बनाएँ जिसका क्षेत्रफल मूल वर्ग के क्षेत्रफल का ठीक 1/2 भाग हो। अपने साथी को यक़ीन दिलाएँ कि इसका क्षेत्रफल 1/2 है।
- एक और वर्ग बनाएँ जिसका क्षेत्रफल मूल वर्ग के क्षेत्रफल का 1/2 भाग हो, परन्तु इसकी स्थिति (orientation) आपके द्वारा तीसरे कार्य में निर्मित वर्ग की स्थिति से अलग हो। अपने साथी को यक़ीन दिलाएँ कि इसका क्षेत्रफल 1/2 है।



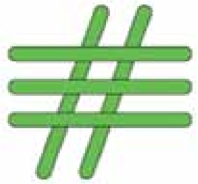
चित्र-19

सवाल 23

क्रेडिट : NRICH



चित्र-20



चित्र-21

चार छड़ियाँ (समान्तर छड़ियों के दो सेट) हैं, जो चार क्रॉसिंग बनाती हैं।

यदि पाँच छड़ियाँ (समान्तर छड़ियों के दो सेट समेत) हों तो वे कितने क्रॉसिंग बनाएँगी?

अब यदि आपके पास सात छड़ियाँ (समान्तर छड़ियों के दो सेट समेत) हों तो क्या आप उन्हें इस प्रकार व्यवस्थित कर सकते हैं कि आपको क्रॉसिंग की अलग संख्या प्राप्त हो?

- आप कम-से-कम कितने क्रॉसिंग बना सकते हैं?
- आप ज़्यादा-से-ज़्यादा कितने क्रॉसिंग बना सकते हैं?
- क्या आप सात छड़ियों से बनाए जा सकने वाले सभी क्रॉसिंग की संख्या बता सकते हैं?

आपको यह सिद्ध करने के लिए क्या करना होगा कि आपने सभी सम्भावित क्रॉसिंग बना लिए हैं या आप इसे कैसे दिखा सकते हैं?

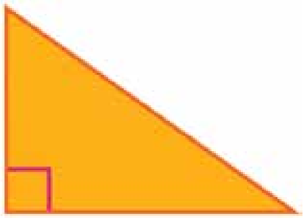
सवाल 24

यहाँ कक्षा-8 के लिए एक प्रश्न दिया गया है।

पूछने के लिए उपयुक्त प्रश्नों का चयन करना और यह स्पष्ट होना महत्त्वपूर्ण है कि आप किन विचारों को व्यक्त करना चाहते हैं। साथ ही यह भी ध्यान रखना चाहिए कि क्या विद्यार्थी उन प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं। यदि प्रश्न बहुत मुश्किल हैं और विद्यार्थी उन्हें हल करने में आगे नहीं बढ़ पा रहे हैं, तो फिर उनसे पूछने का कोई मतलब नहीं रह जाता है।

एक समकोण त्रिभुज की सभी भुजाओं की लम्बाई पूर्णांक में हैं। सिद्ध करें कि अगर दो सबसे छोटी भुजाओं की लम्बाई सम संख्या है, तो तीसरी भुजा की लम्बाई भी सम संख्या होगी।

अधिकांश विद्यार्थी इस प्रश्न को हल करने के लिए बीजगणित और पाइथागोरस प्रमेय के अपने ज्ञान का उपयोग करते हैं। क्या इस प्रश्न का कोई ज्यामितीय हल भी है?



चित्र-18

सवाल 25

यहाँ दूरी-समय के ग्राफ़ की सही समझ पर आधारित एक प्रश्न दिया गया है।

"यदि कोई व्यक्ति अपने घर के चारों ओर एक वृत्त की आकृति में घूमता है, तो समय-दूरी का ग्राफ़ एक वृत्त जैसा होगा।" यह कथन सत्य है या असत्य? अपने उत्तर को प्रमाणित करें।

चित्र-23

सवाल 26

सिद्ध करें कि यदि आप चार क्रमागत संख्याओं के गुणनफल में 1 जोड़ते हैं, तो उत्तर हमेशा एक पूर्ण वर्ग (perfect square) होता है।

हमने चार क्रमागत संख्याओं के कुछ समूहों के साथ इसे करके देखा।

1,2,3,4	2,3,4,5	6,7,8,9	11,12,13,14

1, 2, 3, 4 का गुणनफल 24, और $24 + 1 = 5^2$ है।

2, 3, 4, 5 का गुणनफल 120, और $120 + 1 = 121 = 11^2$ है।

6, 7, 8, 9 का गुणनफल 3024, और $3024 + 1 = 3025$ है $= 55^2$।

चुनौती थी इसका प्रमाण खोजना। हमने बीजगणितीय पद्धति की मदद ली और ख़ुद को $a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a + 1$ जैसे जटिल व्यंजकों में फँसा हुआ पाया। यह मददगार नहीं था।

हमने प्रश्न में आने वाली संख्याओं को फिर से देखा। जब हमने दोनों सिरों पर स्थित दो संख्याओं और बीच में स्थित दोनों संख्याओं का गुणा किया तो हमने एक बहुत विशिष्ट पैटर्न देखा :

चित्र-24

- 1, 2, 3, 4 की स्थिति में, हमने देखा कि $1 \times 4 = 4$, $2 \times 3 = 6$, और 4 और 6 के बीच में 5 है।
- 2, 3, 4, 5 की स्थिति में, हमने देखा कि $2 \times 5 = 10$, $3 \times 4 = 12$, और 10 और 12 के बीच में 11 है।
- 6, 7, 8, 9 की स्थिति में, हमने देखा कि $6 \times 9 = 54$, $7 \times 8 = 56$, और 54 और 56 के बीच में 55 है।

प्रत्येक स्थिति में प्राप्त किए गए दो गुणनफल दो क्रमागत सम संख्याएँ हैं।

फिर हमने बिन्दु वाले चित्रों का उपयोग किया और उन बिन्दुओं को विभिन्न तरीक़ों से पुनर्व्यवस्थित करके देखा ताकि वे प्रश्न के प्रमाण को धीरे-धीरे समझ सकें। यहाँ यह बताया गया है कि इस पद्धति ने 1, 2, 3, 4 की स्थिति में कैसे काम किया। हमने सबसे पहले 4×6 के लिए बिन्दु वाला चित्र बनाया :

o o o o o o
o o o o o o
o o o o o o
o o o o o o

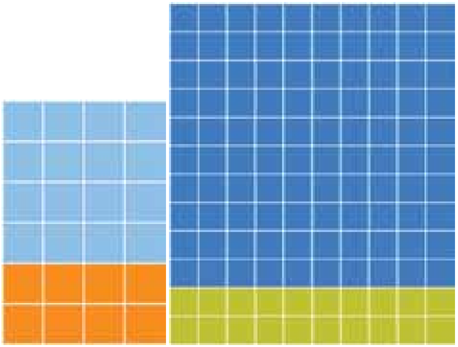
अन्तिम कॉलम को हटाकर, उसे एक पंक्ति में बदलकर और फिर उसे चित्र के नीचे रखकर हमने यह प्राप्त किया :

o o o o o
o o o o o
o o o o o
o o o o o
o o o o

हमने तुरन्त देखा कि हमारे पास एक वर्गाकार क्रमविन्यास है जिसमें ठीक एक इकाई (एक बिन्दु) कम है। अब हम समझ गए कि क्यों $(4 \times 6) + 1$ एक वर्ग है : $(4 \times 6) + 1 = 5^2$।

फिर हमने एक और समूह 2, 3, 4, 5 के साथ काम किया और इसी विधि को अपनाया : $2 \times 5 = 10$, और $3 \times 4 = 12$।

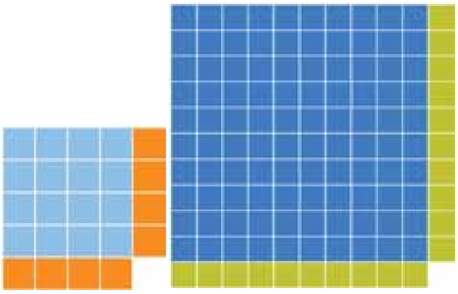
यहाँ इन दोनों स्थितियों के लिए चित्र दिए गए हैं। इनमें बिन्दुओं के क्रमविन्यास के बजाय ग्रिड का उपयोग किया गया है :



चित्र-25

(इन दोनों चित्रों का श्रेय : स्वाती सरकार)

हमें समझ आया कि यह प्रक्रिया किन्हीं भी चार क्रमागत संख्याओं के गुणनफल के लिए काम करेगी



चित्र-26

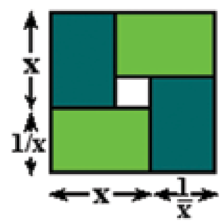
सवाल 27

यहाँ कक्षा-8 के लिए एक प्रश्न दिया गया है।

दिए गए परिणामों को सिद्ध करने में विद्यार्थियों की मदद करने के लिए यहाँ दो दृश्य सहायक सामग्रियाँ दी गई हैं। विद्यार्थियों को बताना है कि इन चित्रों का क्या अर्थ है। चित्र को पढ़ने में विद्यार्थियों की मदद करने के लिए शिक्षकों को कुछ प्रेरक प्रश्न पूछने की आवश्यकता हो सकती है। फिर परिणाम पर पहुँचने के लिए उन्हें क्षेत्रफल और बीजगणित के अपने ज्ञान का उपयोग करने की आवश्यकता होगी।

यह चित्र कैसे दिखाता है कि एक धनात्मक संख्या और इसके व्युत्क्रम (reciprocal) का योग कम-से-कम 2 होता है?

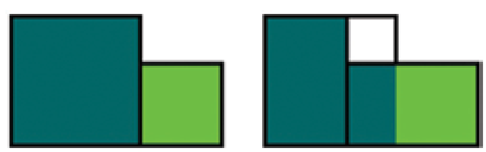
क्रेडिट : (Nelson, p. 62)



चित्र-27

नीचे दिए गए दो चित्र यह कैसे 'सिद्ध' करते हैं कि $a2 + b2 \geq 2ab$?

विद्यार्थियों को पुनर्व्यवस्था के इस तरीक़े की व्याख्या करने के लिए इन दो चित्रों के बीच के अन्तर पर ध्यान देना होगा और परिणाम पर पहुँचने के लिए क्षेत्रफल और निगमन तर्क के अपने ज्ञान का उपयोग करना होगा।



चित्र-28

पद्मप्रिया शिराली

पद्मप्रिया शिराली सह्याद्रि स्कूल (पुणे) और ऋषि वैली (आन्ध्र प्रदेश) में स्थित कम्युनिटी मैथ सेंटर में 1983 से काम कर रही हैं। यहाँ वह विभिन्न विषय पढ़ाती रही हैं, जैसे कि गणित, कम्प्यूटर अनुप्रयोग, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू। 1990 के दशक में, उन्होंने चेन्नई के प्रसिद्ध गणित शिक्षक स्वर्गीय श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ मिलकर काम किया था। वह उस टीम का हिस्सा थीं जिसने ऋषि वैली रूरल सेंटर के मल्टीग्रेड एलिमेंट्री लर्निंग प्रोग्राम को बनाया था। इस प्रोग्राम को 'स्कूल इन ए बॉक्स' के नाम से जाना जाता है। पद्मप्रिया से padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

यह अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय तथा कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेंटर, ऋषि वैली की संयुक्त पत्रिका Azim Premji University At Right Angles (a resource for school mathematics) जुलाई, 2023 में प्रकाशित Logic, Reasoning and Proof का हिन्दी अनुवाद है।

अनुवाद : निदेश सोनी

पुनरीक्षण एवं कॉपी एडीटिंग : कविता तिवारी

सम्पादन : राजेश उत्साही