ವರ್ಗಮೂಲ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದರ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣ

ಗೌರಿ ಘೋರ್ಮಾಡೆ

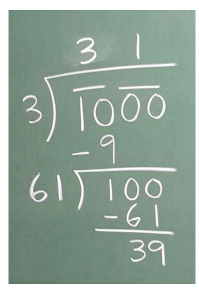
ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ದೃಶ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪರಿಹರಿಸಲಾದ ತರಗತಿಯೊಂದರ ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಅನುಭವವನ್ನು ಲೇಖಕಿ ಇಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಒಂದು ಹೆಜ್ಜೆ ಮುಂದಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ, ಈ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ಆ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ.

ಛತ್ತೀಸ್‌ಗಢದ ಧಮ್ತುರಿ ಎನ್ನುವ ಊರು. ಅಲ್ಲಿನ ಅಜೀಂ ಪ್ರೇಮ್‌ಜಿ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ನಾನು 8ನೇ ವರ್ಗದ ಗಣಿತ ತರಗತಿ ವೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದ ಸಂದರ್ಭ. ಆ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಕರು ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲು ಒಂದು ನವೀನ ವಿಧಾನವನ್ನ ಬಳಸಿದರು. ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಳಸುವ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ವಿಧಾನಗಳಿಗಿಂತ ಭಿನ್ನವಾದಂತಹ ದೃಶ್ಯೀಕರಣದ (visual) ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಆ ಶಿಕ್ಷಕರು ಅನುಸರಿಸಿದ್ದರು. ಅವರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಈ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನವನ್ನು ಮಾಡಿದ್ದೇನೆ. ಇದು ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ಹಾಗೂ ದೃಶ್ಯೀಕರಣದ ವಿಧಾನಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ಬಂಧವನ್ನೂ ಸಹ ಬೆಸೆಯುತ್ತದೆ.

ಶಿಕ್ಷಕರು ತಮ್ಮ ಪಾಠವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯೊಂದಿಗೆ ಆರಂಭಿಸಿದ್ದರು:

ಅಡ್ಡ ಮತ್ತು ಕಂಬ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ನೆಡಲು ನಾನು 1000 ಸಸಿಗಳನ್ನು ಕೊಂಡು ತಂದೆ. ಅಕಸ್ಮಾತ್ ಅಡ್ಡ ಮತ್ತು ಕಂಬ ಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ನಾನಂದುಕೊಂಡಂತೆ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನೆಡಲು ಇನ್ನೂ ಎಷ್ಟು ಸಸಿಗಳ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದೆ?

ಮೊದಲಿಗೆ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಹೇಗೆ ಬಗೆಹರಿಸಬಹುದಿತ್ತು ನೋಡೋಣ. ಇದರ ಪ್ರಕಾರ, ನಾವು ಹುಡುಕಬೇಕಾದ್ದು ಮೂರಂಕಿ ಗರಿಷ್ಠ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ. ಅಡ್ಡ ಮತ್ತು ಕಂಬ ಸಾಲುಗಳು ಸಮವಾಗಿರಬೇಕೆನ್ನುವುದೇ ನಮ್ಮನ್ನು ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಹುಡುಕಾಟದಲ್ಲಿ ಇಳಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೂರಂಕಿಯ ಗರಿಷ್ಠ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ ಏಕೆ? ಅಕಸ್ಮಾತ್ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನಾವು ~~ಆದರ್ಶ ವಿಧಾನದ~~ ದೀರ್ಘ ಭಾಗಾಕಾರ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ಬಗೆಹರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದ್ದೇ ಆದಲ್ಲಿ, ನಮಗೆ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರ 1000ದೊಳಗಿರುವ ಗರಿಷ್ಠ ಪರಿಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲ. ಇದು ಮೂರಂಕಿಯ ಗರಿಷ್ಠ ಪರಿಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲವೇ? ಹಾಗಾಗಿ, ಈ ತರ್ಕದ ಅನ್ವಯ, ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ್ದು ಮೂರಂಕಿ ಗರಿಷ್ಠ ವರ್ಗದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿ ನೋಡಿದರೆ, ಇದು ನಾಲ್ಕಂಕಿಯ ಕನಿಷ್ಠ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಕೂಡ. ಹೌದು. ನಮಗೆ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿರುವ ಸಸಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 1000ವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಸಾಕು.



ಚಿತ್ರ 1

ಚಿತ್ರ 1ರಲ್ಲಿ ಆದರ್ಶ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ 1000ದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಪ್ರಕಾರ, ನಾವು 32ರ ವರ್ಗದಿಂದ 1000ವನ್ನು ಕಳೆದರೆ, ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಉತ್ತರ ಸಿಗುತ್ತದೆ.

$32^2 - 1000 = 24$

ಹಾಗಾಗಿ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರ, 24. ಈಗ 1000ದ ಜಾಗದಲ್ಲಿ N ಎಂದೂ, 31ರ ಜಾಗದಲ್ಲಿ m ಎಂದು ಬಳಸಿ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಮೇಲಿನ

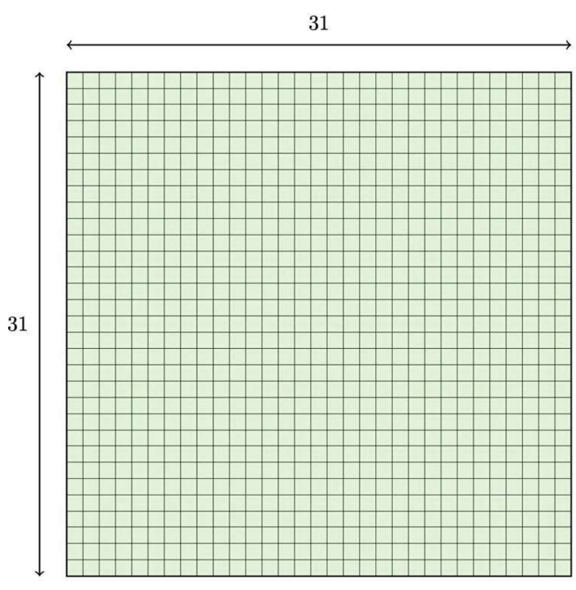
ಪ್ರಮುಖ ಪದಗಳು: ಚೌಕಗಳು, ವರ್ಗ ಮೂಲಗಳು, ಹೇಳಿಕೆ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು, ದೃಶ್ಯೀಕರಣ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು.

ಸಮೀಕರಣ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ:
$(m+1)^2 - N$ = ಬೇಕಾದ ಸಸಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಗಮನದಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಮುಖ್ಯ ಅಂಶವೆಂದರೆ, ಆದರ್ಶ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದ ನಂತರ, ನಾವು ಎರಡು ಎರಡಂಕಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದಕ್ಕೂ ಮುನ್ನ, ಮೂರು ಅಥವಾ ನಾಲ್ಕಂಕಿಯ ಕನಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಗರಿಷ್ಠ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಕಷ್ಟು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಲಾಗಿತ್ತು. ಹಾಗಾಗಿ, ಹಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಆದರ್ಶ ವಿಧಾನವನ್ನೇ ಬಳಸಿ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರು. ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿ ಪರಿಹರಿಸಿದರೂ ಕೂಡ.

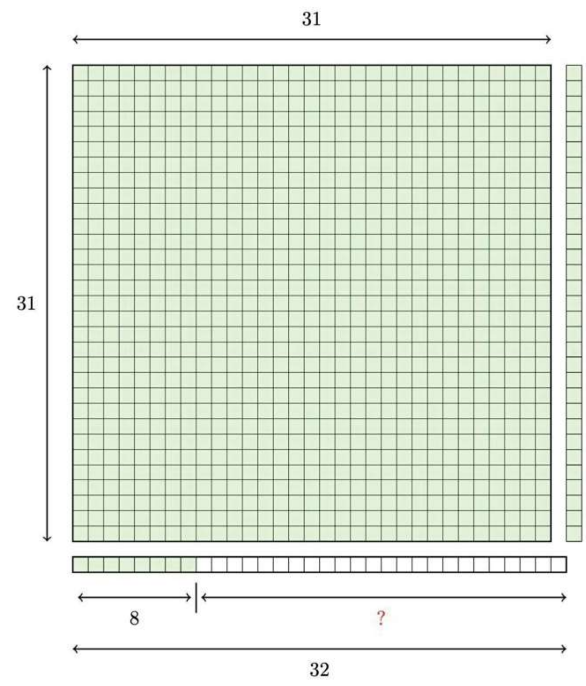
ಆದರೆ ಶಿಕ್ಷಕರ ವಿವರಣೆ ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿತ್ತು. ಅವರು ಒಟ್ಟಿಗೇ ಮೂರಂಕಿಯ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕಂಕಿಯ ಕನಿಷ್ಠ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಲಿಲ್ಲ. ಅದರ ಬದಲಾಗಿ, ಚಿತ್ರ 2ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅಡ್ಡ, ಕಂಬ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದರು. ಸಾವಿರ ಸಸಿಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಕೇವಲ *31 x 31* ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದು, ಆದರ್ಶ ವಿಧಾನದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವ ಶೇಷದಷ್ಟು ಸಸಿಗಳು ಉಳಿಯುತ್ತವೆ. ಈ ಉಳಿದ ಸಸಿಗಳನ್ನು ಚೌಕದ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬಹುದೆಂದು ಶಿಕ್ಷಕರು ಹೇಳಿದರು. ಒಟ್ಟು ಸಸಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ 32ರ ವರ್ಗವನ್ನೇ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕೆನ್ನುವ ಸುಳಿವನ್ನು ಇದು ನೀಡಿತು. ಹೀಗೆ ದೊರೆತ ವರ್ಗದಿಂದ 1000ವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ದೊರೆಯುವುದೇ ಹೊಸದಾಗಿ ಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಸಸಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ. ಈ ದೃಶ್ಯೀಕರಣದ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ನಮಗೆಲ್ಲೂ 32ರ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲೇಯಬೇಕಾದ ಪ್ರಮೇಯವಿಲ್ಲದಿರುವುದು, ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಲು ಅನುಕೂಲಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 5

ಈಗ ನಮ್ಮ ಬಳಿ ಇರುವ ಸಸಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ N ಎಂದೂ, ಅದು ಪರಿಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದೂ ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಹಾಗೆಯೇ ಇದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಗರಿಷ್ಠ ಪರಿಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ m^2 ಆಗಿರಲಿ. ಈ N ಸಸಿಗಳನ್ನು $m \ x \ m$ ಚೌಕಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದ ಮೇಲೆ, ಉಳಿಯುವ ಸಸಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $N - m^2$ ಆಗಿರಲೇಬೇಕು. ಈ ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಿದೆವೆಂದು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಆದರ್ಶ ವಿಧಾನದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಶೇಷವೇ ಇದಾಗಿತ್ತು. ಅಂದರೆ $1000 - 31^2 = 39$.

ಈಗ, ಉಳಿದ ಸಸಿಗಳಲ್ಲಿ, ಚೌಕದ ಒಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾಗಿ m ಸಸಿಗಳನ್ನಷ್ಟೇ ನೆಡಬಹುದು. ಹೀಗೆ, ಒಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ m ಸಸಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದ ಮೇಲೆ, ಉಳಿಯುವ ಸಸಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $(N - m^2) - m$ ಅಂದರೆ, ಹಿಂದಿನ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ, $(1000 - 31^2) - 31 = 39 - 31 = 8$. ಈ ಹಿಂದಿನ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $39 - 31 = 8$ ಸಸಿಗಳನ್ನು ಚೌಕದ ಒಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ನೆಟ್ಟಿದ್ದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ (ಚಿತ್ರ 3). ಆದರೀಗ ಚೌಕದ ಮತ್ತೊಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ $(m + 1)$ ಸ್ಥಾನಗಳು ಉಂಟಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾಗಿ, ನಾವು ಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಸಸಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $(m + 1) - [(N - m^2) - m]$.
ಈ ಹಿಂದಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿದರೆ, ನಾವು ಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ್ದು $(31 + 1) - 8 = 24$ ಸಸಿಗಳು.



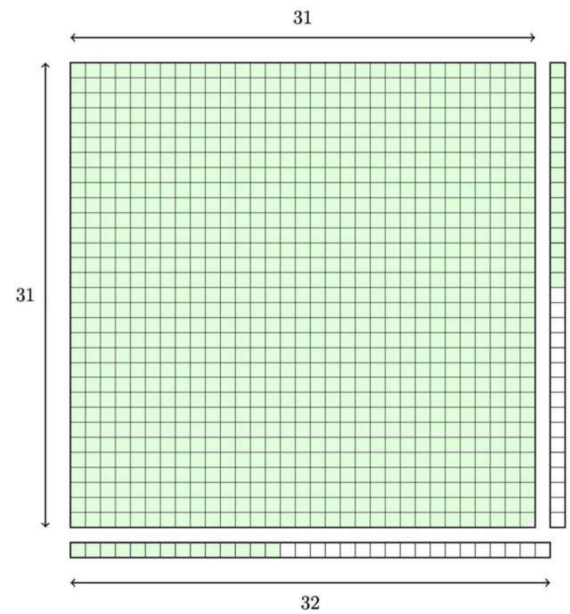
ಚಿತ್ರ 3

ಆದರೆ ನಾವು 1000ದ ಬದಲು, *990* ಸಸಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಆರಂಭಿಸಿದ್ದರೆ, ತಮ್ಮ ಈ ವಾದ ಸರಿಯಾಗುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $(N - m^2) - m < m$ ಆಗುವುದರಿಂದ, ಇದರರ್ಥ, ಚೌಕದ ಒಂದು ಬದಿಯನ್ನು ನಾವು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಸಸಿಗಳಿಂದ ತುಂಬಲಾಗಲಿಲ್ಲ ಎಂದರ್ಥ. ಆದರೆ ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪರಿಹರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಎಲ್ಲಾ ಸಸಿಗಳನ್ನು, ಚೌಕದ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ನೆಡುವುದಕ್ಕಿಂತ,

ಒಂದೊಂದರಂತೆ, ಚೌಕದ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ನೆಡುತ್ತಾ ಹೋಗುವುದು. (ಚಿತ್ರ 4ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ).

ಸಾಮಾನ್ಯ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ, ಚೌಕದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ಸೇರಿ $m + m + 1 = 2m + 1$ ಸ್ಥಳಗಳು ಇರುವುದರಿಂದ, ಉಳಿದ $N - m^2$ ಸಸಿಗಳನ್ನು ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ನೆಟ್ಟಲ್ಲಿ, ನಾವು ಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಸಸಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $2m + 1 - (N - m^2)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಗಮನಾರ್ಹ ಸಂಗತಿಯೆಂದರೆ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರದ ಬದಲಾಗಿ ಕೂಡುವ ಮತ್ತು ಕಳೆಯುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನಷ್ಟೇ ಮಾಡಬೇಕಿರುವುದು. ಇವು ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕಿಂತ ಸರಳವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ತಪ್ಪಾಗುವ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಕಡಿಮೆ. ಅಂತೆಯೇ, $(m + 1)^2 - N$, $(m - 1)^2 - N$ ಹಾಗೂ $2m + 1 - (N - m^2)$ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕೆನ್ನುವುದನ್ನು ದೃಶ್ಯ ರೂಪದ ಮೂಲಕ ಪರಿಶೀಲಿಸುವ ಅವಕಾಶವನ್ನೂ ಸಹ ಇದು ನೀಡುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 4

ಗೌರಿ ಘೋರ್ಮಾಡೆ ಪ್ರಸ್ತುತ ಬೆಂಗಳೂರಿನ ಅಜೀಂ ಪ್ರೇಮ್‌ಜಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದಲ್ಲಿ ಬಿ.ಎಸ್ಸಿ. ಬಿ.ಎಡ್.(ಗಣಿತ)ನ ನಾಲ್ಕನೇ ವರ್ಷದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿ. ಶಾಲಾ ಹಂತದ ಗಣಿತದ ಬಗ್ಗೆ ಅಂತೆಯೇ ಅದರೊಟ್ಟಿಗೆ ಬೆಸೆದಿರುವ ವಿವಿಧ ಬೋಧನಾ ವಿಧಾನಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಪಾರ ಒಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ. ಗಣಿತ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಉನ್ನತ ವ್ಯಾಸಂಗ ಮಾಡುವ ಯೋಜನೆ ಹೊಂದಿರುವುದರೊಟ್ಟಿಗೆ ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲೂ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅನ್ವೇಷಣೆ ನಡೆಸುವ ಆಸಕ್ತಿ ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಶಾಲಾ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಗಣಿತವನ್ನು ಬೋಧಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇವರ ಈ–ಮೇಲ್ ವಿಳಾಸ gauri.ghormade21ug@apu.edu.in

ಅನುವಾದ: **ಯತಿರಾಜ್ ಶರ್ಮ** | ಪರಿಶೀಲನೆ: **ಎಸ್. ಎನ್. ಗಣನಾಥ್**