अंक 20 | नवम्बर 2024
चौ-मासिक | बेंगलूरु
अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय का प्रकाशन

Azim Premji University

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी एट राइट एंगल्स

स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

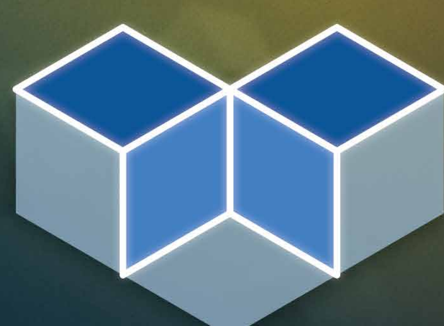
गणित!

प्यार से सीखें,

सीखने से प्यार करें!

गणित से
प्यार के लिए

इससे मिले
दृष्टिकोणों के लिए



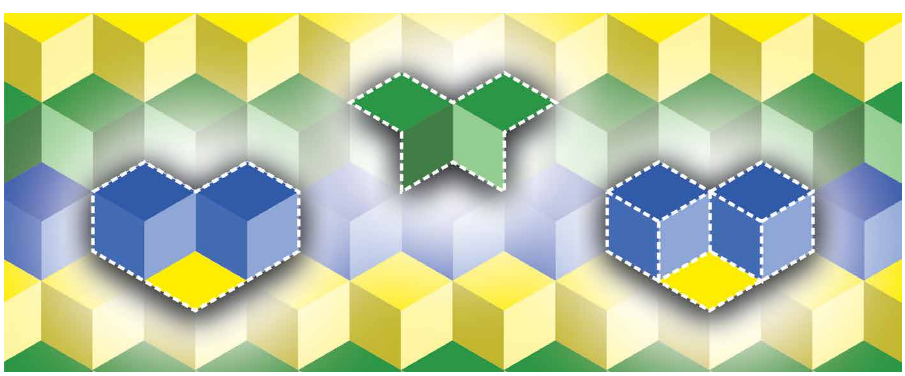
बदलाव आए
गणित से भय नहीं
लगाव बढ़ाएँ

पुलआउट
रुपए-पैसे

गणित से प्रेम

गणित को आमतौर पर दिमाग़ के साथ जोड़ा जाता है और इसमें कोई आश्चर्य नहीं कि गणित में दक्षता गर्व की बात है, वरीयता की बात है, और उन लोगों को ख़ारिज कर देने की बात है जो इसमें उत्कृष्ट नहीं हैं।

लेकिन गणित से लगाव कैसे हो, इसके बारे में कभी सोचा है? इसे देखने के अपेक्षाकृत सौम्य, भयमुक्त तरीक़े के बारे में? बदले हुए नज़रियों की वजह से कक्षा के भीतर आने वाले बदलावों के बारे में? हम किस तरह ऐसे समावेशी, भयमुक्त स्थान बना सकते हैं जो विद्यार्थियों को गणित से प्रेम करना सिखा सकें?



सम्पादक की ओर से...

गणितीय खोज का एक दशक पूरा होने का उत्सव

प्रिय पाठको,

इस अंक के पन्नों पर, हम न सिर्फ़ गणित सीखने-सिखाने के समृद्ध अनुभवों का बल्कि एक असाधारण उपलब्धि का उत्सव भी मना रहे हैं – अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय में मैथ स्पेस की दसवीं सालगिरह। पिछले एक दशक में, यह स्थान गणित शिक्षा में खोजबीन, सीखने और प्रेरणा का एक जीवन्त केन्द्र बन गया है।

गणितीय प्रेरणा का एक दशक

अपने *विशेष* सेक्शन में, दो आकर्षक रचनाओं के माध्यम से हम इस उपलब्धि को चिह्नित कर रहे हैं। **नन्दिता** हमारे लिए एक ऐसा विचारोत्तेजक इंटरव्यू लाई हैं जो मैथ स्पेस की यात्रा और बीते सालों में इसके प्रभाव पर विचार करता है। इसका साथ देने के लिए है एक फ़ोटो फ़ीचर जो मैथ स्पेस में रखी अनोखी गणितीय सामग्री (*mat(h)erials*) को दर्शाता है, और पाठकों को उन संसाधनों की एक दृश्यमयी यात्रा पर ले जाता है जिन्होंने असंख्य शिक्षार्थियों को प्रेरित किया है। साथ मिलकर, ये लेख जिज्ञासा की उस भावना और गहरी समझ को प्रस्तुत करते हैं जो मैथ स्पेस को परिभाषित करती है।

कक्षा से खेल के मैदान तक : एक्शन में गणित

हमारे *कक्षा में* सेक्शन में कई तरह के लेख हैं, और हर एक में प्रारम्भिक गणितीय शिक्षा के महत्त्वपूर्ण पहलुओं को उठाया गया है। **नारायण** जोड़-घटाने से जुड़े इबारती सवालों को सिखाने की चुनौती लेते हैं, और शिक्षकों के लिए व्यवहारिक कार्यनीतियाँ प्रस्तुत करते हैं। **अस्मा** और **जीवेश** बाल-शिक्षार्थियों को पैटर्न से परिचित कराने के अपने कक्षा अनुभव साझा कर रहे हैं। **क्षमा** मॉण्टेसरी-आधारित गणितीय वस्तुओं पर प्रकाश डालती हैं और मार्गदर्शन देती हैं कि इन्हें किस तरह नियमित कक्षाओं में इस्तेमाल के अनुकूल बनाया जा सकता है। **अनुष्का** छोटे बच्चों को एल्गोरिदम की अवधारणा से परिचित कराने के लिए नई सूझ-बूझ, नए नज़रिए पेश करती हैं ताकि इन जटिल विचारों को कम उम्र में ही बच्चों के लिए सुगम बनाया जा सके।

गणित का मज़ा : खेल-खेल में खोजें

गणित का मज़ा सेक्शन कक्षा के परे सीखना जारी रखता है। यह दिखाता है कि किस तरह गणित मज़ेदार भी और बौद्धिक रूप से प्रेरक भी हो सकता है। यह सेक्शन एक नए ढंग से शुरू होता है –शिक्षकों के बीच एक 'ऑनलाइन' चर्चा कि विद्यार्थियों को भिन्न से परिचित कराने का सर्वश्रेष्ठ तरीक़ा क्या हो सकता है। **अजय कुमार** स्वयं करके सीखने वाली पेपर कटिंग गतिविधियों के माध्यम से रैखिक सममिति की पड़ताल करते हैं और इस अमूर्त अवधारणा को आकर्षक एवं स्पर्शनीय बनाते हैं। **तेजस** एक बेहद आकर्षक गणितीय सवाल का सामना करने और उसे सुलझाने का व्यक्तिगत क़िस्सा साझा कर रहे हैं। अन्त में वे हमारे पाठकों को माथापच्ची करने के लिए कुछ सवाल देते हैं।

शिक्षण के लिए सामग्री, समझने के लिए वस्तुएँ

समीक्षा सेक्शन में शिक्षण सामग्री पर ध्यान देना जारी है – गहरी समझ प्रदान करने वाले दो आलेखों के साथ। **मोख़्तर** अपने कक्षा के अनुभव से समझ हासिल करते हुए शिक्षण साधन के रूप में *ऐरो कार्ड* के इस्तेमाल की पड़ताल करते हैं, और गणितीय अवधारणाओं को समझने में विद्यार्थियों की मदद करने में इनकी प्रभाविता पर रोशनी डालते हैं। मैथ स्पेस द्वारा *डाइन्स ब्लॉक* और *स्टैटिक बीड* का एक तुलनात्मक विश्लेषण प्रस्तुत किया गया है। इसमें शिक्षकों को इस बारे में व्यवहारिक मार्गदर्शन दिया गया है कि शिक्षार्थियों के लिए अमूर्त विचारों को ज़्यादा मूर्त बनाने के लिए किस प्रकार इन साधनों का इस्तेमाल किया जा सकता है।

पाठ्यपुस्तक के परे गणित

इस अंक के *पुलआउट* में **पद्मप्रिया** अपनी शृंखला को आगे बढ़ाते हुए रुपए-पैसे की अवधारणा पर ऐसी गतिविधियाँ प्रस्तुत करती हैं जो कक्षा की सीखों का मेल वास्तविक जीवन के उपयोगों से कराती हैं। ये गतिविधियाँ गणितीय अवधारणाओं को रोज़मर्रा के आर्थिक अनुभवों से जोड़ने में बच्चों की मदद करने के लिए तैयार की गई हैं, जो सीखने को ज़्यादा अर्थपूर्ण और व्यवहारिक बनाती हैं।

ऑनलाइन सेक्शन से मिले नए नज़रिए

और अन्त में, हमारे *ऑनलाइन* सेक्शन में ऐसे दो योगदान हैं जो गणितीय समुदाय में छोटी उम्र की आवाज़ों की रचनात्मकता और नवाचार पर प्रकाश डालते हैं। **दीक्षा**, जो एक विद्यार्थी हैं, एक ऐसी दिलचस्प ज्यामितीय संरचना पेश कर रही हैं जो किसी वर्ग को नए और अनपेक्षित तरीक़ों से n भागों में विभक्त करने के लिए पाठकों को चुनौती देती है। **गौरी**, जो एक विद्यार्थी-शिक्षक हैं, वर्गमूलों के बारे में एक ऐसे सवाल को अपने विद्यार्थियों के सामने रखने का अपना अनुभव बाँटती हैं जिसने न सिर्फ़ उनके विद्यार्थियों को बाँधे रखा बल्कि उनके बीच जीवन्त चर्चाओं को भी जन्म दिया।

मैथ स्पेस में सार्थक काम करने का एक दशक पूरा होने का उत्सव मनाते हुए और भविष्य की ओर देखते हुए हमें वे अन्तहीन सम्भावनाएँ स्मरण हो आती हैं जो गणित को सीखना और सिखाना हमारे सामने रखती हैं। आइए, हम गणित की खोजबीन करना, सवाल करना और उसके साथ जुड़े रहना जारी रखें और ऐसे स्थान निर्मित करें जहाँ जिज्ञासा पनपती हो और समझ गहरी होती हो।

आशा है, आपको पढ़ने में मज़ा आएगा और आपकी गणितीय यात्रा हमेशा की तरह रोमांचक होगी!

हार्दिक शुभकामनाएँ,
मोहन आर.
सह-सम्पादक

अनुवाद : भरत त्रिपाठी **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर** : अतुल अग्रवाल

एट राइट एंगल्स अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय का प्रकाशन है। इसका उद्देश्य शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों, विद्यार्थियों और गणित के प्रति रुचि रखने वाले लोगों तक पहुँचना है। यह अलग-अलग विचारों और दृष्टिकोणों की अभिव्यक्ति के लिए एक मंच प्रदान करता है तथा नए और सुविज्ञ दृष्टिकोण, विचारोत्तेजक नज़रिए और नवाचार की कहानियों को प्रोत्साहित करता है। कोशिश है कि यह पत्रिका ‘अकादमिक’ और ‘पेशेवर’ उन्मुख होने के बीच सन्तुलन बना सके।

एट राइट एंगल्स *अंक 20, नवम्बर 2024 का यह* ***हिन्दी अनुवाद*** *जनवरी, 2025 में प्रकाशित हुआ है।*

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी
एट राइट एंगल्स
स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

Azim Premji University
A Publication of Azim Premji University

विशेष

कक्षा में

गणित का मज़ा

समीक्षा

पुलआउट

ऑनलाइन लेख

शानदार, किफ़ायती और कलात्मक : मैथ स्पेस के 10 साल

नन्दिता जयराज

अपने अस्तित्व के एक दशक के दौरान, मैथ स्पेस धीरे-धीरे, लेकिन निश्चित रूप से, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के जीवन्त इकोसिस्टम में ख़ुद को एकीकृत करता गया है।

अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के मैथ स्पेस में पहली बार प्रवेश करते ही मुझे ऐसा लगा जैसे मैं खिलौनों की दुकान में कोई बच्चा हूँ। मेरे सामने हाथ से बने हुए उपकरणों से भरी हुई अलमारियाँ, टेबलें और दराज़ें थीं; लगभग हर उपलब्ध सतह पर रंग-बिरंगी स्टेशनरी बिखरी हुई थी; फ़र्श पर चाय के खाली डिब्बे और लैपटॉप की पैकेजिंग की थप्पियाँ लगी हुई थीं। मुझे लगा कि कमरा व्यवस्थित अव्यवस्था का एक बेहतरीन उदाहरण था, ऐसी अव्यवस्था जो आपकी उँगलियों को इतना बेचैन कर देती कि वे और किसी जगह रुककर कुछ बनाने को उत्सुक हो जाती हैं। कहने की ज़रूरत नहीं है, मैं सरसरी तौर पर यह सब देखते वक़्त इस जगह की संरक्षक स्वाती सरकार द्वारा एक मीटिंग पूरी करने का इन्तज़ार करते हुए मन-ही-मन बहुत ख़ुश थी।

मूलत: एक गणितज्ञ स्वाती 2013 में विश्वविद्यालय के कंटीन्यूइंग स्कूल एंड विश्वविद्यालय रिसोर्स सेंटर से जुड़ने से पहले कुछ वर्षों तक एक शिक्षिका के रूप में काम करती थीं। गणित शिक्षा के प्रति जुनूनी, स्वाती और उनकी सहकर्मी स्नेहा टाइटस (अब *एट राइट एंगल्स* की मुख्य सम्पादक) जो इस 'अपराध' में साझेदार रहीं, ने मिलकर मैथ स्पेस की कल्पना की और उसे मूर्त रूप प्रदान किया।

शुरुआत में पीईएस विश्वविद्यालय कैम्पस (अपना स्थाई कैम्पस बनने से पहले अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय जहाँ काम कर रहा था) के एक छोटे-से कमरे तक सीमित मैथ स्पेस पहले उसी कैम्पस में एक बड़े साझा कमरे में स्थानान्तरित हुआ और फिर सरजापुरा कैम्पस के धूप वाले कमरे में जहाँ इस वक़्त मैं खड़ी हूँ। अगले साल के अन्त तक, मैथ स्पेस अन्ततः अपने भवन में स्थानान्तरित होने वाला है।

स्वाती ने मुझे बताया कि मैथ स्पेस की यात्रा एक कमरे में एक छोटी-सी अलमारी से शुरू हुई थी, जिसे आगामी स्नातक कार्यक्रमों के लिए विज्ञान प्रयोगशाला के रूप में तैयार किया गया था। "अलमारी दिल्ली स्थित एक गणित संसाधन समूह जोड़ो ज्ञान की कुछ सामग्री से भरी हुई थी। कमरे की चाबी सुरक्षा कर्मियों के पास हुआ करती थी, इसलिए जब भी हम सामग्री तक पहुँचना चाहते थे, तो हमें चाबी प्राप्त करने में 20 मिनट लगते थे और काम पूरा होने के बाद वापिस सौंपने में 20 मिनट और लग जाते थे। इस तरह काम चलना सम्भव नहीं था।"

इस बिन्दु पर, स्वाती और टीम को यह एहसास हुआ कि गणित शिक्षा में इन संसाधनों के उपयोग की बहुत सम्भावनाएँ हैं। लेकिन इस क्षमता के दोहन से पहले, उन्हें प्रभावी ढंग से यह दस्तावेज़ीकरण करना होगा कि शिक्षक इनका उपयोग किस प्रकार कर सकते हैं और कार्यशालाओं और प्रकाशनों के माध्यम से इसका प्रसार कैसे कर सकते हैं। वे यह सब कहाँ करेंगे?

स्वाती ने बताया, "उस समय, कैम्पस में एक पॉटरी स्टूडियो था। इसलिए मैंने सोचा कि हम गणित के लिए भी ऐसा ही स्थान क्यों नहीं बना सकते?" दोनों ने ऐसी सम्भावनाएँ तलाशना शुरू की, ताकि वे विज्ञान टीम के साथ कमरा साझा कर सकें। इसकी मंज़ूरी नहीं मिली, हालाँकि, उन्हें एक छोटा कमरा दिया गया जिसमें वे

की-वर्ड : *शिक्षण अधिगम सामग्री, गणित, प्रयोगशाला, शिक्षाशास्त्र, मुक्त खेल, लागत प्रभाविता, पुनर्चक्रण, पुनः उपयोग*

एक गणित प्रयोगशाला शुरू कर सकते थे। "यह सबसे छोटे कमरों में से एक था, यहाँ तक कि उस पॉटरी स्टूडियो से भी छोटा! और वह हमारी बहुत ही साधारण शुरुआत थी," उन्होंने याद करते हुए बताया।

मैथ स्पेस को सफलता का पहला स्वाद चखने में ज़्यादा समय नहीं लगा। 2014 में, विश्वविद्यालय में सिर्फ़ दो प्रोग्राम संचालित थे – एमए एजुकेशन और एमए डेवलपमेंट। अपने पाठ्यक्रम के हिस्से के रूप में, एजुकेशन के विद्यार्थियों को आस-पास के सरकारी और कम शुल्क वाले निजी स्कूलों में साप्ताहिक रूप से शामिल होना होता था। इसके अलावा, फ़ाउण्डेशन द्वारा प्रवासी मज़दूरों के बच्चों के लिए कुछ केन्द्र भी संचालित किए जाते थे। स्वाती ने बताया, "हमारे पास ये ऐसे स्कूल थे जिनके साथ हमारा पहले से ही सम्बन्ध है। इसलिए हमने सोचा : क्यों न उनके साथ कुछ कार्यशालाएँ की जाएँ।" और इसलिए दोनों ने अपने संसाधन एक बड़े कमरे में ले जाना शुरू कर दिया, जहाँ उन्होंने इन स्कूलों के शिक्षकों के लिए दिन भर की कार्यशालाएँ आयोजित कीं। यह हर महीने आयोजित की जाती थीं और हालाँकि उन्होंने प्रतिभागियों की संख्या 30 तक सीमित रखने की बार-बार कोशिश की, फिर भी कार्यशाला में प्रतिभागियों की संख्या 40 से ज़्यादा हो जाना आम बात थी। अगले वर्ष अन्य विषयों ने भी अपनी इसी तरह की कार्यशालाएँ आयोजित करना शुरू किया और ये प्राथमिक और माध्यमिक विद्यालय स्तरों पर आयोजित की गईं। नगरपालिका स्कूलों के लिए कार्यशालाओं के कन्नड़ संस्करण भी आयोजित किए गए। स्वाती ने बताया, "कार्यशालाएँ बहुत सफल रहीं, हमारी कल्पना से भी कहीं अधिक।"

कुछ सालों में, सभी ने यह स्वीकार कर लिया था कि उन्हें और अधिक जगह की ज़रूरत है। जैसा कि हुआ, उन्हें वही बड़ा कमरा दे दिया गया, जो शुरू में उन्हें देने से मना कर दिया गया था। यह कमरा गणित और विज्ञान की एक संयुक्त प्रयोगशाला के रूप में काम करने लगा, जिसमें शिक्षक कार्यशालाओं में भाग लेते थे और विद्यार्थी विज्ञान के प्रयोग करते थे। स्वाती ने बताया, "हर कोई इस बात से ख़ुश था क्योंकि आख़िरकार जगह का पूरी तरह इस्तेमाल हो रहा था।"

मैथ स्पेस का प्रबन्धन करने के अलावा, स्नेहा और स्वाती एमए एजुकेशन के विद्यार्थियों को गणित में पाठ्यक्रम सामग्री विकास नामक एक वैकल्पिक विषय भी पढ़ा रही थीं। पाठ्यक्रम के दौरान, वे अपने विद्यार्थियों को खेल, वर्कशीट और अन्य सामग्री बनाने के लिए प्रोत्साहित करती थीं। "हमने उन्हें याद दिलाया कि इससे न केवल उन्हें ग्रेड और अनुभव मिलेगा, बल्कि वे जो कुछ भी बनाएँगे, वह प्रयोगशाला का हिस्सा बनेगा," उन्होंने याद किया। यह प्रेरणा काम कर गई। विद्यार्थियों ने विभिन्न गणित शिक्षण संसाधन बनाए, जैसे कि भिन्नों को सीखने के लिए एक खेल, त्रिकोणमितीय कार्य देखने के लिए एक मॉडल आदि। "कभी-कभी एक बैच कुछ बनाता था और अगला बैच उसी चीज़ को बनाने के लिए प्रेरित होता था," उन्होंने मुझे गर्व से अपने पूर्व विद्यार्थियों द्वारा बनाए गए संसाधनों से भरी एक अलमारी दिखाते हुए कहा।

इस दौरान मैथ स्पेस ने मंत्रा4चेंज नामक संगठन के साथ एक मूल्यवान साझेदारी भी स्थापित की, जिसने विश्वविद्यालय के कई पूर्व विद्यार्थियों को काम पर रखा। विभिन्न संगठनों में कार्यरत पूर्व विद्यार्थी स्वाती के साथ नए विचारों पर विचार-विमर्श करने के लिए मैथ स्पेस में वापस आते थे। शिक्षा के क्षेत्र में काम करने वाले विभिन्न ग़ैर-सरकारी संगठनों के लोग भी उनसे मिलने आते थे और उनके स्थान का उपयोग कुछ सँवारने और कुछ नया करने के लिए करते थे।

मैथ स्पेस ने आगे विकास के तहत स्टूडेंट असिस्टेंटशिप प्रोग्राम की शुरुआत की, जिसने विद्यार्थियों के लिए विश्वविद्यालय में अंशकालिक नौकरी करना सम्भव बनाया। स्वाती ने बताया, "हमने इसका लाभ उठाया और सेमेस्टर ब्रेक के दौरान कुछ विद्यार्थियों को काम पर रखना शुरू कर दिया।" काम पर रखे गए विद्यार्थी, जो विभिन्न विषयों से सम्बन्धित होते थे, गणित शिक्षण संसाधनों के उत्पादन से सम्बन्धित कार्यों में जुट गए। अपने कौशल के आधार पर, कुछ लोग चित्र बनाते थे, कुछ लोग चीज़ें काटते थे, अन्य लोग प्रबन्धन करते थे, वग़ैरह। इस सुव्यवस्थित तरीक़े ने मैथ स्पेस द्वारा इस तरह की गणित सम्बन्धी सामग्री (mat(h)erial) का थोक उत्पादन करना सम्भव बनाया जो अन्ततः देश भर के स्कूलों में जाएगी।

मैथ स्पेस में अंशकालिक नौकरी के अवसर विद्यार्थियों के बीच इतने लोकप्रिय हो गए कि पिछली गर्मियों में 16 विद्यार्थियों ने नाम दर्ज कराए! स्वाती के लिए यह बहुत सन्तोष की बात थी कि विद्यार्थी सुलभ और उच्च गुणवत्ता वाली गणित शिक्षा की खोज में इतने व्यस्त हैं और इससे भी ज़्यादा ख़ुशी उन्हें यह देखकर होती थी कि लोग मौजूदा किट के लिए नए विचार और सुधार की कोशिश करते हैं। स्वाती ने हँसते हुए कहा, "लोग सोच रहे थे कि आख़िर यहाँ चल क्या रहा है।" ऑडिटिंग के एक दौर के बाद, अधिकारी आश्वस्त हो गए कि सब कुछ ठीक है। "अब हमारी बहुत सख़्त सीमाएँ हैं। हम केवल 10 विद्यार्थियों को ही काम दे

सकते हैं और हमारे पास बहुत बड़ी प्रतीक्षा सूची है।"

इस बीच, विश्वविद्यालय की इंफ्रास्ट्रक्चर मैनेजमेंट फंक्शन (IMF) टीम के साथ एक और रोमांचक साझेदारी पनप रही थी। IMF विश्वविद्यालय के कामकाज के लिए मूलभूत गतिविधियों की एक शृंखला के लिए ज़िम्मेदार है, जिसमें भूमि अधिग्रहण, निर्माण, कार्यालयों की साज-सज्जा, प्रशासन और केन्द्र प्रबन्धन और ख़रीद शामिल है। स्वाती ने कहा, "IMF के साथ हमारा अच्छा सम्बन्ध है, जिसके माध्यम से हम चाय की थैलियों के डिब्बे, अनुपयोगी/ पुराने पोस्टर जैसी बेकार सामग्री प्राप्त कर पाते थे।" एक समय के बाद, यह देखकर उन्हें ख़ुशी हुई कि मैथ स्पेस एक तरह से अनौपचारिक संग्रहालय में बदल रहा था। "यहाँ कुछ भी फेंका नहीं जाता है। इसलिए कभी-कभी IMF के लोग यहाँ उन पुराने पोस्टरों की तलाश में आते हैं, जिनकी ज़रूरत उन्हें दस्तावेज़ीकरण के लिए होती है। यह सचमुच मज़ेदार है!" हाल ही में, जब विश्वविद्यालय ने अपने ऐतिहासिक 40-मंज़िला छात्रावास भवन का निर्माण पूरा किया, तो IMF ने मैथ स्पेस को उनके लिए चाबी के 40 बॉक्स बनाने की ज़िम्मेदारी सौंपी, ताकि चाबियों को मंज़िलवार व्यवस्थित ढंग से रखा जा सके। "IMF के हमारे ग्राहकों में से एक हो गया, तो सामग्री प्राप्त करना बहुत आसान हो गया है। वे इस सब में एक बहुत बड़े साझेदार हैं।"

मैथ स्पेस का प्रभाव तेज़ी से स्पष्ट होता जा रहा है। उनके द्वारा तैयार किए गए गणित संसाधनों को पूर्वोत्तर में काम करने वाले विश्वविद्यालय के शिक्षकों द्वारा वहाँ के विभिन्न स्कूलों में अपनाया गया। कुछ ने तो राज्य बोर्ड की पाठ्यपुस्तकों में भी स्थान बनाया।

मैंने स्वाती से पूछा कि 3डी प्रिंटिंग और बड़े पैमाने पर उत्पादन के इस युग में, क्या वे अपनी सोच में बदलाव लाते हुए प्लास्टिक और अन्य कृत्रिम सामग्रियों से बने टूलकिट की तरफ़ आकर्षित हुई हैं। क्या उनका उत्पादन जल्दी नहीं होगा, ये लम्बे समय तक नहीं चलेंगे और उन्हें कचरे को इकट्ठा करने और रीसाइकल करने की परेशानी से राहत नहीं मिलेगी? "हमारे संसाधन लम्बे समय तक चलते हैं," उन्होंने ज़ोर देकर कहा। यह दावा करने के अलावा, उन्होंने बताया, पूरा मुद्दा शिक्षकों और विद्यार्थियों को यह समझने में समर्थ बनाना था कि वे इन सामग्रियों को फिर से बना सकते हैं। "आप इसे तोड़ते हैं, आप इसे ठीक करते हैं। यह इतना सरल है। ऐसा नहीं है कि अगर वे इसे तोड़ते हैं, तो उन्हें सज़ा के तौर पर कोने में खड़ा होना पड़ेगा। इसलिए हम इसे अपने आस-पास उपलब्ध कम लागत वाली या बिना लागत वाली सामग्रियों से बनाते हैं।"

लागत का मामला यहाँ विशेष रूप से प्रासंगिक है। "हमारी सामग्री के प्रभावी होने के लिए, 30 की कक्षा में कम-से-कम 6 सेट होने चाहिए। किस सरकारी स्कूल के पास हर सामग्री के छह सेट ख़रीदने का बजट है?" स्वाती ने अपने एक पूर्व बीएससी-बीएड गणित के विद्यार्थी के उदाहरण से इसे स्पष्ट किया, जिसने अपने स्कूल में 'गणित प्रयोगशाला' के परिदृश्य को उसके साथ साझा किया था। "मैं तो उसे 'गणित का मन्दिर' कहूँगा! विद्यार्थियों को वहाँ एक क़तार में ले जाया जाता था, उन्हें कुछ भी छूने की अनुमति नहीं थी, वे बस एक बार *दर्शन* करते हैं और फिर कक्षा में वापस चले जाते हैं।" ऐसी कहानियाँ स्वाती जैसे शिक्षकों के मन में काँटे की तरह चुभती हैं। "ऐसी गणित प्रयोगशाला की क्या सार्थकता है? विद्यार्थियों को सामग्री के साथ खेलना चाहिए, चीज़ों को इधर-उधर करना चाहिए, उन्हें जोड़ना चाहिए और कहना चाहिए 'ओह! यह हो गया!' या 'देखो मैंने क्या बनाया!'।"

अपने अस्तित्व में आने के 10 साल बाद, मैथ स्पेस जीवन्त विश्वविद्यालय एकोसिस्टम के ताने-बाने का एक अभिन्न अंग बन गया है। इसके अलावा अभी और भी बहुत कुछ होना बाक़ी है। स्वाती ने विस्तार से बताया, "हम विभिन्न अवधारणाओं और रचनाओं को पेश करने के लिए व्याख्याओं, अन्वेषणों, पोस्टरों, वीडियो, वर्कशीट्स और एनिमेटेड प्रस्तुतियों पर काम कर रहे हैं। हमें उम्मीद है इसमें हम भविष्य में गेम भी शामिल करने में सफल होंगे।" अब एक वेबसाइट https://sites.google.com/apu.edu.in/mathspace/home भी है, जहाँ इनमें से कई संसाधनों का दस्तावेज़ीकरण किया जा रहा है। ज़ाहिर है, यह केवल शुरुआत है। "ओह और यह हमारा आख़िरी पड़ाव नहीं होने जा रहा है," स्वाती ने मुझे याद दिलाया। "आगामी कैम्पस कॉमन्स हमारा स्थाई घर होगा।"

नन्दिता जयराज एक स्वतंत्र विज्ञान लेखिका, साहित्यकार और लैब हॉपिंग साइंस मीडिया फ़ोरम और TheLifeofScience.com की सह-संस्थापक हैं। वर्तमान में वे अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय में एक विज्ञान संचार सलाहकार की भूमिका भी निभा रही हैं। उनसे nandita.jayaraj@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

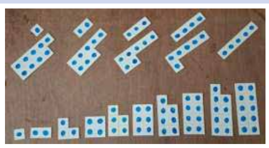
अनुवाद : सुबोध जोशी **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

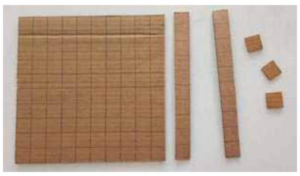
भ्रमण मैथ स्पेस का

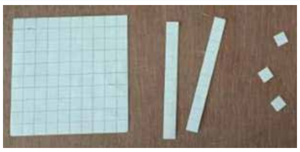
रेडी 1... 2... 3...

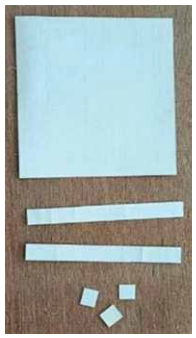
अंकगणित : गिनती से लेकर माप तक


गणक

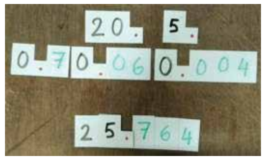

दहाई
(हाथ से बने और
सावधानीपूर्वक चुने गए आयाम)


फ़ाउण्डेशन स्टेज के लिए बड़ी FLU


प्रारम्भिक चरण के लिए छोटी FLU

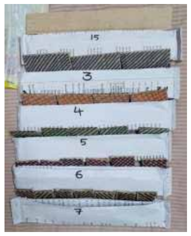

दाशमिक FLU

ऐरो कार्ड्स



दाशमिक ऐरो कार्ड्स

**भिन्नों के लिए
जोड़-तोड़...**




भिन्न-पट्टियाँ

लैपटॉप के खाली कार्डबोर्ड बॉक्सों को चाबियाँ रखने वाले बॉक्स में बदलना : हमें हाल ही में ऐसे 40 बॉक्स बनाने का ऑर्डर मिला। हमने इसकी डिज़ाइन को लेकर विभिन्न सम्भावनाओं को खँगाला। प्राप्त फ़ीडबैक के बाद डिज़ाइन को अन्तिम रूप दिया और 3 दिनों के भीतर सभी बॉक्स तैयार करके दे दिए!

हमें बहुत गर्व है कि लैपटॉप बॉक्स की लॉकिंग सुविधा बरकरार रखते हुए उसे काटने का मूल विचार एक बीएससी-बीएड गणित के विद्यार्थी द्वारा पेश किया गया, जो हाल ही में मैथ स्पेस टीम में शामिल हुआ था!

आकार और क्षेत्र

... कुछ और

भिन्न के भाग

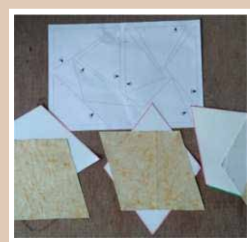
बीजगणितीय टाइलें

त्रिभुज किट

ज्यामितीय आकृतियों एवं टैनग्राम के साथ खेलना

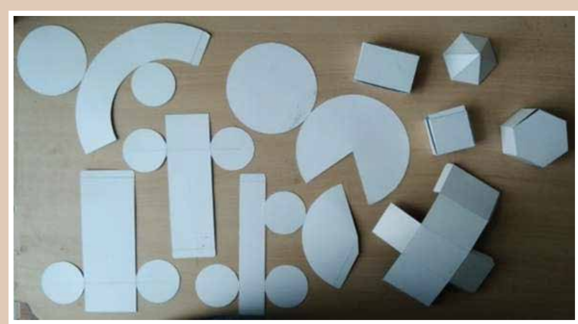
गणितीय सामग्रियाँ रखने के लिए बनाए गए बॉक्स और पैकेट

ज्यामिति और क्षेत्रमिति किट

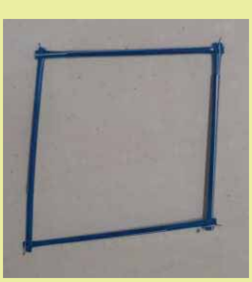


काटे गए भाग

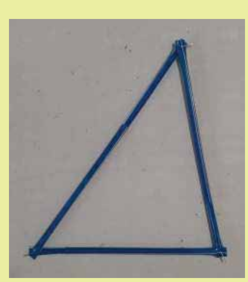
स्ट्रॉ से बने मॉडल



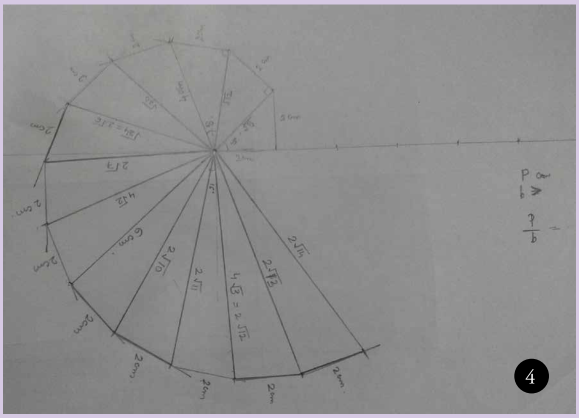
आकृति बनानेवाले मोड़दार आधार काग़ज़ या आकृति-जाल



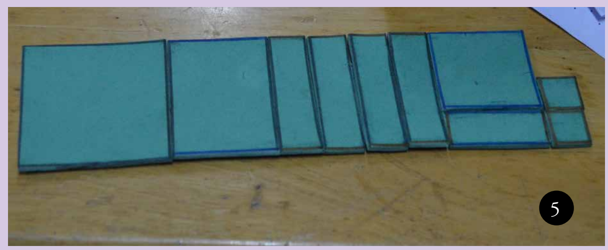
एकल मॉडल, सभी सम्भावित चतुर्भुज



इसी तरह का मॉडल त्रिभुजों के लिए – कुछ साल बाद आया!



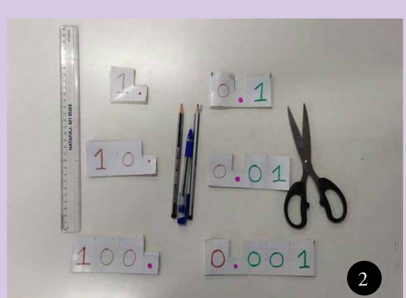
वर्कशॉप शृंखला



1. प्राथमिक गणित कार्यशाला
2. स्टेशनरी और Mat(h)erials सहित ट्रे
3. प्राथमिक शृंखला के बाद 3-दिवसीय अन्वेषण कार्यशाला। A4 पेपर बॉक्स के कवर को ट्रे के रूप में इस्तेमाल करने पर ध्यान दें।
4. उच्च प्राथमिक शृंखला के दौरान एक प्रतिभागी द्वारा बनाया गया वर्गमूल सर्पिल; इस सर्पिल से उपजे विचार ने एक प्रतिभागी द्वारा लिखे गए एक लेख का रूप लिया, जिसने इस शृंखला के बाद 3-दिवसीय अन्वेषण कार्यशाला के बाद एक लो फ्लोर हाई सीलिंग (LFHC) लेख तैयार किया (दोनों लेखों के लिंक के लिए सन्दर्भ देखें)।
5. बीजगणितीय समानताओं (द्विघात) के लिए मॉडल : प्रत्येक प्रतिभागी ने दोपहर के भोजन के बाद ये मॉडल तैयार किए, यह सत्र mat(h)erials तैयार करने के लिए आरक्षित था।

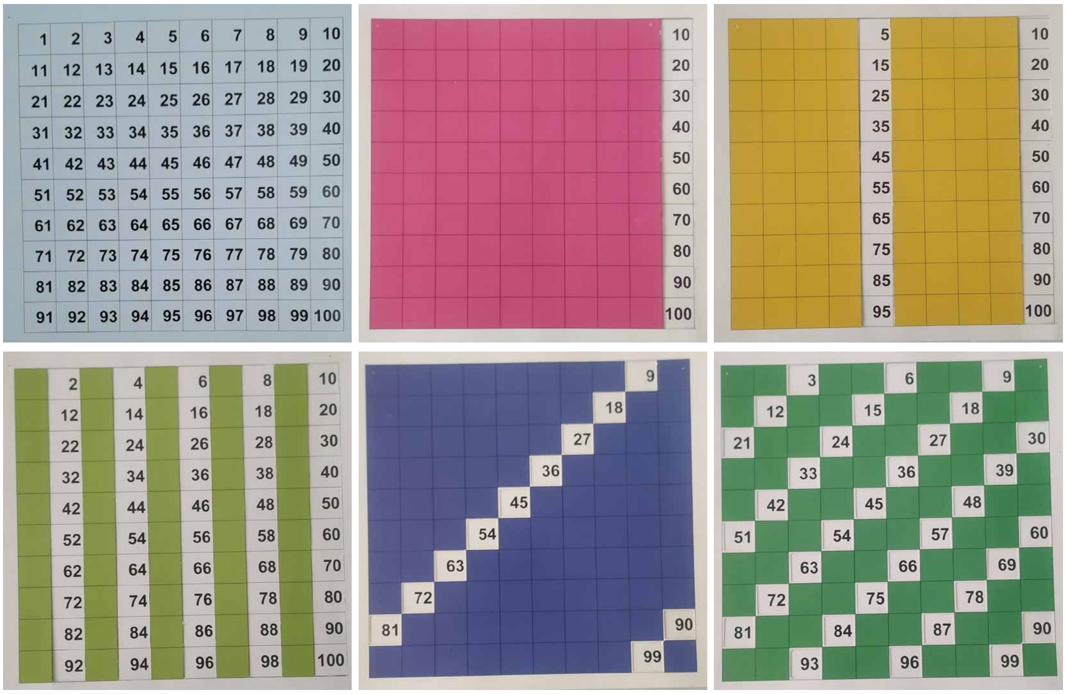
मैथ स्पेस ने 2015-2018 तक हर महीने एक दिवसीय कार्यशालाओं की तीन शृंखलाएँ संचालित कीं, जिनमें प्राथमिक (कक्षा 1-5), उच्च प्राथमिक (कक्षा 6-8) और माध्यमिक (9-10) प्रत्येक के लिए लगभग 7-9 सत्र थे। दोपहर के भोजन के बाद के सत्र आमतौर पर गणितीय सामग्री तैयार करने के लिए होते थे, प्रत्येक स्कूल के लिए सामग्री का एक सेट। प्राथमिक और उच्च प्राथमिक शृंखला के बाद गर्मियों की छुट्टियों के दौरान 3-दिवसीय अन्वेषण कार्यशालाएँ आयोजित की गईं।

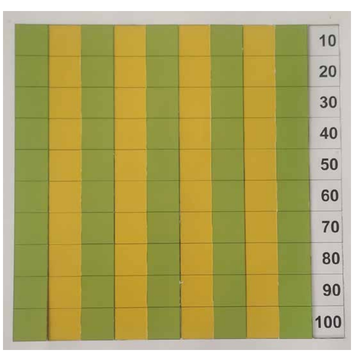
मैथ स्पेस को कई राज्यों के सरकारी स्कूल के शिक्षकों के साथ कई कार्यशालाएँ आयोजित करने के लिए आमंत्रित किया गया था, जिसमें Mat(h)erials तैयार करने पर विशेष ज़ोर दिया गया था।



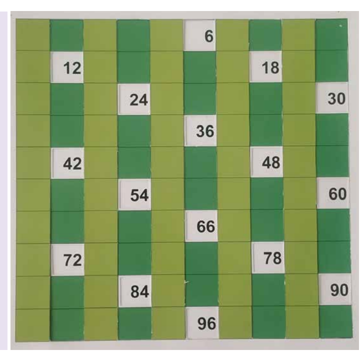
1. उत्तरकाशी में सरकारी स्कूल के शिक्षकों द्वारा भिन्न के लिए बनाई सामग्री
2. उधम सिंह नगर में शिक्षकों द्वारा बनाए गए दशमलव ऐरो कार्ड

सीएमडी - Mat(h)erials





फ्रेम द्वारा गुणज और सामान्य गुणज/समापवर्त्य खोजना – भाज्यता नियमों की ओर ले जाता है



कोण के लिए प्रतिच्छेदित वृत्त (intersecting circles)

विभिन्न आकारों और वितरणों की चक्रियाँ

1 छत के पंखे के खाली बक्सों से भिन्न के भाग बनाए गए। उन्हें पंखे के ब्लेड रखने के लिए इस्तेमाल किए जाने वाले प्लास्टिक कवर में पैक किया गया। कवर के दोनों सिरों को बन्द कर दिया गया। कवर के लम्बे सिरे काटकर खोले गए, और अलग-अलग भिन्नों के लिए पॉकेट बनाने के लिए स्टेपल किया गया। (पोखरामा, बिहार)

2 एक ऑनलाइन मैथ स्पेस वर्कशॉप में भाग लेने के बाद पॉलीओमिनो (ज्यामितीय आकृतियों) से जूझते शिक्षक

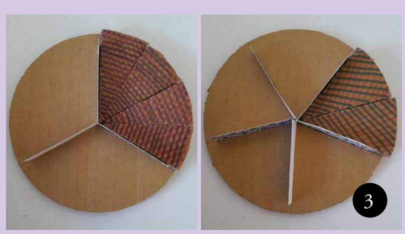
3 2 की शक्ति दिखाती स्ट्रॉ शाखाएँ (पूर्वोत्तर भारत से)

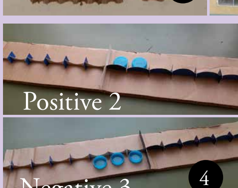
4 मंत्रा4चेंज (M4C) द्वारा मैथ स्पेस की प्राथमिक गणित कार्यशालाओं में भाग लेने के बाद सरकारी स्कूल में विद्यार्थियों से बनवाई गई गणित माला। M4C ने मैथ स्पेस के काम और गणित के प्रति लगाव को देश भर के कई राज्यों में पहुँचाया...☺

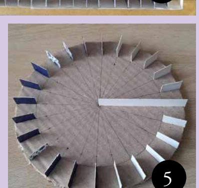
मॉण्टेसरी Mat(h)erials :

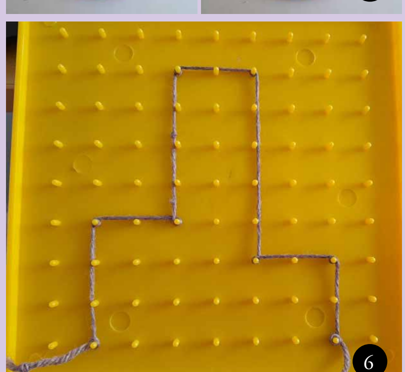
इनके बारे में अधिक जानने के लिए,
इसी अंक में दिया गया लेख पढ़ें

गुलाबी टावर, भूरे रंग की सीढ़ियाँ, लम्बी छड़ों, संख्या छड़ों और सिलेंडर का पहला सेट और इन्हें तैयार करने वाले









दृष्टिबाधित शिक्षार्थियों के लिए स्पर्शनीय Mat(h)erials

1 स्पर्शनीय बीजगणितीय टाइलें

2 स्पर्शनीय भिन्न दीवार

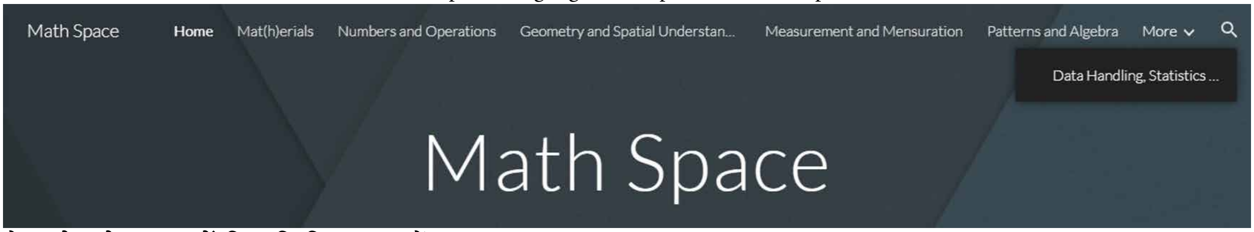
3 स्पर्शनीय भिन्न चक्र/वृत्त और उसके हिस्से

4 बोतल के ढक्कनों से निर्मित स्पर्शनीय संख्या रेखा

5 स्पर्शनीय प्रोट्रैक्टर, हर 15° डिग्री पर

6 जियोबोर्ड पर हिस्टोग्राम

Website: https://sites.google.com/apu.edu.in/mathspace/home

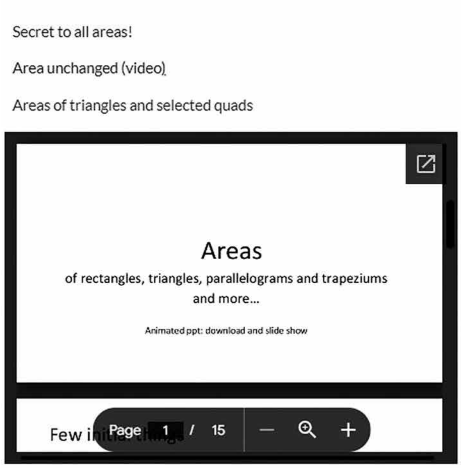


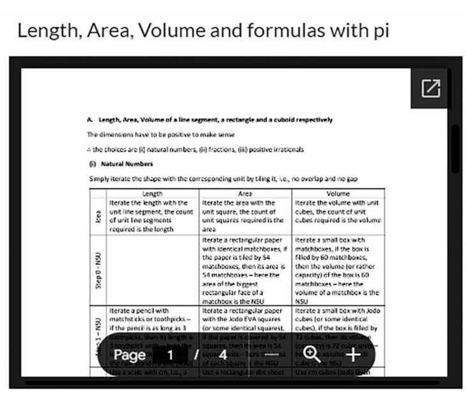
मैथ स्पेस वेबसाइट में निम्नलिखित भाग हैं :

- **गणितीय सामग्रियाँ (Mat(h)erials) :** पाठ्यपुस्तकें, वेबसाइटें, दृश्य-सामग्रियाँ, कम लागत वाली मॉण्टेसरी Mat(h)erials, विभिन्न प्रकार की किट और तथा अन्य जानकारी – जिसमें बनाने (लेआउट के साथ) और इस्तेमाल करने के तरीक़े का विवरण शामिल है।
- **संख्याएँ और संक्रियाएँ :** पूर्ण संख्याएँ, भिन्न, दशमलव, पूर्णांक, परिमेय संख्याएँ, घातांक और मूल – इसका ज़ोर अर्थ निर्माण और प्रथम सिद्धान्तों से चरण-दर-चरण आगे बढ़ने पर है।
- **ज्यामिति और स्थानिक समझ :** 2D और 3D आकार, समरूपता (symmetry), 3D से 2D मैपिंग में विशेष रूप से मध्य चरण के लिए संसाधनों की एक शृंखला शामिल है (एनिमेटेड पीपीटी, वर्कशीट और अन्य)।
- **मापन :** लम्बाई, वज़न, क्षमता आदि – और **क्षेत्रमिति** - 2D में : परिधि, क्षेत्रफल आदि और 3D : सतह क्षेत्रफल, आयतन आदि एवं पाई (π) से जुड़े सूत्रों की खोज शामिल है।
- **पैटर्न और बीजगणित :** पैटर्न, अभिव्यक्तियाँ, समीकरण, समानता और साथ ही अनुपात-समानुपात और प्रतिशत।
- **डेटा हैंडलिंग, सांख्यिकी :** माध्य, माध्यिका, बहुलक पर गहराई से नज़र – **और सम्भाव्यता**– चक्रियाँ, बेयस प्रमेय (Bayes theorem), स्वतंत्रता।

काम अभी पूरा नहीं हुआ है। कई संसाधनों, ख़ासतौर पर (i) विभिन्न मॉडलों के माध्यम से भिन्नों को खोजना, (ii) समीकरणों को हल करने के लिए बीजगणित टाइलों की धारणा का इस्तेमाल करना और (iii) कई दृश्य सामग्रियों पर काम करना शेष है।

विभिन्न अवधारणाओं और निर्माणों को पेश करने के साथ-साथ उनके प्रदर्शन के लिए स्पष्टीकरण, अन्वेषण, पोस्टर, वीडियो, वर्कशीट और कई एनिमेटेड पीपीटी हैं। कुछ प्रूफ़ विदाउट वर्ड्स (PWW) हैं - और भी शामिल किए जाएँगे। हम भविष्य में एक **गेम** सेक्शन भी शामिल करने की उम्मीद करते हैं।





References:

1. Khushboo Awasthi (2017, March). Drawing A Spiral of Square Roots, At Right Angles 6(1). 39-45. https://bit.ly/3Ui2Br6
2. Swati Sircar, Sneha Titus (2018, March). Newer and Newer Spirals - Open and Shut Cases, At Right Angles 7(1). 66-71. https://bit.ly/4dUW5xh

अनुवाद : सुबोध जोशी **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** शहनाज़

पैटर्न के जादू का अनावरण

अस्मा मेमन और जीवेश पंचभाई

इस लेख में, लेखकों ने कक्षा 3 में पैटर्न पर काम करने के सत्रों की योजना बनाने और सत्रों को लेने के अपने अनुभवों पर बात की है। इनमें उन्होंने रंगोमेट्री और आकार परिवार सेट नाम की दो शिक्षण-अधिगम सामग्रियों (टीएलएम) का इस्तेमाल किया। इस दौरान उन्हें अप्रत्याशित सीख देखने को मिली!

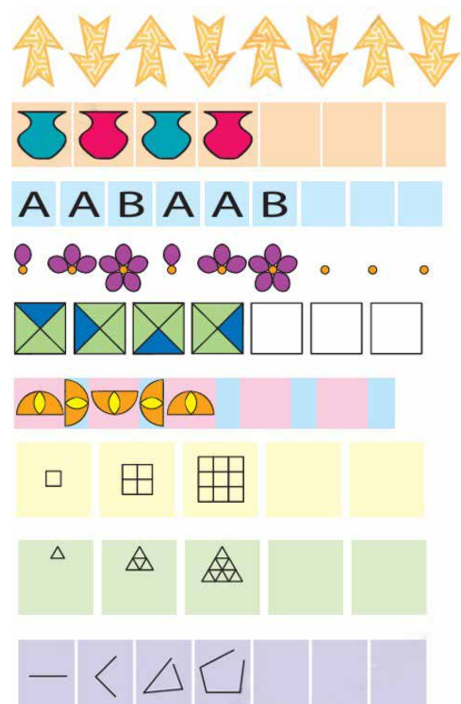
गणित को प्राय: पैटर्न की भाषा के रूप में परिभाषित किया जाता है। गणित शिक्षा के किसी भी स्तर पर पैटर्न का अवलोकन और उन्हें आगे बढ़ाना एक अहम कौशल है। इसलिए इसमें कोई आश्चर्य नहीं कि राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसन्धान एवं प्रशिक्षण परिषद (एनसीईआरटी) एक प्रमुख अधिगम प्रतिफल के रूप में ज्यामितीय और संख्यात्मक, दोनों पैटर्न के अवलोकन और उन्हें विस्तार देने के महत्त्व पर ज़ोर देती है। (एनसीईआरटी, 2017)

इन अधिगम प्रतिफलों को हासिल करने के लिए, कक्षा 3 के लिए एनसीईआरटी की पाठ्यपुस्तक में एक अध्याय 'पैटर्न के साथ खेलें' (Play with patterns) दिया गया है। अध्याय की शुरुआत उन दोहराव वाले पैटर्न से होती है जो रंग के दोहराव, अनुक्रम के दोहराव, और किसी निश्चित कोण से किसी आकृति के घूमने के दोहराव पर आधारित हैं। इसके बाद कुछ बढ़ते हुए क्रम के पैटर्न से परिचय कराया गया है। और इसके बाद उन दोहराव वाले संख्या पैटर्न और बढ़ती संख्या के पैटर्न से परिचय कराया जाता है जो छोटी संख्या जोड़ने या 10 जोड़ने पर आधारित हैं।

यह आलेख, उत्तराखण्ड के एक क़स्बे के एक स्कूल में कक्षा 3 के तीस विद्यार्थियों को उक्त अध्याय पढ़ाने के अनुभव पर आधारित है। इन बच्चों में से ज़्यादातर बच्चे क़स्बे के मध्यम वर्ग या निम्न आय परिवारों के थे।

पहला सत्र

विद्यार्थियों को अपनी नोटबुक में वैसे पैटर्न के चित्र बनाने थे जो पाठ्यपुस्तक में दिए गए पैटर्न से मेल खाते हों या उनसे प्रेरित हों।



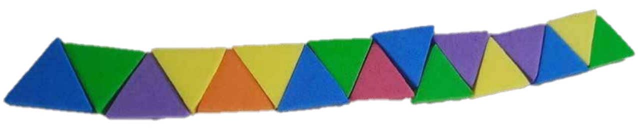
चित्र-1 : एनसीईआरटी, कक्षा-3 की पाठ्यपुस्तक में दिए गए पैटर्न।

की-वर्ड : पैटर्न, रंगोमेट्री सेट, आकार परिवार सेट, बढ़ते क्रम के पैटर्न, बढ़ते हुए पैटर्न, घटते हुए पैटर्न

सत्र को दिलचस्प और व्यवहारिक बनाने के लिए, शिक्षक ने विद्यार्थियों को पाँच-पाँच के छह समूहों में बाँट दिया और उन्हें रंगोमेट्री सेट दे दिए। इन सेटों की सहायता से, विद्यार्थियों से अपने ख़ुद के पैटर्न बनाने को कहा गया।

रंगोमेट्री का इस्तेमाल करते हुए पैटर्न खोजना

रंगोमेट्री आकृतियों का इस्तेमाल करते हुए विद्यार्थियों ने तरह-तरह के पैटर्न बनाए। इनमें से कुछ विद्यार्थियों ने रंगोमेट्री के रंगों को पैटर्न में शामिल करने पर ध्यान केन्द्रित किया वहीं कुछ अन्य ने आकृतियों को शामिल करने पर। उन्हें रंगोमेट्री सेट का मिल-बाँटकर इस्तेमाल करते हुए और साथ में काम करते हुए पूरी तरह मशग़ूल देखना एक बेहद सुखद अनुभव था!



चित्र-2 : त्रिभुजों के व्युत्क्रम का इस्तेमाल करते हुए बनाया गया एकान्तर दोहराव वाला 2डी पैटर्न।

टीप : विद्यार्थी ने इस पैटर्न को बनाने में आकृतियों के रंग को नज़रन्दाज़ करने का निर्णय लिया था।

पाठ्यपुस्तक और नोटबुक में क्रेयॉन से बनाए गए पैटर्न, दोनों द्विविमीय (2डी) पैटर्न पर केन्द्रित हैं। इसलिए, शिक्षक की अपेक्षा थी कि रंगोमेट्री से भी बच्चे इसी तरह के 2डी पैटर्न बनाएँगे। हालाँकि, शिक्षक को तब आश्चर्य हुआ जब विद्यार्थियों ने त्रिविमीय (3डी) पैटर्न बनाने के लिए आकृतियों की थप्पियाँ जमाना शुरू कर दिया।

चित्र-3 : वर्गों के रंग और स्थिति का इस्तेमाल करते हुए बनाया गया एकान्तर दोहराव वाला 3डी पैटर्न।

दूसरा सत्र

इस सत्र में, शिक्षक ने विद्यार्थियों को बढ़ते और घटते हुए पैटर्न से रूबरू कराने की योजना बनाई। रंगोमेट्री सेट की कमी के चलते, शिक्षक ने रंगोमेट्री के साथ आकार परिवार सेट मिलाकर देने का फ़ैसला किया। रंगोमेट्री के उलट, आकार परिवार सेट की आकृतियों के आकार (साइज़) अलग-अलग होते हैं, जिसने विद्यार्थियों को ख़ुद से बढ़ते और घटते हुए पैटर्न बनाने के लिए दिशा दी।

आकार परिवार का इस्तेमाल करते हुए पैटर्न का पता लगाना

यहाँ कुछ पैटर्न दिए गए हैं :

चित्र-4 : आकार परिवार के वर्गों का इस्तेमाल करते हुए बनाया गया घटता हुआ पैटर्न (नीचे से शुरू होता हुआ)।

चित्र-5 : अलग-अलग संख्या में आयताकार टुकड़ों की थप्पी जमाकर बनाया गया बढ़ता हुआ पैटर्न (दाएँ से बाएँ)।

टीप : यहाँ इस बात की पूरी सम्भावना है कि विद्यार्थियों ने प्रत्येक अगली थप्पी में बढ़ाए जा रहे आयताकार टुकड़ों की संख्या पर ध्यान न दिया हो।

शुरुआत में, विद्यार्थी ने थप्पियों में आयत की संख्या 1-1 से बढ़ाई, अर्थात 1, 2, 3, 4, आयतों की थप्पियाँ थीं, लेकिन इसके बाद 5 आयत वाली कोई थप्पी नहीं थी। इसलिए ऐसा लगता है कि उनका ध्यान थप्पी की ऊँचाई बढ़ाने पर था न कि संख्याओं पर।

चित्र-6 : प्रत्येक थप्पी में वर्गों की संख्या बढ़ाते हुए बनाया गया पैटर्न।

एक सरोकार और इसे सम्बोधित करने की रणनीतियाँ

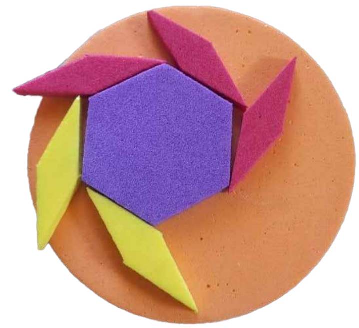
तभी विद्यार्थियों ने इस बात पर ध्यान दिया कि इन शिक्षण-अधिगम सामग्रियों का इस्तेमाल चेहरे, मोर आदि जैसे चित्र बनाने में किया जा सकता है और कई विद्यार्थियों ने इन्हें बनाना भी शुरू कर दिया!

चित्र-7 : रंगोमेट्री और आकार परिवार सेट का इस्तेमाल कर एक विद्यार्थी द्वारा बनाया गया चेहरा।

ऐसे मौक़ों पर, निर्देशों का पालन नहीं करने के लिए विद्यार्थियों को डाँटना ठीक नहीं है। पैटर्न के अर्थ और सामग्री के इस्तेमाल को लेकर उन्हें सुनाना-समझाना व्यर्थ हो सकता है। लेकिन, इसे पैटर्न क्या है, इसकी सहज समझ विकसित करने के एक मौक़े के रूप में देखा जा सकता है। पैटर्न की शुरुआती कुछ आकृतियाँ बनाना और विद्यार्थियों को इसी के अनुसार दूसरी आकृतियाँ बनाने के लिए कहने से मदद मिल सकती है। किसी आकृति को चुनना और पूछना कि इस आकृति को पैटर्न में आगे क्यों या क्यों नहीं रख सकते हैं, उत्सुकता पैदा करने में मदद कर सकता है। साथी विद्यार्थी के काम का उदाहरण देना भी सहज समझ का विकास करने में मददगार हो सकता है। हालाँकि, शिक्षक को यह ध्यान रखना चाहिए कि ऐसा करते समय किसी से उनकी तुलना न की जा रही हो। इस प्रकार, शिक्षण-अधिगम सामग्री के ग़लत इस्तेमाल की छिटपुट घटनाओं का इस्तेमाल सीखने के अवसरों के लिए किया जा सकता है।

पूरे सत्र के दौरान विद्यार्थियों को मशग़ूल रखने के लिए यह महत्त्वपूर्ण है कि शिक्षकों द्वारा बच्चों से समृद्ध बातचीत की जाए, और उनसे बातचीत को आगे बढ़ाने वाले प्रासंगिक सवाल पूछे जाएँ। प्रत्येक बच्चे द्वारा बनाए गए पैटर्न के इर्द-गिर्द बातचीत की जा सकती है कि कैसे दो पैटर्न समान या अलग हैं। और इस प्रकार के सवाल पूछे जा सकते हैं:, "क्या पैटर्न की पहली तीन आकृतियों को समान रखते हुए एक अलग पैटर्न बनाया जा सकता है?", "असल में यहाँ क्या बढ़ या घट रहा है? ", "आप इस पैटर्न को एक बढ़ते पैटर्न में बदलने के लिए क्या करेंगे? " आदि। इन सबसे विद्यार्थियों को पैटर्न के साथ बेहतर तरीक़े से जोड़ा जा सकता है।

सत्रों के दौरान शिक्षण-अधिगम सामग्री के इस्तेमाल से कई आश्चर्यजनक पल आए। नीचे दिए गए पैटर्न कार्य करते हुए सीखने का सबूत पेश करते हैं।



चित्र-8 : चतुर्भुजीय आकृतियों को घड़ी की सुई की विपरीत दिशा में घुमाकर बनाया गया पैटर्न।

यहाँ एक विद्यार्थी ने यह पैटर्न बनाया जिसमें अगली चतुर्भुजीय आकृति को रखने के लिए प्रत्येक चतुर्भुजीय आकृति को घड़ी की सुई की विपरीत दिशा में घुमाया गया है।

साथ ही, विद्यार्थी ने एक साथ दो कसौटियों, रंग और उनके घूमने, का इस्तेमाल किया है। इसी तरह, नीचे दिए गए पैटर्न में एक साथ कई कसौटियों का इस्तेमाल किया गया है।

चित्र-9 : आयताकार टुकड़ों का इस्तेमाल करके बनाया गया घटता हुआ पैटर्न जहाँ रंग और स्थिति का भी एक पैटर्न है।

यह सब उससे परे था जिसकी अपेक्षा शिक्षक ने तीसरी कक्षा के विद्यार्थी द्वारा बनाए जाने वाले किसी पैटर्न से की होगी। असल में, विद्यार्थियों के स्वयं से सामग्री के समझने और उनके इस्तेमाल करने देने के शिक्षक के शैक्षिक निर्णय ने विद्यार्थियों को रचनात्मक बनने और सामग्रियों की क्षमता पहचानने के लिए प्रेरित किया। इससे उन्हें, जैसा कि मॉण्टेसरी का सीखने का सिद्धान्त कहता है, अपने माहौल को समझने का चुनाव करने की आज़ादी मिली। (फ़रयादी, 2007)

चित्र-10 : विद्यार्थियों के कामों की विविधता का प्रदर्शन।

निष्कर्ष

अन्त में, इस कक्षा ने इस बात का एक उम्दा उदाहरण पेश किया कि कैसे गतिविधि योजना और शिक्षण-अधिगम सामग्री का उपयुक्त चयन सीखने का एक ऐसा माहौल बना सकता है जहाँ विद्यार्थी अपनी रचनात्मकता का इस्तेमाल करके और अपनी क्षमता का पता लगाकर सीखते हैं। साथ ही, यहाँ यह ध्यान रखना ज़रूरी है कि प्रत्येक विद्यार्थी के लिए पर्याप्त सामग्री उपलब्ध हो। उदाहरणार्थ, इस कक्षा में हमने पाँच विद्यार्थियों के प्रत्येक समूह को कम-से-कम एक रंगोमेट्री सेट और एक आकार परिवार का सेट देने का प्रयास किया। इससे उन्हें रंगों, आकृतियों और आकारों का इस्तेमाल करने की पर्याप्त गुंजाइश मिली। हालाँकि, सामग्री की कमी की स्थिति में, विद्यार्थियों ने ज़रूरी रंग और आकृतियों को साझा करके एक-दूसरे की मदद की। इस प्रकार, इस गतिविधि ने समूहकार्य करने के साथ ही कक्षा का आपसी तालमेल सुधारने में भी मदद की। इन सत्रों ने रंग और आकृतियों के प्रति बच्चों की संवेदनशीलता को उभारा। किसी भी शिक्षण-अधिगम सामग्री में इसे शामिल करने से सीखने का अनुभव बेहतर हो सकता है।

आभार : लेखकद्वय इस आलेख के सम्पादन में मदद के लिए क्षमा चक्रवर्ती को धन्यवाद देते हैं।

References

1. National Council of Educational Research and Training. (2007). Play with patterns. In Maths Magic: Textbook for Class III (pp. 144-152). NCERT.
2. National Council of Educational and Research Training. (NCERT). (2017). Learning Outcomes at the Elementary Stage. NCERT https://ncert.nic.in/pdf/publication/otherpublications/tilops101.pdf
3. Jodo Gyan. Rangometry 2. Jodo Gyan. https://www.jodogyan.org/product/rangometry-2/
4. Jodo Gyan. Aakar Parivar. Jodo Gyan. https://www.jodogyan.org/product/aakar-parivar/
5. Faryadi Q. (2007). The Montessori paradigm of learning: So what? (ERIC Document No. ED496081). ERIC. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED496081.pdf

जीवेश पंचभाई ने एचएनबी गढ़वाल विश्वविद्यालय से भौतिकी में एमएससी और बीएड किया है। वर्तमान में, वे अज़ीम प्रेमजी स्कूल, उत्तरकाशी में गणित और विज्ञान शिक्षक के तौर पर काम कर रहे हैं। उन्हें खाना बनाना और शतरंज खेलना पसन्द है। जीवेश से jivesh.panchbhai@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अस्मा मेमन अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलूरु की पूर्व छात्रा हैं। वर्तमान में, वे मुम्बई स्थित शिक्षा अकादमी में एक प्राथमिक गणित शिक्षक हैं। उन्हें ऐसे टूल और गतिविधियों को डिज़ाइन करने और लागू करने में आनन्द आता है जो स्कूली गणित को व्यवहारिक अनुभव और दृश्य पहलुओं से जोड़ते हैं। इसके अलावा, कॉलेज में गणित की पढ़ाई करने के दौरान उन्होंने दिए गए डेटा में पैटर्न और वितरण का विश्लेषण करने का भी अनुभव लिया। अस्मा से asma.memon20ug@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : अतुल अग्रवाल **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता

एल्गोरिदम से परिचय

अनुष्का टोनापी

यह लेख एल्गोरिदम (कलन विधि) की अवधारणा और उनके महत्त्व की पड़ताल करता है, व हमारी रोज़मर्रा की ज़िन्दगी में और गणित में इनके इस्तेमाल के विभिन्न उदाहरण प्रस्तुत करके हमारा मार्गदर्शन करता है।

एल्गोरिदम क्या है?

क्या आपने कभी सोचा है कि आपका पसन्दीदा वीडियो गेम कैसे काम करता है? ये उपकरण या एप एक ख़ास प्रोग्रामिंग भाषा में दिए गए कोड, जिसे कम्प्यूटर समझता है, को समझकर काम करते हैं। यह कोड कम्प्यूटर को निर्देश देता है, जिससे आप एप का इस्तेमाल कर पाते हैं या गेम खेल पाते हैं। किसी ख़ास काम को करने के लिए निर्देशों के इस समूह को ही एल्गोरिदम कहा जाता है। हालाँकि, एल्गोरिदम कहलाने के लिए निर्देशों के समूह की एक स्पष्ट शुरुआत और एक अन्त होना चाहिए, अन्यथा आपका एल्गोरिदम ऐसा होगा, जिसका कोई अन्त ही नहीं होगा!

एल्गोरिदम केवल कम्प्यूटरों के लिए ही नहीं होते, हम इन्सान उनका इस्तेमाल अपनी रोज़मर्रा की ज़िन्दगियों में हमेशा ही करते हैं! आइए इसे एक सरल उदाहरण की मदद से समझते हैं कि हम इनका इस्तेमाल कैसे करते हैं : मान लीजिए कि आप एक स्वादिष्ट नाश्ता बनाना चाहते हैं – गुड़ और घी वाली एक रोटी। इसे बनाने के लिए आप इन चरणों का पालन करेंगे :

1. एक रोटी लें।
2. इस पर एक चम्मच घी लगाएँ।
3. थोड़ा गुड़ कद्दूकस कर लें।
4. रोटी पर कद्दूकस किया हुआ गुड़ बुरकें।
5. रोटी की पुंगी बना लें।

अब आपका स्वादिष्ट नाश्ता तैयार है। इसका आनन्द लीजिए!

रोटी, घी और गुड़ के साथ।

एल्गोरिदम ज़रूरी क्यों हैं?

एल्गोरिदम सभी जगह हैं! ये समस्याओं को कुशलतापूर्वक हल करने में कम्प्यूटरों, रोबोटों और यहाँ तक कि लोगों की भी मदद करते हैं। एल्गोरिदम सटीक निर्देशों का एक समूह होता है, जो यह सुनिश्चित करता है कि कोई काम हर बार एक ही ढंग से और सही तरीक़े से किया जाए। क्योंकि किसी मशीन को भी इनका पालन करना होता है, इसलिए इन्हें बहुत स्पष्ट होना चाहिए, यानी इनके एक से अधिक अर्थ नहीं होने चाहिए!

एल्गोरिदम बार-बार किए जाने वाले कार्यों को स्वचालित करने और उन कार्यों के हर बार एक जैसे परिणाम सुनिश्चित करने में विशेष उपयोगी होते हैं। एल्गोरिदम किसी रेसिपी की तरह होता है : अगर निर्देश स्पष्ट और सटीक हैं तो चाहे कोई भी उसे बनाए, हर

की-वर्ड : एल्गोरिदम, अनुक्रम, फ़्लो, प्रक्रियाएँ, कोड

बार व्यंजन का स्वाद एक-सा होना चाहिए। निर्देशों का एक स्पष्ट रूप से परिभाषित क्रम दिए जाने पर मशीनें दोहराए जाने वाले कामों को कर सकती हैं – उस स्थिति में कार्य को दोहराने पर परिणाम हर बार एक-सा होगा। कार्यों को स्वचालित करने के लिए एल्गोरिदम का इस्तेमाल करने से थकान या बोरियत की वजह से कोई मानवीय गलतियाँ नहीं होतीं। इसकी वजह यह होती है कि मशीनें निर्देशों का पालन हर बार एक ही तरह से करती हैं।

इसका यह मतलब है कि गुड़ वाली रोटी बनाने के निर्देशों का मौजूदा एल्गोरिदम असल में एल्गोरिदम नहीं है, क्योंकि अलग-अलग लोग इन निर्देशों के अपने हिसाब से अलग मतलब निकाल सकते हैं। उदाहरण के लिए, पहला निर्देश, 'एक रोटी लीजिए,' पर्याप्त जानकारी नहीं देता। इस निर्देश को बेहतर करने का एक तरीक़ा यह होगा कि रोटी के आकार, मोटाई और इसमें लगने वाली सामग्री के बारे में विस्तार से बताया जाए। हम इसे फिर से इस तरह लिख सकते हैं : "लगभग 5 सेंटीमीटर त्रिज्या और 2 मिलीमीटर मोटाई वाली आटे की एक पकी हुई रोटी लें।" दूसरे निर्देश को भी स्पष्टता प्रदान करने के लिए उसमें यह जोड़ा जा सकता है : "एक बड़ा चम्मच शुद्ध घी लें और इसे रोटी के एक तरफ़ समान रूप से फैलाएँ।" बाकी बचे हुए चरणों में आप थोड़ा-बहुत बदलाव करके उन्हें सटीक और स्पष्ट बनाने की कोशिश कीजिए।

जैसा कि आप देख सकते हैं, एल्गोरिदम के बग़ैर, हमारी दुनिया कहीं ज़्यादा आपा-धापी भरी और बहुत कम आनन्ददायक होगी। एल्गोरिदम के बारे में सीखकर आप समस्याओं को बेहतर तरीक़े से सुलझाने की समझ हासिल करने की शुरुआत कर सकते हैं, चाहे वे समस्याएँ गणित की हों, विज्ञान की हों या रोज़मर्रा की।

एल्गोरिदम को सीखने की शुरुआत

सवाल : क्या किसी एक समस्या को सुलझाने के कई एल्गोरिदम हो सकते हैं?

हाँ, किसी एक समस्या को सुलझाने के कई एल्गोरिदम हो सकते हैं! उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि आप अपने घर से स्कूल जाने की कोशिश कर रहे हैं। आप या तो स्कूल की बस ले सकते हैं, या अपनी साइकिल चलाकर स्कूल जा सकते हैं। दोनों ही तरीक़े आपको स्कूल पहुँचा देंगे, लेकिन हरेक के लिए चरणों के अलग समूह की, या दूसरे शब्दों में कहें तो एक अलग एल्गोरिदम की ज़रूरत पड़ेगी।

सवाल : क्या हम एल्गोरिदम के बग़ैर हम किसी समस्या को सुलझा सकते हैं?

हालाँकि, हमें यह लग सकता है कि हम किसी एल्गोरिदम के बग़ैर समस्याओं को सुलझा सकते हैं, ऐसा अकसर इसलिए होता है क्योंकि हम जिन चरणों का पालन कर रहे होते हैं उन्हें सचेतन रूप से दर्ज़ नहीं कर रहे होते हैं। एक स्पष्ट एल्गोरिदम के बिना, किसी समस्या को सुलझाते समय हम ख़ुद को चरणों को दोहराते हुए पा सकते हैं। केवल इतना ही नहीं, हो सकता है कि हम समस्या को सुलझाने के सबसे प्रभावी तरीक़े की पहचान न कर पाएँ या उसे याद न रख पाएँ और वैसी ही किसी समस्या को हल करते समय हमें उसे सुलझाने के चरणों को दोबारा सोचना पड़े। किसी समस्या को सुलझाते समय हमें उसे सुलझाने के चरणों के एक व्यवस्थित अनुक्रम का इस्तेमाल करना चाहिए। हम समस्या को पढ़ते हैं, जानकारी का विश्लेषण करते हैं, और समस्या को सुलझाने के लिए एक योजना बनाते हैं। इसके बाद, हम इस योजना को क्रियान्वित करते हैं और जवाब पता करते हैं। आइए एल्गोरिदम के बारे में और अधिक जानने के लिए कुछ मज़ेदार गतिविधियों पर ग़ौर करें। हम कहानियों, खेलों और गतिविधियों के माध्यम से एल्गोरिदम के बारे में जानेंगे, जो एल्गोरिदम के बारे में सीखने को अपना पसन्दीदा खेल खेलने जितना ही रोचक बना देते हैं।

गतिविधि 1 : कहानी पाठ - 'प्यासा कौआ'

उद्देश्य : कहानी के पात्र समस्याओं को सुलझाने के लिए एल्गोरिदम का इस्तेमाल कैसे करते हैं इसे कहानियों का इस्तेमाल करके बताना।

कहानी : *गर्मियों की एक गरम दोपहर थी और कौआ प्यासा था। उसे एक मिट्टी का घड़ा दिखता है, जिसमें थोड़ा-सा ही पानी था। वह उस घड़े के मुहाने पर बैठ जाता है। वह पानी पीने के लिए अपनी लम्बी चोंच घड़े के अन्दर डालता है, लेकिन उसकी यह कोशिश व्यर्थ जाती है क्योंकि पानी घड़े की तली में था, इसलिए उस तक पहुँचकर पानी पीना उसके लिए मुमकिन नहीं था!*

प्यासा कौआ

कौआ अपने आस-पास देखता है, उसकी छोटी और चमकदार आँखें ज़मीन पर मौजूद हर चीज़ का निरीक्षण करती हैं। उसे पास ही कंकड़ों का एक ढेर नज़र आता है। वह घड़े के मुहाने से फुदककर नीचे आता है, अपनी चोंच से एक कंकड़ को उठाता है और फुदककर फिर से घड़े के मुँह पर बैठ जाता है। छपाक की आवाज़ के साथ वह एक कंकड़ को घड़े में डालता है और ऐसा तब तक करता रहता है जब तक कि पानी उसके पीने लायक स्तर तक नहीं पहुँच जाता। कौआ ख़ूब मन भरकर पानी पीता है और तरोताज़ा होकर उड़ जाता है।

आइए प्यासे कौए ने अपनी समस्या का जो समाधान निकाला उसे एक एल्गोरिदम में व्यवस्थित करें :

कौए का एल्गोरिदम

1. एक कंकड़ खोजें।
2. उसे घड़े में डालें।
3. अपनी चोंच को घड़े के अन्दर डालकर पानी का स्तर नापें।
4. अगर पानी का स्तर इतना न हो कि आपकी चोंच उस तक पहुँच पाए, तो 1 से लेकर 3 तक के चरणों को दोहराएँ।
5. अगर पानी का स्तर इतना हो कि आपकी चोंच उस तक पहुँच जाए, तो इतना पानी पी लें कि आपकी प्यास पूरी तरह बुझ जाए!

चर्चा : चरणों की यह सूची कौए की प्यास बुझाने के लिए उसका एल्गोरिदम है। हरेक चरण का अच्छी तरह से पालन करके, कौआ पानी की कमी से ख़ुद को बचा सकता है!

सवाल : क्या होगा अगर कौआ अपने एल्गोरिदम के किसी एक चरण को भूल जाता है, जैसे कि एक कंकड़ डालने के बाद पानी के स्तर को न जाँचना? सभी चरणों का सही क्रम में पालन करना ज़रूरी क्यों है?

क्या आप किसी भिन्न एल्गोरिदम के बारे में सोच सकते हैं, जिसका इस्तेमाल कौआ इस समस्या के समाधान के लिए कर सकता था? क्या होता अगर आस-पास कंकड़ होते ही न? उदाहरण के लिए, क्या वह अपनी चोंच मारकर पानी पीने के लिए घड़े में छेद करता?

गतिविधि 2 : नृत्य का एल्गोरिदम

उद्देश्य : नृत्य के चरणों और उनके क्रम के बारे में जानना।

खेल : हम एक सरल से नृत्य के चरणों को लिखेंगे और फिर एक साथ उनका पालन करेंगे। हम छोटे बच्चों की लोकप्रिय कविताओं/गीतों के चरणों का भी पालन कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, 'लूबी लू' गाने के बोल को नृत्य के निम्नलिखित एल्गोरिदम में व्यवस्थित कर सकते हैं :

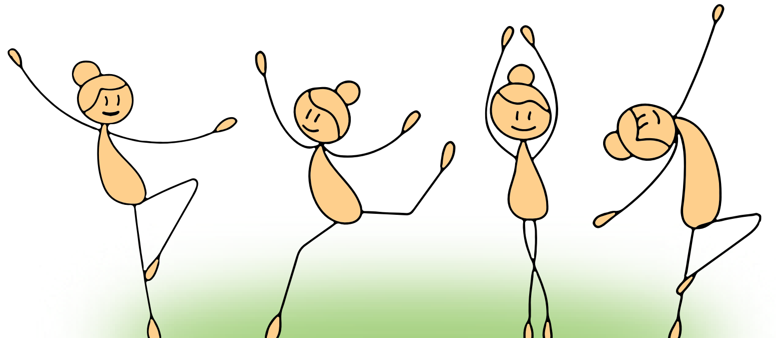
नृत्य के चरण

1. अपने दोनों हाथों को ज़मीन के समानान्तर फैलाकर खड़े हो जाएँ।
2. अपना दायाँ हाथ ऊपर उठाएँ।
3. इसे ऊपर-नीचे हिलाएँ।
4. एक बार गोल घूम जाएँ।
5. अपना बायाँ हाथ ऊपर उठाएँ।
6. इसे ऊपर-नीचे हिलाएँ।
7. एक बार फिर गोल घूम जाएँ।

निर्देश

1. चरणों को किसी बोर्ड या काग़ज़ पर लिख लें।
2. किसी गाने या धुन के अनुसार हरेक चरण का धीरे-धीरे अभ्यास करें।
3. सभी चरणों को एक साथ मिलाएँ और नृत्य करें।

चर्चा : नृत्य के एल्गोरिदम का पालन करके, आप नृत्य में शामिल चरणों को याद रख सकते हैं और उन्हें सही क्रम में कर सकते हैं। अगर आप चरणों में घाल-मेल कर देंगे, तो नृत्य वैसा नहीं रह जाएगा, जैसा यह पहले था। इससे पता चलता है कि किसी एल्गोरिदम के चरणों का क्रम ज़रूरी क्यों होता है। थोड़े बहुत संगीत के साथ एल्गोरिदम पर नृत्य करना सुनिश्चित करें! आप अपनी पसन्द का कोई भी संगीत इस्तेमाल कर सकते हैं, लेकिन अगर आप एक ऐसा संगीत चुनें, जिसके बोल में डांस के स्टेप्स या शरीर को हिलाना-डुलाना शामिल हो तो ज़्यादा बेहतर होगा।



नृत्य के चरण

गतिविधि 3 : बीज बोने का एल्गोरिदम

उद्देश्य : किसी बीज को बोने के लिए एक एल्गोरिदम का इस्तेमाल करें और पौधे के बढ़ने का अवलोकन करें।

'बीज बोने का' एल्गोरिदम

1. 15-20 बीज इकट्ठे करें।

2. 30 सेंटीमीटर व्यास (diameter) और 20 सेंटीमीटर ऊँचाई वाला एक गमला लें और इसके आधे से ज़्यादा (70 प्रतिशत) हिस्से में मिट्टी भर दें।

3. 20 प्रतिशत खाद मिलाएँ।

4. अपनी तर्जनी उंगली (index finger) से इसमें 5-6 छेद कर दें।

5. हरेक छेद में 3-4 बीज बो दें।

6. छेदों को मिट्टी से ढँक दें।

7. सींचने के कनस्तर से बीज में पानी डालें।

8. गमले को एक ऐसी जगह पर रख दें जहाँ हल्की-सी धूप आती हो और रोज़ाना इसमें पानी डालें।

9. पौधे को अंकुरित होते और बढ़ते हुए देखें।

चर्चा : चरणों के क्रम और हरेक क्रम का महत्त्व।

- अगर चरण 3 छोड़ दिया जाए तो क्या होगा?
- अगर चरण 8 छोड़ दिया जाए तो क्या होगा?
- अगर चरण 6 को चरण 5 से पहले कर दिया जाए तो क्या होगा?

गतिविधि 4 : प्रतिदिन के एल्गोरिदम

उद्देश्य : दैनिक गतिविधियों में एल्गोरिदम की पहचान करें।

अभ्यास : आइए कुछ दैनिक गतिविधियों के बारे में सोचें और उन्हें एल्गोरिदम में विभाजित करें।

उदाहरण 1 : दाँतों में ब्रश करना

1. अपना टूथब्रश लें।
2. ब्रश पर टूथपेस्ट लगाएँ।
3. टूथब्रश को नल के पानी में भिगोएँ।
4. अपने दाँतों में दो मिनट तक ब्रश करें। (**नोट :** इस चरण के लिए भी आप एक एल्गोरिदम बना सकते हैं!)
5. पानी से कुल्ला कर लें।
6. अपने टूथब्रश को साफ़ कर लें और इसे इसकी जगह पर वापस रख दें।

उदाहरण 2 : अपने स्कूल का बस्ता पैक करना

7. स्कूल की अपनी सभी किताबों को इकट्ठा करें।
8. अपना टाइम टेबल जाँच लें।
9. टाइम टेबल के मुताबिक किताबों को अपने बैग में रखें।
10. पेंसिल रखने के अपने डिब्बे को बैग में रखें।
11. यह देख लें कि आपकी पेंसिल की नोक बनी हो, और आपके पास एक रबड़ हो।
12. यह देख लें कि आपका लंच बॉक्स और पानी की बोतल आपके पास हो।
13. अपने बैग की चेन बन्द कर लें।

चर्चा : इन कार्यों को सरल चरणों में विभाजित करके, आप इन्हें ज़्यादा प्रभावी ढंग से पूरा कर सकते हैं और आपको जो कुछ भी करना है, उसे याद रख सकते हैं।

एल्गोरिदम के साथ गणित का एक खेल

पहला खेल : पैटर्न की पहचान के माध्यम से पहली n प्राकृतिक संख्याओं का योग

उद्देश्य : पहली 100 प्राकृतिक संख्याओं का योग निकालना

एल्गोरिदम

1. आप समस्या को ब्लैकबोर्ड पर लिख लें :
   $1 + 2 + 3 + ... + 100$
2. विद्यार्थियों से पूछें कि क्या उनको इस अनुक्रम में कोई पैटर्न नज़र आ रहे हैं।
3. समस्या के नीचे एक पंक्ति जोड़ें : $100 + 99 + 98 + ….. + 1$
4. विद्यार्थियों से पूछें कि क्या उनको इस अनुक्रम में कोई पैटर्न नज़र आ रहे हैं।
5. संख्याओं की जोड़ियों को बोर्ड पर लिखें :
   $(1 + 100), (2 + 99), (3 + 98), ..., (50 + 51)$
6. इस पैटर्न की पहचान करें कि इन सभी जोड़ियों का योग एक ही संख्या यानी 101 है।
7. चर्चा करें कि ऐसी कितनी जोड़ियाँ हैं।
8. जोड़ियों की संख्या और 101 का गुणनफल ज्ञात करें।
9. पता करें कि यह गुणनफल अनुक्रम के योग से कैसे सम्बन्धित है।
10. इसी पैटर्न को लागू करके और एक सूत्र बनाकर पैटर्न को अन्य संख्याओं के लिए सामान्यीकृत करने की कोशिश करें!

शिक्षक के लिए निर्देश

चर्चा करें कि किस तरह से पैटर्न की पहचान करने से किसी एल्गोरिदम के चरण तैयार करने में मदद मिलती है। जब विद्यार्थी किसी पैटर्न की पहचान करते हैं, तो वे मूल रूप से समस्या को सरल और ऐसे हिस्सों में बाँट रहे होते हैं, जिन्हें दोहराया जा सके। उदाहरण के लिए, अनुक्रम (5, 10, 15, 20…) में, यदि विद्यार्थी यह ध्यान दें कि हरेक संख्या पिछली संख्या से 5 अधिक है, तो यह पैटर्न इस अनुक्रम से सम्बन्धित समस्याएँ सुलझाने में उनकी मदद कर सकता है। इसी तरह से, किसी एल्गोरिदम का उद्देश्य किसी जटिल समस्या को निर्देशों या चरणों की एक शृंखला में विभाजित करना होता है, जिनका पालन करने पर उन्हें समस्या के एक प्रभावी समाधान तक पहुँचने में मदद मिलती है। एल्गोरिदम के सन्दर्भ में, पैटर्न की पहचान करना बहुत ज़रूरी होता है, क्योंकि इससे विद्यार्थियों को जटिल समस्याओं को ऐसे कार्यों में विभाजित करने में मदद मिलती है, जो सरल हों और जिन्हें करना आसान हो। डेटा को क्रम में व्यवस्थित करने और उनमें पैटर्न की पहचान करने से विद्यार्थियों को वर्गीकरण की अवधारणा को समझने में मदद मिलती है।

निष्कर्ष : एल्गोरिदम की ताक़त

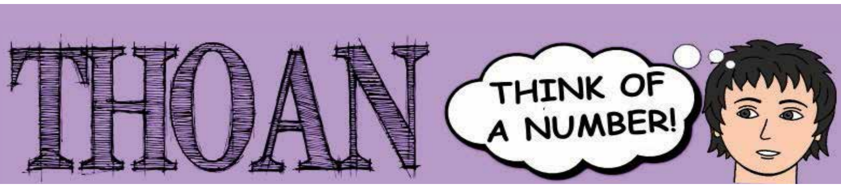
एल्गोरिदम सुनने में कठिन ज़रूर लग सकते हैं, लेकिन वे समस्याओं को चरण-दर-चरण सुलझाने का एक तरीक़ा हैं। चाहे आप नाश्ता बना रहे हों, किसी समस्या को सुलझा रहे हों, या कोई खेल खेल रहे हों, एल्गोरिदम उन्हें ज़्यादा कुशलता के साथ और प्रभावी ढंग से करने में आपकी मदद करते हैं।

एल्गोरिदम के बारे में सीखकर, हम न केवल कम्प्यूटर का बेहतर ढंग से इस्तेमाल करना या गणित के सवालों को बेहतर ढंग से हल करना सीख रहे हैं, बल्कि हम समस्याओं के बेहतर समाधानकर्ता भी बन रहे हैं। इसलिए अगली बार जब भी किसी पेचीदा समस्या से आपका सामना हो, तो एल्गोरिदम की तरह सोचना याद रखें : उसे छोटे-छोटे चरणों में विभाजित करें, हरेक चरण का ध्यान से पालन करें, और इस तरह से आपको आपका समाधान मिल जाएगा!

एल्गोरिदम ख़ज़ाने तक पहुँचने के नक़्शे की तरह होते हैं, जो आपको सही जवाब तक पहुँचाते हैं। आप इनका जितना ज़्यादा अभ्यास करेंगे, समाधान तक पहुँचना आपके लिए उतना ही आसान होता जाएगा।

अनुष्का टोनापी बेंगलूरु के श्री कुमारन चिल्ड्रन्स होम में दसवीं की छात्रा हैं। वे न्यूयॉर्क एकेडमी ऑफ़ साइंसेज़ की युवा सदस्य हैं और स्पिरिट ऑफ रामानुजन फेलोशिप पुरस्कार की विजेता हैं। उन्हें गणित के सवाल सुलझाने में मज़ा आता है और सैद्धान्तिक कम्प्यूटर विज्ञान में उनकी दिलचस्पी है। अनुष्का को शतरंज खेलना पसन्द है और अपने खाली समय में वे कर्नाटक संगीत का अभ्यास करती हैं। उनसे Anushka.tonapi@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : शहनाज़ **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता



1. कोई दो अंकीय संख्या चुनें।
2. इसे उलट दें।
3. इसे उस संख्या से घटा दें, जिसे आपने पहले चुना था।
4. आपको क्या उत्तर मिला?

अगर अंक समान हों तो क्या होगा? जब अंक अलग-अलग हों, तब क्या होगा? आपको जो पैटर्न नज़र आया, क्या आप उसकी व्याख्या कर सकते हैं?

यतिराज शर्मा की अन्य THOAN गतिविधियों के लिए *एट राइट एंगल्स* के आगामी अंक देखें।

मॉण्टेसरी का तरीक़ा : चुनिन्दा सामग्रियों का परिचय और उन्हें फिर से कैसे बनाया जाए (भाग 1)

क्षमा चक्रवर्ती

इस लेख में हम मॉण्टेसरी की अलग-अलग तरह की सामग्रियों की जाँच-परख करेंगे। हम उन सामग्रियों से बच्चों के परिचय, उनके ज़रिए सुगम बनाए जाने वाले पाठ, गणितीय अवधारणाओं के बीच सम्बन्ध, प्रत्येक सामग्री के साथ हो सकने वाली पूरक गतिविधियाँ और इन संसाधनों को बनाने के किफ़ायती विकल्प पर चर्चा करेंगे। यह लेख दो भागों में है, जिसमें कुल छह मॉण्टेसरी सामग्रियों को शामिल किया गया है।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 (एनईपी 2020) 3 वर्ष की उम्र के बच्चों की तालीम से लेकर उच्च शिक्षा तक सभी स्तरों पर शिक्षा के लिए स्पष्ट सिफ़ारिशें करती है। इन आयु समूहों के साथ सबसे ज़्यादा मेल खाने वाली सीखने की शैलियों के आधार पर स्कूली शिक्षा को चार चरणों में बाँटा गया है – 3-8 वर्ष की आयु के लिए फ़ाउण्डेशनल स्टेज (Foundational Stage), 8-11 वर्ष की आयु के लिए प्रारम्भिक चरण (Preparatory Stage), 11-14 वर्ष की आयु के लिए मध्य चरण (Middle Stage), और 14-18 वर्ष की आयु के लिए माध्यमिक चरण (Secondary Stage)।(1)

'स्कूली शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा' (एनसीएफ़एसई, 2023) में उल्लेख किया गया है कि *वर्तमान में, आरम्भिक कक्षाओं में विद्यार्थियों का बड़ा हिस्सा बुनियादी साक्षरता और संख्या-ज्ञान हासिल नहीं कर पा रहा है। गणित सीखना-सिखाना रचनात्मक और सौन्दर्यपूर्ण होने के बजाय पारम्परिक रूप से 'रोबोटिक' और 'प्रक्रियात्मक' अधिक रहा है।* विद्यार्थियों में गणित विषय के प्रति डर की भावना भी घर कर जाती है। एनसीएफ़एसई 2023 इस डर का मुक़ाबला करने में मदद करने के लिए सिखाने के अन्तर्क्रियात्मक तरीक़ों का सुझाव देता है, जिनमें बाल सुलभ खेल, कुछ नया पता करना, खोजना, चर्चा, खेलकूद और पहेलियाँ शामिल हैं। पहले तीन सालों के दौरान, 'सीखने के मानकों' [Learning Standards] को हासिल करने के लिए जो सामग्री सुझाई गई है, वह मुख्य रूप से ठोस खेल सामग्री है, जैसे कि खिलौने, पहेलियों वाले चित्र या खिलौने, तस्वीरों वाली किताबें और जोड़-जाड़कर रची जाने वाली चीज़ें। पाठ्यपुस्तकें/प्लेबुक/वर्कबुक केवल ग्रेड 1 से काम में ली जाएँगी। *शिक्षणशास्त्र बहुत हद तक खेल–आधारित है, और यह शिक्षक व बच्चों के बीच परवरिश और परवाह करने वाले रिश्तों पर ज़ोर देता है। हर बच्चा अपनी रफ़्तार से सीखे व सामूहिक गतिविधियाँ हों, इन दोनों के बीच सन्तुलन होना चाहिए।*(2)

भारत और दुनिया भर में, प्रारम्भिक शिक्षा के लिए विभिन्न विधियाँ अपनाई जाती हैं। प्रमुख विधियों में से एक 'मॉण्टेसरी शिक्षा' है। क़रीब सौ साल पहले इस शैक्षिक दर्शन और अभ्यास को डॉ. मारिया मॉण्टेसरी ने शुरू किया था। 'मॉण्टेसरी शिक्षा' ख़ुद करके सीखने,

की-वर्ड : पैटर्न; मॉण्टेसरी; टीएलएम; क़िफ़ायती सामग्री; ख़ुद करें

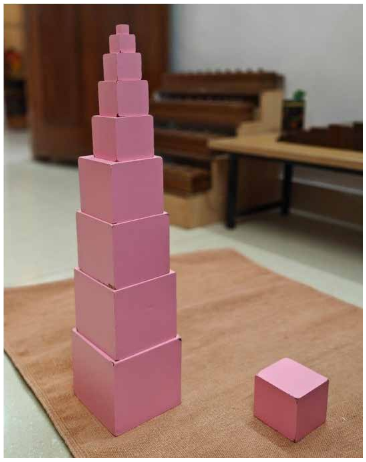
अपनी रफ़्तार से और ख़ुद से तय गतिविधियों और सहयोगी खेलों पर आधारित है। मॉण्टेसरी कक्षाओं में, बच्चे अपने सीखने की गतिविधियों का ख़ुद चुनाव कर सकते हैं। बच्चों को दिया जाने वाला माहौल और विशेष रूप से मॉण्टेसरी तरीक़ों में प्रशिक्षित शिक्षक यह सुनिश्चित करते हैं कि बच्चे को चुनने के लिए उनकी उम्र के अनुसार उपयुक्त गतिविधियाँ पेश की जाएँ। बच्चे अकेले भी काम करते हैं और समूह में भी गतिविधियाँ करते हैं। इस दौरान वे अपने आस-पास की दुनिया की खोजबीन और अन्वेषण करते हैं, ज्ञान हासिल करते हैं और इस तरह अपनी अधिकतम क्षमता तक विकास कर पाते हैं। ये कक्षाएँ बख़ूबी डिज़ाइन की गई होती हैं, और बच्चे की उम्र के आधार पर उसकी विशिष्ट ज़रूरतों को पूरा करने के लिए अच्छी तरह से सोच-समझकर बनाई जाती हैं। डॉ. मारिया मॉण्टेसरी को बच्चों के साथ सीधे काम करने का अनुभव था, जिसके आधार पर उन्होंने पाया कि इस तरह के वातावरण में ख़ुद अनुभव करके सीखने से गणित, भाषा, भूगोल, विज्ञान और इसके अलावा भी बहुत कुछ की गहरी समझ पैदा होती है। इससे बच्चे के भीतर जिज्ञासा को विकसित करने और बढ़ावा देने में मदद मिलती है और उसके लिए आजीवन सीखने का मज़बूत आधार बनता है। यह ज़ाहिर होता है कि एनईपी 2020 में प्रारम्भिक शिक्षा के लिए कुल मिलाकर जो दृष्टिकोण पेश हुआ है, वह मॉण्टेसरी शिक्षा पद्धति में बहुत हद तक हासिल किया गया है।

मॉण्टेसरी की पाठ्यचर्या में अध्ययन के पाँच प्रमुख क्षेत्र शामिल हैं : व्यावहारिक जीवन (Practical Life), संवेदी (Sensorial), गणित (Mathematics), भाषा (Language) और संस्कृति (Culture)। प्रत्येक क्षेत्र के लिए मॉण्टेसरी सामग्री का ख़ास सैट है, जो एक प्रमुख ज्ञान या कौशल पर केन्द्रित है। इस लेख में हम कुछ संवेदी सामग्रियों को देखेंगे, विशेष रूप से ऐसी सामग्रियाँ जो हमें दृश्य चीज़ों (वस्तुओं के आकार, लम्बाई, फैलाव और चौड़ाई) में फ़र्क़ करने में मदद करती हैं। जैसे-जैसे आप पढ़ेंगे, आपको अहसास होगा कि उनमें कितना कुछ है – गणित, भाषा, ध्यान केन्द्रित करना और बहुत कुछ जो आपस में गुँथे हुए हैं! उम्मीद है कि इससे यह झलक मिलेगी कि कक्षा में क्या किया जा सकता है और इसके नतीजे के रूप में क्या उम्मीद की जा सकती है।

सामग्री 1 : गुलाबी मीनार

गुलाबी मीनार ऐसी शुरुआती सामग्रियों में से एक है, जो मॉण्टेसरी परिवेश में बच्चों को दी जाती है। इसमें गुलाबी रंग के 10 क्यूब होते हैं, जिनका आयतन नीचे से ऊपर तक 1000 क्यूबिक सेंटीमीटर से लेकर 1 क्यूबिक सेंटीमीटर तक होता है। गुलाबी मीनार को आमतौर पर ढाई से तीन साल की उम्र के बच्चों को दिया जाता है, जिससे उन्हें आयाम की समझ बनाने में मदद मिले, और इसके साथ ही 'बड़ा' व 'छोटा' जैसे शब्दों से बच्चों का परिचय कराया जा सके (फिर, कुछ वक़्त बाद, उन्हें 'उससे बड़ा', 'सबसे बड़ा' व 'उससे छोटा', 'सबसे छोटा' के तुलनात्मक और श्रेष्ठता–सूचक दर्जों को समझाया जा सके)। बच्चे को **एक बार में एक** क्यूब लाने के लिए कहा जाता है, जिसकी शुरुआत सबसे छोटे क्यूब (सबसे ऊपर वाला क्यूब) से की जाती है। एक बार में एक क्यूब लाने से उन्हें सचेत रूप से या अवचेतन रूप से यह एहसास होता है कि क्यूब का आकार बढ़ रहा है। जब सभी क्यूब दरी पर रख दिए जाते हैं, तो बच्चे को सबसे बड़ा क्यूब अपने सामने रखना होता है। शिक्षक बाक़ी सभी क्यूब को मिला देते हैं। फिर बच्चे से अगला सबसे बड़ा क्यूब रखने के लिए कहा जाता है। यह सिलसिला तब तक चलता रहता है, जब तक बच्चे सभी क्यूब को उनके आकार के घटते क्रम में एक के ऊपर एक नहीं रख देते हैं। ऐसा करते समय बच्चे एक जैसी वस्तुओं की आकार के अनुसार तुलना करने के साथ-साथ उन्हें क्रमबद्ध भी करते हैं।

चित्र-1 : गुलाबी मीनार



चित्र-2 : यह क्यूब कहाँ लगेगा?

अन्य गतिविधियाँ जिन्हें आज़माया जा सकता है : जब बच्चे सामग्री से परिचित हो जाते हैं और सभी क्यूब को सही ढंग से/सही क्रम में रखने में सक्षम हो जाते हैं, तो कुछ और गतिविधियाँ की जा सकती हैं। उनमें से एक में शिक्षक बच्चे की जानकारी के बिना किसी भी एक क्यूब को चुनकर उसे मीनार में सही जगह पर वापस रखने के लिए कहें (**चित्र-2**)। इस गतिविधि के लिए बच्चे को यह ध्यान देना होता है कि मीनार में किस जगह पर क्यूब के आकार में अचानक फ़र्क़ आया है और वहाँ पर उस क्यूब को रखना होता है जिसे

हटाया गया है। या फिर, जिस क्यूब को हटाया गया है उसके आकार की तुलना मीनार पर मौजूद सभी क्यूब से करनी होती है और उस क्यूब की सही स्थिति का पता लगाना होता है – यह स्थिति उस क्यूब से बड़े क्यूब के ऊपर और उस क्यूब से छोटे क्यूब के नीचे होती है।

एक अन्य गतिविधि में, एक ट्रे में सभी क्यूब को मिला लिया जाता है और दरी पर मीनार बनाने के लिए बच्चे को एक बार में एक क्यूब लाने के लिए कहा जाता है। बच्चे को कहा जाता है कि वह पहले सबसे बड़े क्यूब को लाए और फिर एक-एक करके उससे छोटे क्यूब लाए। इसके लिए हर बार बच्चे को ट्रे में बचे हुए सभी क्यूब में से सबसे बड़ा क्यूब ढूँढ़ना होगा। यह शिक्षक के लिए तुलनात्मक और श्रेष्ठता–सूचक दर्जों का परिचय देने का भी अच्छा समय हो सकता है। दरी पर दो क्यूब रखें और पूछें, 'कौन-सा क्यूब बड़ा है?', 'कौन-सा क्यूब छोटा है?'इसे कुछ बार दोहराएँ। उसके बाद, दरी पर कोई भी तीन क्यूब रखें और पूछें, 'कौन-सा क्यूब सबसे बड़ा है?', 'कौन-सा क्यूब सबसे छोटा है?'शिक्षक इस गतिविधि को तब तक जारी रखते हैं, जब तक कि बच्चा इन शब्दों से जुड़े विचार और उनके अर्थ से परिचित नहीं हो जाता है।

एक अन्य गतिविधि में, शिक्षक 10 वर्गाकार कार्ड बनाते हैं। प्रत्येक कार्ड किसी एक क्यूब के फ़लक से मेल खाता है। फिर, बच्चे से कार्ड को उससे जुड़े क्यूब से मिलाने के लिए कहा जाता है।

सामग्री 2 : भूरी सीढ़ियाँ

'भूरी सीढ़ियाँ' ऐसी सामग्री है, जिससे बच्चों का परिचय गुलाबी मीनार के साथ ही (ढाई से तीन साल की उम्र के बीच) करवाया जाता है। इसमें भूरे रंग के क्यूबॉइड होते हैं। प्रत्येक क्यूबॉइड की लम्बाई (l) समान होती है, लेकिन चौड़ाई (w) और ऊँचाई (h) (और इसलिए इसकी मोटाई) में फ़र्क़ होता है। इस वजह से, इन्हें साथ रखने पर ये सीढ़ियों जैसे लगते हैं (**चित्र-3**)।

चित्र-3 : भूरी सीढ़ियाँ

गुलाबी मीनार के साथ की जाने वाली सभी गतिविधियों को भूरी सीढ़ियों के साथ भी किया जा सकता है। इनके ज़रिए बच्चों को 'मोटा', 'उससे मोटा', 'सबसे मोटा', 'पतला', 'उससे पतला' व 'सबसे पतला' शब्दावली से परिचित कराया जाता है। यहाँ ध्यान देने लायक़ एक दिलचस्प बात यह है कि गुलाबी मीनार के क्यूब के फ़लक भूरे रंग की सीढ़ियों के क्यूबॉइड के फ़लकों से मेल खाते हैं! इन दो सामग्रियों की खोजबीन करते–करते बच्चों को अपने आप यह अहसास हो जाता है! बच्चे इन दोनों सामग्रियों को कई तरह के क्रम से काम में ले सकते हैं। ऐसा करते हुए वे अलग-अलग पैटर्न, सन्तुलन और ध्यान केन्द्रित करने के बारे में बहुत कुछ सीखते हैं।

चित्र-4 : क्यूब और क्यूबॉइड

चित्र-5 : एक के ऊपर एक करके क्रमशः रखे गए क्यूब और क्यूबॉइड

चित्र-6 : क्षैतिज रूप से एक-दूसरे के बग़ल में रखे गए क्यूब और क्यूबॉइड

सामग्री 3 : लम्बी छड़ें

लम्बी छड़ों की सामग्री में 10 छड़ें होती हैं। सभी छड़ें एक ही मोटाई की होती हैं, लेकिन इनकी लम्बाई अलग-अलग हैं। इससे बच्चों में लम्बाई की समझ बनेगी, और 'लम्बी'

व 'छोटी'(**चित्र-7**) के बारे में शब्दावली बनाने में मदद मिलेगी। इस सामग्री से परिचित होने पर उन्हें आगे के लिए 'संख्या वाली छड़ों' को समझने में मदद मिलती है। बच्चे को, सबसे लम्बी से शुरू करके सबसे छोटी तक, एक बार में एक छड़ को दरी पर रखने के लिए कहा जाता है। शिक्षक उन्हें यह देखने का मौक़ा देते हैं कि बाएँ से दाएँ जाने पर छड़ की लम्बाई कैसे घटती जाती है। शिक्षक, छड़ों की एक जोड़ी को अलग रखकर या फिर तीन छड़ें रखकर उनमें से सबसे छोटी छड़ को बताने के लिए पूछकर 'लम्बी', 'सबसे 'लम्बी'व 'छोटी', 'सबसे छोटी' की शब्दावली से बच्चों का परिचय करवा सकते हैं। इसी तरह से छड़ों का इस्तेमाल करते हुए और समझ विकसित की जा सकती है।

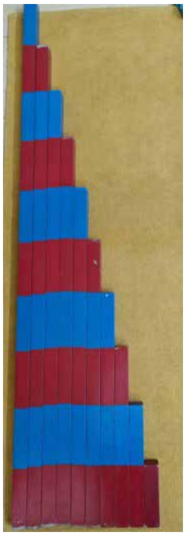
अन्य गतिविधियाँ जिन्हें आज़माया जा सकता है : ऊपर बताई गतिविधियों के अलावा छड़ों का क्रम बिगाड़ते हुए उन्हें गड्ड-मड्ड करके बच्चे से उन्हें फिर से क्रम में जमाने के लिए कहा जा सकता है; क्रम में से एक छड़ को हटाकर बच्चे से उसे सही जगह रखने के लिए कहा जा सकता है, या बच्चे से छड़ों के जोड़े बनाते हुए उनको इस तरह व्यवस्थित करने के लिए कहा जा सकता है जिससे वे सबसे लम्बी छड़ (या किसी भी लम्बाई की कोई भी छड़) की लम्बाई के बराबर हों (**चित्र-8**)।

चित्र-7 **चित्र-8 :** लम्बाइयों से मेल खाने के लिए जोड़ी गई छड़ें

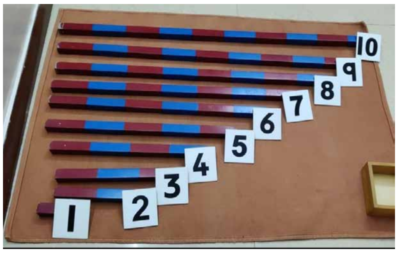
सामग्री 4 : संख्या वाली छड़ें

आमतौर पर साढ़े तीन से साढ़े चार साल की उम्र के बच्चों को 'संख्या वाली छड़ें' बताई जाती हैं। ऐसा गुलाबी मीनार, भूरी सीढ़ियों और लम्बी छड़ों के साथ लगातार काम को दोहराने के बाद किया जाता है। अब तक बच्चे संवेदी रूप से बड़े/छोटे, लम्बे/कम लम्बे (छोटे) जैसे लक्षणों का अनुभव कर चुके होते हैं। वे अब यह सोचने लगेंगे कि कोई चीज़ 'कितनी लम्बी या छोटी' है। यही वक़्त है जब वे मात्रा को समझने के लिए तैयार होते हैं। उनका मनोमस्तिष्क गणितीय रूप से जागना शुरू हो रहा होता है।

संख्या वाली छड़ें, आयाम में लम्बी छड़ों जैसी होती हैं, लेकिन इन छड़ों पर दो रंग (आमतौर पर लाल व नीला) होते हैं ('लम्बाई-1' वाली छड़ को छोड़कर) (**चित्र-9**)। बच्चा बाईं ओर से शुरू करते हुए सबसे लम्बी से सबसे छोटी छड़ों को क्रम से जमाता है। वह सुनिश्चित करता है कि हर बार छड़ का लाल हिस्सा ही नीचे हो। इस गतिविधि में, जैसे–जैसे छड़ों को रखा जाता है वैसे-वैसे शिक्षक प्रत्येक छड़ को उसके नाम से पुकारता है – '10 की छड़', '9 की छड़', और इसी तरह। आख़िरकार, बच्चा यह देख पाता है कि '2 की छड़' की लम्बाई '1 की छड़' की लम्बाई से दोगुनी है, '3 की छड़' की लम्बाई '1 की छड़' से तीन गुना है (या '1 की छड़' को तीन बार लिया गया है), और इसी तरह से यह सिलसिला आगे बढ़ाया जाता है।



चित्र-9



चित्र-10

आज़माने के लिए अन्य गतिविधियाँ : शिक्षक 1 से 10 तक की संख्या के कार्ड बनाते हैं। उन्हें आपस में मिला देते हैं। फिर वे बच्चे से कहते हैं कि वह छड़ की लम्बाई को गिन ले। इसके बाद वे बच्चे को प्रत्येक कार्ड को सही छड़ के सामने रखने के लिए कहते हैं। यह गतिविधि बच्चों में मात्रा (छड़ पर लिखी संख्या) का उसके प्रतीक (**चित्र-10** में दिखाए गए कार्ड) के साथ सम्बन्ध बना पाने का परीक्षण करती है। जब बच्चे ऐसा करने में सहज हो जाते हैं, तो शिक्षक संख्या के कार्ड के साथ-साथ छड़ों को भी मिला

देते हैं। अब वे बच्चे को एक छड़ चुनने, उसे पहचानने और उसके सामने सही संख्या का कार्ड रखने के लिए कहते हैं। चूँकि छड़ें क्रम में नहीं जमी हुई हैं, इसलिए इस गतिविधि में संख्याओं के अनुक्रम को याद रखने से बच्चे को मदद नहीं मिलेगी! एक अन्य गतिविधि छड़ों की ऐसी जोड़ी को ढूँढ़ना है, जिसका योग 10 ('10 की छड़' की लम्बाई) हो। बच्चे 9 व 1, या 8 व 2, या 7 व 3, या 6 व 4 चुन सकते हैं। याद करें कि यही गतिविधि लम्बी छड़ों के साथ की गई थी। तब छड़ों के साथ मात्रा को नहीं जोड़ा गया था। यहाँ बच्चों से छड़ों के जोड़े के संख्यात्मक नामों को कहने की अपेक्षा की गई है। इसे और अधिक चुनौतीपूर्ण बनाने के लिए शिक्षक कोई भी एक छड़ चुनकर बच्चों को उस छड़ के लिए छड़ों के जोड़े खोजने को कह सकते हैं। और बस इसी तरह, उन्हें गणित में जोड़ से जुड़े तथ्यों से परिचित कराया जाता है! दिलचस्प बात यह है कि यह सामग्री एक सातत्य (continuum) का उपयोग करके एक संख्या-रेखा शुरू करती है। 'गणितमाला' सहित अधिकांश अन्य सामग्रियाँ असतत (discrete) हैं। यह तथ्य संख्यात्मक प्रतीक (numerical symbol) और मात्रा (quantity) के बीच सम्बन्ध को स्पष्ट और आसान बनाता है कि प्रत्येक संख्यात्मक प्रतीक का किसी एक वस्तु के रूप में एक मात्रा से मिलान किया जा सकता है (मॉण्टेसरी, एम, 2016)। प्रत्येक सामग्री से जुड़ी विभिन्न अतिरिक्त गतिविधियों के विस्तृत विवरण के लिए सन्दर्भ (3) को देखा जा सकता है।

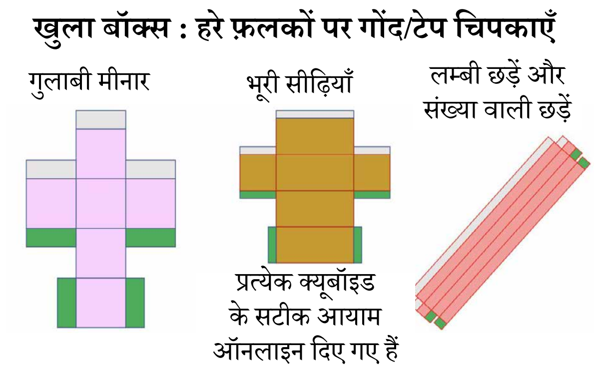
इस प्रकार, शैक्षिक सामग्री की वस्तुओं की तीन शृंखलाएँ हैं : गुलाबी मीनार, भूरी सीढ़ियाँ और लम्बी छड़ें। इन्हें इस तरह से बनाया गया है कि प्रत्येक शृंखला में तीन आयामों में अन्तरों की सम्भावनाओं को परिभाषित और अलग किया जा सके। एक-के-बाद-एक आयामों की शृंखला में तैयार की गई ये वस्तुएँ बच्चे के दिमाग़ को संवेदी रूप से गणित के लिए तैयार करने और ढालने में मदद करती हैं। यह बच्चे में ख़ास तरह की तार्किकता – मात्रा को आँकने की क्षमता – को विकसित करने में मददगार होती हैं, और यह तार्किक क्षमता गणितीय दिमाग़ की रचना करती है (मॉण्टेसरी, एम, 2007)।

क्या आप कक्षा में इन सामग्रियों को आज़माने के लिए उत्साहित हैं? बात ऐसी है, कि अपनी शिक्षण प्रक्रिया में मॉण्टेसरी सामग्री को शामिल करना आपको लुभा सकता है, लेकिन आपने भी अनुमान लगा लिया होगा कि कक्षा में उन्हें पूरी तरह से इस्तेमाल करने की कई सीमाएँ हैं। सबसे पहले तो मॉण्टेसरी शिक्षा का पूरा दर्शन शिक्षकों के लिए डिज़ाइन किए गए औपचारिक प्रशिक्षण कार्यक्रम के ज़रिए प्रदान किया जाता है। इस प्रशिक्षण के बिना, डॉ. मारिया मॉण्टेसरी द्वारा परिकल्पित व्यापक दृष्टिकोण को लागू करना चुनौतीपूर्ण हो सकता है। फिर भी, हम अपनी क्षमता के मुताबिक़ इन सामग्रियों का बेहतरीन इस्तेमाल करने की कोशिश कर सकते हैं, और जितना मुमकिन हो पाए उतना इस अनुभव को ज़्यादा-से-ज़्यादा बच्चों के साथ साझा कर सकते हैं। हालाँकि, यह भी मानना ज़रूरी है कि इस नेक इरादे के बावजूद कई सीमाएँ मौजूद हैं।

बेशक, खोज और सीखने के लिहाज़ से मॉण्टेसरी की सामग्रियाँ शानदार साधन हैं, लेकिन ये काफ़ी महँगी होती हैं। इसके अलावा, बच्चों को समझाते वक़्त इन सामानों का सटीक होना ज़रूरी है; इस लिहाज़ से इन सामग्रियों की प्रतिकृतियाँ बनाना चुनौतीपूर्ण है। आयामों में मामूली बदलाव भी उनके इस्तेमाल के मक़सद को काफ़ी हद तक प्रभावित कर सकते हैं। आमतौर पर, मॉण्टेसरी सामग्री लकड़ी, धातु या कपड़े जैसी क़ुदरती सामग्रियों से तैयार की जाती है। इस लेख में मुख्यतः लकड़ी की सामग्रियों को परखा गया है।

कुछ सामग्रियों को क़िफ़ायती और आसानी से हासिल कर पाने के मक़सद से, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय की 'मैथ स्पेस' (Math Space) ने कम लागत वाली मॉण्टेसरी सामग्री बनाने के लिए अभिनव और कुशल तरीक़ा विकसित किया है। इस तरीक़े में सटीकता बनी रहती है, जिससे इन्हें काम में लेने के इच्छुक शिक्षक अपनी कक्षाओं में इन संसाधनों को असरदार ढंग से बनाने और इस्तेमाल करने में सक्षम होते हैं। यहाँ ऐसे आसान चरण बताए गए हैं, जिनसे आप भी इन्हें बना सकते हैं!

1. सटीकता सुनिश्चित करने के लिए आप जो आयाम चाहते हैं उनके क्यूब या क्यूबॉइड के जाल (मोटे चार्ट पेपर या आइवरी शीट का इस्तेमाल करके) बनाएँ।
2. जाल के भीतर की जगह को चौकोर (क्यूब के लिए) या आयताकार (क्यूबॉइड के लिए) नालीदार कार्डबोर्ड शीट से भर दें, जिससे यह ठोस हो जाए।
3. इसे गलने से बचाने के लिए (जलरोधी बनाने के लिए) पूरे ठोस भाग पर टेप चिपका दें।
4. और लीजिए! आपकी मॉण्टेसरी सामग्री तैयार है।



चित्र-11 : विभिन्न सामग्रियों के लिए नैट

चित्र-12 : भराई के लिए नालीदार कार्डबोर्ड शीटें

चित्र-13 : तैयार सामग्री : क़िफ़ायती गुलाबी मीनार और भूरी सीढ़ियाँ!

आप इन सामग्रियों को बनाने की चरण-दर-चरण प्रक्रिया और ज़रूरी आयामों को सन्दर्भ (6) में दी गई लिंक पर देख सकते हैं। ध्यान दें कि मॉण्टेसरी की मूल भूरी सीढ़ियाँ 20 सेंटीमीटर लम्बाई की बनती हैं, जबकि यहाँ 15 सेंटीमीटर लम्बाई के जाल इस्तेमाल किए गए हैं। फिर भी, लम्बाई में यह फ़र्क़ सामग्री की उपयोगिता या प्रभावशीलता पर असर नहीं डालता है।

मॉण्टेसरी पद्धति के सिद्धान्तों को अपनाना, और इनके लिए ज़रूरी सामग्रियों को कम लागत में सुलभ बनाना सभी बच्चों के लिए गुणवत्तापूर्ण शिक्षा को लोकतांत्रिक बनाने में मददगार होगा। हर बच्चे के स्वाभाविक विकास पर ध्यान देकर हम हर लिहाज़ से मुकम्मल ऐसे व्यक्ति तैयार कर सकते हैं जो न सिर्फ़ ज़रूरी ज्ञान से लैस हों, बल्कि दुनिया की जटिलताओं से होकर गुज़रने के लिए ज़रूरी आत्मविश्वास और कौशल भी रखते हों।

कुल मिलाकर, मॉण्टेसरी पद्धति महज़ एक शिक्षणशास्त्रीय तकनीक से कहीं अधिक है; यह ऐसा दर्शन है जो प्रत्येक बच्चे की अपनी अद्वितीय क्षमता को बढ़ावा देता है, और इस तरह शिक्षा में ज़्यादा रोशन और ज़्यादा समावेशी भविष्य की राह बनाता है।

आभार : *इस लेख को सुश्री सुधा राव, पारिजात मॉण्टेसरी और स्वाती सरकार, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के इनपुट लेते हुए संकलित किया गया है।*

References

1. National Curriculum Framework for School Education (2023), Page 20.
2. NCFSE (2023), https://www.ncert.nic.in/pdf/NCFSE-2023-August_2023.pdf
3. Activities with Pink Tower, Brown Stairs, Long Rods and Number Rods https://bit.ly/3YcXg6S
4. Montessori, M. (2016). *Psychoarithmetic* (Vol. 20, p. 6). Montessori Pierson Publishing Company.
5. Montessor, M. (2007) *Creative Development in the Child* (Vol. 1). Kalakshetra Press.
6. How to make low cost Pink Tower, Brown Stairs, Long Rods and Number Rods https://bit.ly/4eJhR8u

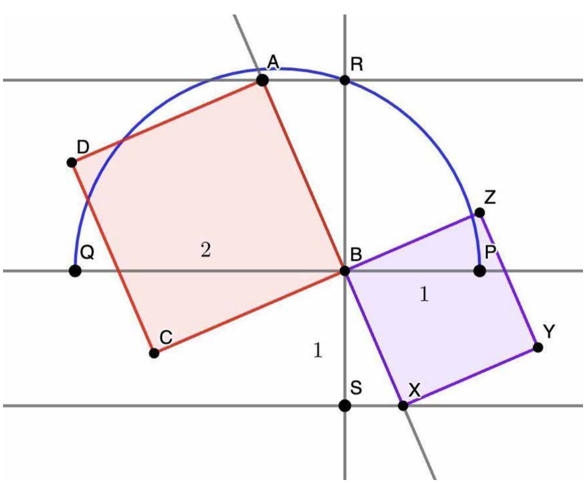
क्षमा चक्रवर्ती एक शिक्षिका हैं। उन्होंने आईआईटी मद्रास से गणित में स्नातकोत्तर की उपाधि और अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय से शिक्षा में स्नातकोत्तर की उपाधि हासिल की है। गणित की शिक्षा में 15 से अधिक वर्षों के अनुभव के साथ, उन्होंने सामग्रियों के विकास, शिक्षण और शिक्षक प्रशिक्षण जैसे क्षेत्रों में काम किया है, साथ ही विद्यार्थियों के साक्षात्कार किए हैं और मूल्यांकन तैयार किए हैं। क्षमा युवा मनोमस्तिष्क को जानने, समझने और पोषित करने के प्रति जुनूनी हैं। । उन्हें बच्चों के साथ समय बिताना और कुदरत का आनन्द लेना भाता है। उनसे kshamagc@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : हिमालय तहसीन **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता

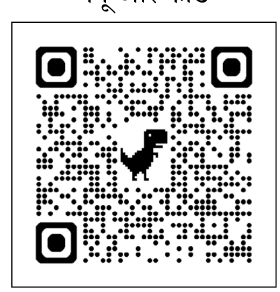
एक ऐसा वर्ग बनाना जिसका क्षेत्रफल दिए गए वर्ग के क्षेत्रफल का आधा हो

निम्नलिखित आकृति में मान लें कि ABCD एक दिया गया वर्ग है (जिसकी भुजा की लम्बाई अज्ञात है)।

मान लें कि PB = BS = 1 इकाई, और BQ = 2 इकाई। अगर मान लें कि PRQ एक अर्धवृत्त है जो P और Q बिन्दुओं से होकर गुजरता है। तो वर्ग XYZB का क्षेत्रफल ABCD के क्षेत्रफल का आधा होना चाहिए।



ऑनलाइन लेख का
क्यू आर कोड



यह प्रश्न और यह चित्र हमारे एक लेखक द्वारा भेजा गया है। इसने हमें सोचने पर मजबूर कर दिया।

इस चित्र को देखने में कुछ समय व्यतीत करें – क्या वर्ग XYZB का क्षेत्रफल दिए गए वर्ग ABCD के क्षेत्रफल का आधा है? यदि हाँ, तो क्यों? अपने समाधान की जाँच करने और ऐसे अन्य सवालों का सामना करने के लिए, ऑनलाइन लेख "एक ऐसा वर्ग बनाना जिसका क्षेत्रफल दिए गए वर्ग के क्षेत्रफल का 1/n हो" पर जाएँ।

जोड़-घटा पर इबारती सवाल

नारायण मेहर

इबारती सवाल वास्तव में क्या हैं? इनको हल करने में बच्चों को किन चुनौतियों का सामना करना पड़ता है? क्या इबारती सवाल कई तरह के होते हैं? इन सवालों के जवाब पाने तथा और भी बहुत कुछ जानने के लिए यह लेख पढ़ें। लेख जोड़-घटा से जुड़े इबारती सवालों के बारे में गहराई से चर्चा करता है।

इबारती सवाल ऐसे गणितीय सवाल होते हैं जिन्हें आभासी-वास्तविक दुनिया की किसी स्थिति में पिरोकर किसी कथन या कहानी के माध्यम से वर्णित किया जाता है। यह उन 'ख़ालिस सवालों' से अलग होते हैं जो महज़ गणितीय प्रतीकों या समीकरणों के रूप में व्यक्त किए जाते हैं। इबारती सवालों में, अवधारणाओं, विचारों या मॉडलों का उपयोग वास्तविक दुनिया की घटनाओं को समझने के लिए किया जाता है। इबारती सवाल स्कूली गणित का एक अभिन्न हिस्सा हैं, ख़ासकर छोटी कक्षाओं के गणित का। इससे विद्यार्थी यह समझना शुरू करते हैं कि गणित महज़ प्रतीकों और अमूर्तताओं में ही नहीं होता है, बल्कि वास्तविक दुनिया के परिदृश्यों में भी होता है।

अच्छी तरह से तैयार किए गए इबारती सवाल विद्यार्थी को एक सार्थक वास्तविक दुनिया का सन्दर्भ दे सकते हैं। इबारती सवाल बच्चों के लिए उन समस्याओं को हल करने के लिए प्रेरित करने वाले होने चाहिए जिन्हें वे महत्त्वपूर्ण और उपयोगी मानते हैं। ऐसे इबारती सवाल जिनमें विद्यार्थी के उनके अपने जीवन से जुड़े कोई उपयुक्त सन्दर्भ न हों, वे विद्यार्थियों को इन्हें हल करने के लिए प्रेरित और आमंत्रित नहीं कर सकते। निश्चित रूप से, इबारती सवाल ऐसे सन्दर्भों/ स्थितियों का वर्णन कर सकते हैं जो लोगों/ बच्चों में मूल्य ला सकते हैं। इसके कुछ उदाहरण हैं – बच्चों द्वारा दीये बनाना और उन्हें बाज़ार में बेचना, बच्चों द्वारा अनाथालय की मदद के लिए पैसे इकट्ठा करना, लड़कियों द्वारा लैंगिक रूढ़िवादिता को तोड़ने के लिए खेती करना आदि स्थितियों में पिरोकर सवाल बनाना। बच्चों को अपने आस-पास देखने और अपने निकट परिवेश के आधार पर इबारती सवाल बनाने के लिए भी प्रेरित किया जा सकता है। यह लेख उन कठिनाइयों पर ध्यान दिलाता है जो विद्यार्थियों को इबारती सवालों को हल करते समय पेश आती हैं और इन कठिनाइयों को सम्बोधित करने के लिए शैक्षणिक रणनीतियाँ प्रस्तुत करता है।

इबारती सवालों के साथ बच्चों को पेश आने वाली कठिनाइयाँ

जैसा कि PISA (2003, पृष्ठ संख्या 24) में बताया गया है कि बच्चों की इबारती सवालों को हल करने की क्षमता गणितीय साक्षरता में उनकी क्षमता पर निर्भर करती है। गणितीय साक्षरता में गणितीय ज्ञान और कौशल का उचित उपयोग करने की क्षमता शामिल है। इसमें गणितीय अवधारणाओं को समझना, डेटा की व्याख्या करना, पैटर्न को पहचानना, गणितीय तर्क लागू करना और अंकगणितीय संक्रियाओं का उपयोग करना शामिल है।

जब हल करने के लिए कोई इबारती सवाल दिया जाता है, तो बच्चों को दी गई समस्या या स्थिति को समझना होता है और उसकी व्याख्या करनी होती है, फिर उसे ख़ालिस संख्याओं वाले सवाल में बदलना होता है और फिर उसे हल करना होता है। इस प्रकार,

की-वर्ड : इबारती सवाल, सन्दर्भ में गणित, अनुप्रयोग, तर्क, वास्तविक जीवन की समस्याएँ

अंकगणितीय इबारती सवालों को हल करने के लिए दो अलग-अलग क्षमताओं की आवश्यकता होती है – पहली, भाषाई सवाल को गणितीय प्रतीकों में अनूदित करना; और दूसरी, अंकगणितीय संक्रियाओं को लगाना, हल करना। विद्यार्थियों के सामने सबसे पहले क्या प्रस्तुत किया जाना चाहिए? ख़ालिस संख्याओं वाले सवाल या इबारती सवाल? (यह 'मुर्गी पहले आई या अण्डा' वाली स्थिति है।)

कई बच्चे जो ख़ालिस संख्याओं वाले सवाल हल करने में अच्छे होते हैं, वे इबारती सवालों को हल नहीं कर पाते हैं, यानी एक गणितीय व्यंजक या समीकरण दिए जाने पर वे इसे सरल बना सकते हैं और सही उत्तर पर पहुँच सकते हैं। लेकिन इबारती सवाल हल करने के मामले में क्या हो जाता है? यदि बच्चे समस्या को अपने दिन-प्रतिदिन के अनुभवों से नहीं जोड़ पाते हैं तो इबारती सवालों को पूछने का उद्देश्य छूट जाता है। फिर वे इसे गणित में एक और बाधा के रूप में देखेंगे। भाषा भी इबारती सवाल बनाने में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाती है। विद्यार्थियों को यह समझने के लिए जूझना पड़ता है कि सवाल का कथन क्या है, इसे सही तरीक़े से गणितीय भाषा में कैसे लिखा जाएगा और इसे हल करने के लिए किस गणितीय संक्रिया को लगाना होगा।

यह देखा गया है कि विद्यार्थियों को इबारती सवालों को आत्म-विश्वास से हल करने में मदद करने के प्रयास में 'की-वर्ड' पर अनुचित ज़ोर दिया जाता है, जैसे 'अधिक', 'ले लिया', 'कुल', 'अन्तर', 'शेष', 'बचा' आदि। इससे विद्यार्थी वास्तविक दुनिया की स्थिति की ग़लत व्याख्या करते हैं और सवाल को हल करने के लिए अनुचित संक्रिया लगाते हैं। इसके अलावा, इबारत में ऐसे विवरण भी हो सकते हैं जो सवाल को हल करने के लिए आवश्यक न हों। बच्चों को अप्रासंगिक जानकारी पहचानना और उसे छोड़कर सवाल हल करना मुश्किल लगता है।

आइए एक उदाहरण के माध्यम से समझते हैं कि की-वर्ड पर अनुचित ज़ोर विद्यार्थियों को कैसे गुमराह कर सकता है।

तालिका-1 : की-वर्ड पर ध्यान केन्द्रित करने के कारण होने वाली त्रुटियों का उदाहरण।

सवाल-1	सवाल-2
10 साल की एक लड़की हबीबा के पास 9 अमरूद हैं। 11 साल की कल्याणी के पास हबीबा से 5 अमरूद अधिक हैं। कल्याणी के पास कितने अमरूद हैं?	10 साल की एक लड़की हबीबा के पास 9 अमरूद हैं। हबीबा के पास 11 साल की कल्याणी से 5 अमरूद अधिक हैं। कल्याणी के पास कितने अमरूद हैं?
अतिरिक्त या अप्रासंगिक जानकारी – हबीबा 10 साल की है और कल्याणी 11 साल की है। **की-वर्ड** – अधिक (विद्यार्थी को सिखाया गया है कि सवाल में यह की-वर्ड होने पर जोड़ना होता है)	
सवाल का गणितीय व्यंजक : 9 + 5 **संक्रिया :** 9 + 5 = 14	
जवाब : कल्याणी के पास 14 अमरूद हैं।	
जाँच : हबीबा के पास 9 अमरूद हैं और कल्याणी के पास 5 अधिक हैं – 14, 9 से 5 अधिक। **सही :** की-वर्ड रणनीति काम कर गई है।	**जाँच :** हबीबा के पास कल्याणी से 5 अमरूद अधिक हैं – हबीबा के पास 9 और कल्याणी के पास 14 अमरूद। **त्रुटि :** की-वर्ड रणनीति कारगर नहीं रही।

इस तरह, इबारती सवालों को हल करने का प्रयास करते समय विद्यार्थियों को पेश आने वाली प्रमुख चुनौतियों में शामिल हैं :

1. सवाल में वर्णित सन्दर्भ से जुड़ाव बना पाना।
2. इबारती सवाल को समझना, ख़ासकर तब जब अपरिचित शब्दावली इस्तेमाल की गई हो या वाक्य संरचना जटिल हो।
3. सही अंकगणितीय संक्रिया का चयन।
4. की-वर्ड पर अनावश्यक ज़ोर।
5. अनावश्यक या अतिरिक्त जानकारी पहचानने में असमर्थता और उपयोगी जानकारी को पहचानकर या निकालकर इस्तेमाल करने में असमर्थता।
6. गणितीय व्यंजक और समीकरण बनाने में कठिनाई।
7. अंकगणितीय संक्रिया सही ढंग से लगाकर हल करने में कठिनाई।

विद्यार्थियों को इबारती सवाल आत्म-विश्वास के साथ हल करने में मदद करने के लिए शिक्षक को उन्हें हर सवाल को अलग तरीक़े से हल करना सिखाना चाहिए। लेकिन सबसे पहले, शिक्षक को गणितीय व्यंजकों और समीकरणों को बनाने के महत्त्व के बारे में समझना चाहिए। इसके अलावा, उन्हें विभिन्न प्रकार के इबारती सवालों के बारे में पता होना चाहिए जिनका सामना बच्चा इस स्तर पर कर सकता है।

व्यंजक और समीकरण

गणितीय समीकरण और व्यंजक सवाल की इबारत और उसके हल के बीच का एक चरण है।

गणितीय व्यंजक संख्याओं, चर और संक्रियाओं का संयोजन होता है जो कुछ गणितीय मान दर्शाता है। उदाहरण के लिए :
3 + 2 (संख्याएँ और जोड़ की संक्रिया)

3x + 5 (संख्याएँ, चर और जोड़ व गुणा की संक्रियाएँ)

गणितीय समीकरण एक कथन है जो दो विभिन्न व्यंजकों के बराबर होने को दर्शाता है। उदाहरण के लिए: 4 + ___ = ___ + 6 (व्यंजक 4 + ___, व्यंजक ___ + 6 के बराबर है।) $3x + 2 = 11$ ($3x + 2$ व्यंजक 11 के बराबर है।)

प्रत्येक जोड़ या घटा के व्यंजक को दो समीकरणों में बदला जा सकता है।

उदाहरण के लिए :

1. व्यंजक 27 + 54, को समीकरण 27 + 54 = 81 में बदला जा सकता है जिसे निम्न दो तरीक़ों से देखा जा सकता है :

   अ. 27 + ___ = 81 और

   ब. ___ + 54 = 81

2. 81 – 54, इस व्यंजक को समीकरण 81 – 54 = 27 में बदला जा सकता है और इसे निम्न दो तरीक़ों से देखा जा सकता है :

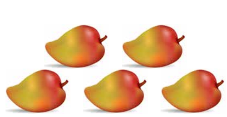
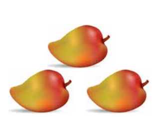
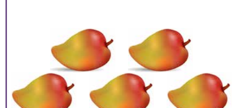
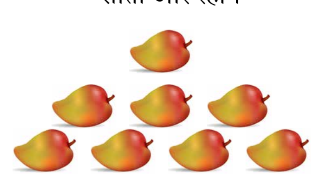
   अ. 81 – ___ = 27 और

   ब. ___ – 54 = 27

इबारती सवालों के प्रकार

बनाए गए सभी प्रकार के इबारती सवालों का एक पैटर्न होता है। कारपेंटर व उनके साथियों (1983) ने जोड़ और घटा की संक्रियाओं के लिए चार प्रकार के इबारती सवाल बताए हैं। ये चार प्रकार हैं : मिलाना/ जोड़ना, तुलना करना, बदलना/ बदलाव और बराबर बनाना। पी नेशर, जे. जी. ग्रीनो और एम. एस. रिले, (1982) ने अपने काम में मिलाना, तुलना करना और बदलना को 14 उपश्रेणियों में वर्गीकृत किया। इस वर्गीकरण के आधार पर, निम्नलिखित तालिकाएँ तैयार की गई हैं।

तालिका-2 : मिलाना वाले सवालों के उदाहरण और हल के लिए सुझाई गई शैक्षणिक रणनीतियाँ।

<table>
<tr><td colspan="2">सवाल-1 : सीता के पास 5 आम हैं और रहीम के पास 3 आम हैं। उनके पास कुल कितने आम हैं?
सवाल-2 : सीता के पास 5 आम हैं। सीता और रहीम के पास कुल 8 आम हैं। रहीम के पास कितने आम हैं?
प्रस्तावित रणनीति : मॉडलिंग का उपयोग करके प्रत्येक के पास आम की संख्या दर्शाएँ और फिर विद्यार्थियों से समस्या कथन तैयार करने के लिए कहें।</td></tr>
<tr><td>श्रेणी : मिलाना-1
सामान्य विवरण : अन्तिम समूह (पूर्ण) के बारे में सवाल</td><td>श्रेणी : मिलाना-2
सामान्य विवरण : एक उपसमूह (हिस्से) के बारे में सवाल</td></tr>
<tr><td>उदाहरण : सीता के पास 5 आम हैं और रहीम के पास 3 आम हैं। उनके पास कुल कितने आम हैं?</td><td>उदाहरण : सीता के पास 5 आम हैं। सीता और रहीम के पास कुल 8 आम हैं। रहीम के पास कितने आम हैं?</td></tr>
<tr><td>निरूपण
सीता  रहीम </td><td>निरूपण
सीता  सीता और रहीम </td></tr>
</table>

कथन तैयार करना : **चर्चा के लिए प्रश्न :** हमें क्या पता लगाना है? **उत्तर :** आमों की कुल संख्या।	**कथन तैयार करना :** **चर्चा के लिए प्रश्न :** हमें क्या पता लगाना है? **उत्तर :** रहीम के पास कितने आम हैं।
व्यंजक : 5 + 3	समीकरण : ___ + 5 = 8 या 8 – 5 =___
उत्तर : सीता और रहीम के पास कुल 8 आम हैं।	**उत्तर :** रहीम के पास 3 आम हैं।
जाँच : समस्या कथन के साथ पुष्टि करके उत्तर की जाँच करें।	

तालिका-3 : बदलाव की समस्याओं के उदाहरण और हल के लिए सुझाई गई शैक्षणिक रणनीतियाँ।

सवाल-3 : रुद्र के पास ₹10 हैं और उसे अपने माता-पिता से आने वाले त्योहार के लिए ₹20 और मिले। अब उसके पास कुल कितने रुपए हैं? **सवाल-4 :** रुद्र के पास ₹10 हैं। उसके माता-पिता ने उसे आगामी त्योहार के लिए कुछ रुपए दिए। अब उसके पास ₹30 हैं। उसके माता-पिता ने उसे कितने रुपए दिए? **सुझाई गई रणनीति :** रोल प्ले के माध्यम से लेन-देन दिखाएँ और फिर विद्यार्थियों से कथन बनाने के लिए कहें।	
श्रेणी : बदलाव-1 **सामान्य विवरण :** इज़ाफ़ा, अन्तिम (पूर्ण) समूह के बारे में सवाल	**श्रेणी :** बदलाव-2 **सामान्य विवरण :** इज़ाफ़ा, उपसमूह (हिस्से) के बारे में सवाल
उदाहरण : रुद्र के पास ₹10 हैं। और उसे अपने माता-पिता से आने वाले त्योहार के लिए ₹20 और मिले। अब उसके पास कुल कितने रुपए हैं?	**उदाहरण :** रुद्र के पास ₹10 हैं। उसके माता-पिता ने उसे आगामी त्योहार के लिए कुछ रुपए दिए। अब उसके पास ₹30 हैं। उसके माता-पिता ने उसे कितने रुपए दिए?
रोल प्ले के माध्यम से निरूपण रुद्र माता-पिता  	**रोल प्ले के माध्यम से निरूपण** रुद्र = 10 माता-पिता = ? कुल = 30   
कथन बनाना : **चर्चा के लिए प्रश्न :** क्या पता लगाना है? **उत्तर :** रुद्र के पास त्योहार के लिए कुल कितने रुपए हैं?	**कथन बनाना :** **चर्चा के लिए प्रश्न :** क्या पता लगाना है? **उत्तर :** रुद्र को उसके माता-पिता से कितने रुपए मिले?
व्यंजक : 10 + 20	**समीकरण :** 10 + ___ = 30 या 30 - 10 = ___
उत्तर : रुद्र के पास त्योहार में में ख़र्च करने के लिए ₹30 हैं।	**उत्तर :** रुद्र के माता-पिता ने उसे ₹20 दिए।
जाँच : कथन के साथ पुष्टि करके उत्तर की जाँच करें।	

तालिका-4 : बदलाव के सवाल के अन्य प्रकार एवं उनके उदाहरण।

परिवर्तन-3	इज़ाफ़ा, प्रारम्भिक समूह के बारे में सवाल	*रुद्र के पास कुछ रुपए हैं। उसके माता-पिता ने उसे आगामी त्योहार के लिए ₹20 दिए थे। अब उसके पास ₹30 हैं। शुरुआत में उसके पास कितने पैसे थे?*
परिवर्तन-4	घटाव, अन्तिम समूह के बारे में सवाल	*रुद्र के पास ₹30 हैं। उसने एक खिलौना ख़रीदने में ₹20 खर्च किए। अब उसके पास कितने रुपए हैं?*

परिवर्तन-5	घटाव, परिवर्तन के बारे में सवाल	*रुद्र के पास ₹30 हैं। उसने एक खिलौना ख़रीदने में कुछ पैसे ख़र्च किए। अब उसके पास ₹10 हैं। खिलौने की क़ीमत क्या है?*
परिवर्तन-6	घटाव, प्रारम्भिक समूह के बारे में सवाल	*रुद्र के पास कुछ रुपए हैं। उसने ₹20 में एक खिलौना ख़रीदा। अब उसके पास ₹10 हैं। शुरुआत में उसके पास कितने रुपए थे?*

तालिका-5 : तुलना के सवालों के प्रकार एवं उनके उदाहरण।

शीर्षक	**सामान्य विवरण**	**इबारती सवाल**
तुलना-1	'अधिक' का उल्लेख, अन्तर समूह के बारे में सवाल	*हबीबा के पास 9 अमरूद हैं और कल्याणी के पास 5 अमरूद हैं। किसके पास अधिक अमरूद हैं और कितने अधिक हैं?*
तुलना-2	'अधिक' का उल्लेख, जिससे तुलना की जा रही है उस (तुलना) समूह के बारे में सवाल	*हबीबा के पास 9 अमरूद हैं और उसके पास कल्याणी से 4 अमरूद अधिक हैं। कल्याणी के पास कितने अमरूद हैं?*
तुलना-3	'अधिक' का उल्लेख, जिसकी तुलना की जा रही है उस समूह के बारे में सवाल	*कल्याणी के पास 5 अमरूद हैं और हबीबा के पास कल्याणी से 4 अमरूद अधिक हैं। हबीबा के पास कितने अमरूद हैं?*
तुलना-4	'कम' का उल्लेख, अन्तर समूह के बारे में सवाल	*हबीबा के पास 9 अमरूद हैं और कल्याणी के पास 5 अमरूद हैं। किसके पास कम अमरूद हैं और कितने कम हैं?*
तुलना-5	'कम' का उल्लेख, जिससे तुलना की जा रही है उस (तुलना) समूह के बारे में सवाल	*कल्याणी के पास हबीबा से 4 अमरूद कम हैं। हबीबा के पास 9 अमरूद हैं। कल्याणी के पास कितने अमरूद हैं?*
तुलना-6	'कम' का उल्लेख, जिसकी तुलना की जा रही है उस समूह के बारे में सवाल	*कल्याणी के पास 5 अमरूद हैं और उसके पास हबीबा से 4 अमरूद कम हैं। हबीबा के पास कितने अमरूद हैं?*

साहित्य में एक चौथा प्रकार, यानी बराबर करने के सवालों, का भी उल्लेख किया गया है। बदलाव और तुलना के सवालों को बराबर करना के सवालों में बदला जा सकता है। उदाहरण के लिए, ऊपर दिए गए बदलाव-2 के सवाल : *रुद्र के पास ₹10 हैं। उसके माता-पिता ने उसे आने वाले त्योहार के लिए कुछ रुपए दिए। अब उसके पास ₹30 हैं। उसके माता-पिता ने उसे कितने पैसे दिए?* इस सवाल को इस तरह बदला जा सकता है : *रुद्र को आने वाले त्योहार के लिए खिलौना ख़रीदने के लिए ₹30 चाहिए। उसके पास ₹10 हैं। उसे अपने माता-पिता से कितने रुपए चाहिए होंगे?*

इसी तरह से, ऊपर दिए गए तुलना-1 के उदाहरण : *हबीबा के पास 9 अमरूद हैं और कल्याणी के पास 5 अमरूद हैं। किसके पास अधिक अमरूद हैं और कितने अधिक अमरूद हैं?* इसे इस प्रकार से लिखा जा सकता है : *कल्याणी के पास 5 अमरूद हैं। हबीबा के पास 9 अमरूद हैं। कल्याणी को अपने अमरूद की संख्या हबीबा के अमरूद के बराबर करने के लिए कितने और अमरूद चाहिए होंगे?*

दोनों सवालों में व्यंजक इस तरह बनता है :

दी गई मात्रा + __ को दी गई दूसरी मात्रा के बराबर रखा जाता है।

हालाँकि इबारती सवालों की विभिन्न श्रेणियों के बारे में विद्यार्थियों को समझने की ज़रूरत नहीं है लेकिन निश्चित रूप से इन श्रेणियों के बारे में जानने से शिक्षक को मदद मिलती है। सबसे पहले, श्रेणियों के बारे में जानने से शिक्षक अभ्यास के लिए कई सवाल बना सकते हैं। दूसरा, विद्यार्थियों को हल करने के लिए दो श्रेणियों के दो सवाल देकर वे निरूपण के माध्यम से विद्यार्थियों को दो सवालों के बीच के अन्तर से परिचित करवा सकते हैं।

इस तरह सवाल का कथन समझना, व्यंजक बनाना और सवाल हल करने के चरण बच्चे के लिए बहुत अधिक सार्थक हो जाते हैं। अन्त में, उन श्रेणियों की पहचान करना जिनमें विद्यार्थियों को कठिनाई होती है और साथ ही उन शब्दावलियों की पहचान करना जिसे विद्यार्थी समझ नहीं पाते हैं, रचनात्मक मूल्यांकन में मदद करता है जिससे शिक्षक को विद्यार्थियों के लिए इन कठिनाई से उबरने के लिए काम/ सत्र तैयार बनाने में मदद मिलती है।

इबारती सवाल को हल करने के चरणों को संक्षेप में कहें तो विद्यार्थियों को इबारती सवाल हल करने में सक्षम करने के लिए शिक्षक को विद्यार्थियों को सिखाना चाहिए :

1. इबारती सवाल को समग्र तौर पर पढ़ें और समझें। (की-वर्ड पर ज़ोर देने से बचें)। विद्यार्थी को इस बारे में बहुत स्पष्ट होना चाहिए कि सवाल क्या है और क्या पता करने की आवश्यकता है। सवाल के कथन लिखने से विद्यार्थियों को ऐसा करने में मदद मिल सकती है।
2. एक आरेख या एक मॉडल बनाएँ जो सवाल में प्रस्तुत की गई स्थिति को दर्शा सके। शिक्षकों द्वारा इबारती सवाल को हल करने के लिए रेखाचित्र या ऐसे ही कोई तरीक़े का उपयोग करके बनाए गए एक प्रभावी मॉडल का उपयोग और प्रदर्शन करने की आवश्यकता है। रोल प्ले भी विद्यार्थियों को सवाल को समझने में मदद कर सकता है।
3. सवाल को हल करने के लिए उससे आवश्यक जानकारियाँ निकाल लें।
4. इबारती सवाल में ऐसी भी जानकारी दी गई हो सकती है जो सवाल को हल करने के लिए ज़रूरी नहीं है। विद्यार्थियों को इसे पहचानने और इसे छोड़ देने में सक्षम होना चाहिए।
5. कथन को गणितीय समीकरणों या व्यंजक में बदलें। जब विद्यार्थी समझ जाते हैं कि क्या दिया गया है और क्या ज्ञात करना है, तो वे इसे आसानी से हल करने में सक्षम होते हैं।
6. समस्या को हल करने के लिए अंकगणितीय संक्रिया का उपयोग करें।

निष्कर्ष

विद्यार्थियों को इबारती सवालों को हल करने में सक्षम बनाने के लिए शिक्षक को स्पष्ट रूप से एक ऐसा मॉडल बनाने की आवश्यकता है कि इबारती सवाल को समग्र रूप से कैसे समझा जाए, कोई प्रभावी मॉडल या आरेख कैसे चुना जाए, संख्या को मात्रात्मक रूप से कैसे समझा जाए, इबारती सवालों के प्रकार की पहचान कैसे की जाए, स्थिति या सवाल को गणितीय व्यंजक या समीकरण में कैसे बदला जाए और संक्रिया कैसे की जाएँ।

वास्तविक दुनिया की स्थिति में सभी संक्रियाओं को प्रस्तुत करना और फिर उन्हें यह पता लगाने में मदद करना कि उन्हें कैसे हल किया जाए महत्त्वपूर्ण है, ताकि उन्हें समझ और प्रक्रिया दोनों मिल सके। बच्चों में स्कूल आने के पहले से ही जोड़ और घटाव की सहज समझ होती है, भले ही वे इसे स्पष्ट रूप से नहीं व्यक्त न कर पाएँ लेकिन वे पहले से ही अपने दिन-प्रतिदिन के खेल और गतिविधियों में जोड़ना और घटाना का अनुभव कर चुके होते हैं। इबारती सवालों के माध्यम से गणित में विद्यार्थियों के परिचित सन्दर्भ लाना महत्त्वपूर्ण है ताकि उन्हें यह समझने में मदद मिल सके कि गणित कोई अलग दुनिया नहीं है, बल्कि प्रतीकों, संकेतन और प्रक्रियाओं के साथ इसी दुनिया का विस्तार है।

References

1. Nesher, P., Greeno, J. G., & Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational studies in mathematics, 13*(4), 373-394.
2. Carpenter, T. P., Hiebert, J., & Moser, J. M. (1983). The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*(1), 55-72.
3. Menon, U. (2007). Word Problems and activities - Designing the curriculum. In Proceedings of the conference epiSTEME (Vol. 2).

नारायण मेहर अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलूरु में शिक्षक-शिक्षा समूह के एक सदस्य हैं। इसके पहले, उन्होंने मीराम्बिका फ्री प्रोग्रेस स्कूल, दिल्ली और हेरिटेज एक्सपीरिएन्शियल लर्निंग स्कूल (HXLS), गुड़गाँव में गणित और खोजयात्रा पढ़ाया है। HXLS के साथ काम करते हुए, उन्होंने दिल्ली स्थित ग़ैर-लाभकारी संगठन जोड़ो ज्ञान के साथ मिलकर काम किया, जो मुख्य रूप से गणित पढ़ाने के अभिनव तरीक़ों पर काम करता है। उन्होंने IAAT (I AM A TEACHER), गुड़गाँव में शिक्षक और शिक्षक प्रशिक्षक के रूप में काम किया। उनकी रुचि गणित शिक्षा के क्षेत्र में है। वे हैंड्सऑन गतिविधि और शिल्प में भी रुचि रखते हैं, जिसमें आकार-आकृति सम्बन्धी सोच और तर्क की आवश्यकता होती है। उनसे narayana.meher@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : प्रियेश गुप्ता **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

बोतलों में भिन्न

भिन्न पढ़ाने पर बातचीत

नरेन्द्र कोठियाल एवं मैथ स्पेस

Chat

Narender Kothiyal

available

Search

Last chats

SO Sophia typing...

MA Maaya

SA Sanjay

ZO Zoya

NK Narender Kothiyal

SW Swati

AR Arddhendu

AS Ashok

RU Rudresh

SA Sandeep

Math Space

Sophia, Maaya, Sanjay, Zoya, Narender Kothiyal

Messages Participants

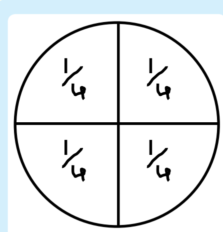
Sophia

नमस्ते दोस्तो! मैं अगले सप्ताह कक्षा-6 के बच्चों को भिन्न पर अध्याय पढ़ाने जा रही हूँ। भिन्न से सम्बन्धित विषय पढ़ाने का यह मेरा पहला मौक़ा है। ख़ासकर, मैं भिन्नों को दृश्यात्मक रूप से दर्शाना, भिन्नों की तुलना करना और भिन्नों को जोड़ना सिखाना चाहती हूँ।

मेरे विद्यार्थियों को भिन्नों की कुछ समझ है। जैसे कि किसी आकृति को दो बराबर भागों में या चौथाई भागों में बाँटना या किसी आकृति के कुछ हिस्सों को रँगना। उदाहरण के लिए, वे 8 बराबर भागों में बँटे किसी आयत के $\frac{3}{8}$ हिस्सों को रंग लेते हैं।

उन्हें किसी पूर्ण (या पूर्ण समूह) के हिस्सों को पता करने की बुनियादी समझ भी है। उदाहरण के लिए, अगर सीमा ने एक दर्जन केलों में से 2 केले खा लिए, तो सीमा ने केलों का कितना हिस्सा खाया?

Maaya



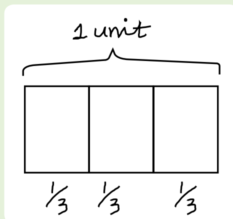
मैं रोटियों का इस्तेमाल करती हूँ।

Write your message...

Math Space
Sophia, Maaya, Sanjay, Zoya, Narender Kothiyal

Messages Participants

SA Sanjay



मैंने आयतों का इस्तेमाल किया, जो लम्बाई में छोटे बराबर आयतों में विभाजित होते हैं। अगर हम इस तरह से विभाजित करते हैं, तो न सिर्फ़ क्षेत्रफल, बल्कि लम्बाई भी विभाजित हो जाती है।

SO Sophia

बच्चे भिन्नों की मानसिक छवि कैसे बनाते हैं? वे क्या विभाजित होते हुए देखते हैं? क्या वे हिस्सों को एक-आयामी मात्राओं (लम्बाई, परिधि) के तौर पर देखते हैं या दो-आयामी मात्राओं (क्षेत्रफल) के तौर पर?

SA Sanjay

हाँ, एक-आयामी…

MA Maaya

मुझे लगता है दो-आयामी।

SO Sophia

क्या किसी ने तीन आयामी मात्राओं, आयतन? धारिता? को आज़माकर देखा है?

ZO Zoya

मैं एक अलग तरीक़ा अपनाया था। मैंने खाना बनाने में इस्तेमाल होने वाले भिन्नों (हिस्सों) का इस्तेमाल किया।

पैमाना चम्मच जिन भिन्नों (हिस्सों) को मापते हैं, वे उन पर लिखे हुए हैं। इससे विद्यार्थियों के लिए यह समझना आसान हो जाता है कि यहाँ अंश और हर का असल में क्या अर्थ है।

SO Sophia

यह दिलचस्प है! मैं यह समझ गई कि इससे भिन्नों की तुलना करने में कैसे मदद मिलती है, लेकिन इसका इस्तेमाल भिन्नों पर संक्रियाओं को समझने के लिए कैसे किया जा सकता है?

NK

Write your message...

Math Space
Sophia, Maaya, Sanjay, Zoya, Narender Kothiyal

Messages Participants

SA Sanjay

मुझे सन्देह है कि पैमाना चम्मचों से भिन्नों के जोड़ और घटा को समझने में मदद मिल सकती है।

👍 1

You

माफ़ी चाहता हूँ, मैं इस दिलचस्प चर्चा से वंचित रह गया। मैंने उपरोक्त टीएलएम की बजाए बोतलों का इस्तेमाल किया था, और यह काम कर गया था।

SA Sanjay

बोतलें?

क्या आपका मतलब मापने वाले मर्तबानों से है?

You

नहीं! मैंने प्लास्टिक की साधारण बोतलों का इस्तेमाल किया। दरअसल इससे विद्यार्थियों को दो भिन्नों के योग को 'समझने' में मदद मिलती है।

MA Maaya

मैं इसे लेकर उत्सुक हूँ। कृपया थोड़ा और विस्तार से बताइए।

You

मैंने ऐसा करने के लिए काग़ज़ के मोड़, भिन्न दीवारों (fraction walls) और बोतलों का इस्तेमाल किया था।

भिन्न दीवारों का इस्तेमाल करने की वजह से उन्हें पहले से ही पता था कि $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ है, और किस तरह से हर के बढ़ने के साथ हिस्सा कम हो रहा है। वे इन बातों को सत्यापित भी कर पा रहे थे।

MA Maaya

मैं काग़ज़ को मोड़कर ऐसा करती हूँ... लेकिन, बोतल से ऐसा कैसे किया जा सकता है?

You

बोतलों से! बहुवचन। 🙂

SO Sophia

माफ़ी चाहती हूँ, मैंने अभी-अभी आपके सन्देश देखे। मैं थोड़ी भ्रमित हूँ। क्या आप मुझे वे बोतलें दिखा सकते हैं, जिनका आपने इस्तेमाल किया था?

NK

Write your message...

Math Space
Sophia, Maaya, Sanjay, Zoya, Narender Kothiyal

Messages Participants

You

बिल्कुल। ये रहीं वे।

SO Sophia

आप समझाएँ, उसके पहले मुझे आपके आयडिया को ख़ुद समझने की कोशिश करने दें। 🤔

ZO Zoya

अहा! मुझे लगता है कि मैं समझ गई कि यहाँ आपने क्या किया।

SO Sophia

बोतलों से आपका मतलब केवल उनके लम्बे बेलनाकार हिस्सों से है ना? ऊपर के शंक्वाकार हिस्से को इसमें नहीं शामिल किया जाएगा। यहाँ पर, ऊँचाई या आयतन को पूर्ण माप माना जा सकता है।

👍 2

ZO Zoya

हाँ! ऐसे में काग़ज़ की एक पट्टी बेलनाकार हिस्से में चिपकाई जा सकती है।
काग़ज़ की पट्टी को $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ और में विभाजित करना आसान है, बस इसे मोड़कर निशान लगा दीजिए। लेकिन इससे $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{5}$ आदि ... कैसे दिखाएँगे?

SO Sophia

क्या सिर्फ़ प्रिन्टआउट ले लें?

You

असल में मैंने और कुछ नहीं किया। ऊँचाई को n बराबर भागों में विभाजित करने के लिए सरल से साधन – परकार (compass) और पैमाने (ruler) – का इस्तेमाल किया।

SA Sanjay

लेकिन @Narender जी, आपने इन बोतलों का इस्तेमाल कैसे किया?

You

मैंने इनका इस्तेमाल निम्नलिखित अवधारणाओं को देखकर और ख़ुद करके सीखने के लिए किया।

- समतुल्य भिन्न, जैसे कि $= \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$
- भिन्नों की तुलना करना, जैसे कि $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$
- भिन्नों को जोड़ना और घटाना, जैसे कि $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

NK

Write your message...

Math Space
Sophia, Maaya, Sanjay, Zoya, Narender Kothiyal

Messages Participants

SO Sophia

दो अलग-अलग बोतलों का इस्तेमाल करके?

You

हाँ। दरअसल, हमें एक ही आकार की तीन बोतलों की ज़रूरत होगी।

देखिए, जब हम $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$, को लेते हैं, तो अधिकतर विद्यार्थियों को यह बहुत अमूर्त और निरर्थक लगता है। लेकिन बोतलों के मामले में, हम बोतल में भरी पानी की $\frac{2}{3}$ मात्रा और $\frac{1}{4}$ मात्रा ले पाते हैं।

तब, जब हम इन दो बोतलों से पानी को एक तीसरी बोतल में मिलाते हैं तो यह $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ होता था। यह जोड़ उन्हें समझ आता है।

MA Maaya

अहा! यह तो बहुत दिलचस्प है।

SO Sophia

और वे देख पाते होंगे कि जोड़ एक उचित भिन्न (proper fraction) था...

MA Maaya

क्योंकि पानी बोतल से बाहर बहा नहीं, इसका मतलब पानी का स्तर 1 के निशान से नीचे था।

SO Sophia

@Narender जी, क्या आपने $\frac{3}{4} + \frac{1}{3}$ को आज़माया?

You

नहीं, मैंने ऐसे भिन्नों को चुना जिनका योग एक से कम हो।

ZO Zoya

$\frac{3}{4} + \frac{1}{3}$ पर विचार करना दिलचस्प होगा। 😉

SO Sophia

काग़ज़ भीगेगा नहीं?

You

भीगेगा, पर पेंसिल के निशान भीगने पर फैलते नहीं हैं।

MA Maaya

यह कारग़र होना चाहिए। क्या आपको योग भिन्न के रूप में मिला?

NK

Write your message...

Math Space
Sophia, Maaya, Sanjay, Zoya, Narender Kothiyal

Messages Participants

You

दरअसल हाँ! हमने $\frac{2}{3}$ और $\frac{1}{4}$ के लिए समान हर की चर्चा की और हमें 12 मिला। तो, तीसरी बोतल 12 बराबर भागों में बाँटी गई। जब हमने $\frac{2}{3}$ और $\frac{1}{4}$ को इसमें उड़ेला, तो पानी का स्तर $\frac{11}{12}$ पर था!

👍 2

$\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}$ और को दर्शाती 500 मिलीलीटर पानी की बोतल

$\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}$ को दर्शाती 500 मिलीलीटर पानी की बोतल

SO Sophia

दरअसल, $\frac{2}{3}$ को उड़ेलने के बाद, आप देख सकते हैं कि $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

SA Sanjay

यह काफ़ी दिलचस्प है।

SO Sophia

हाँ! हम हरेक बोतल पर कई पैमाने रख सकते हैं, तीन पट्टियों को क्रमशः 4, 8 और 12 बराबर भागों में बाँट सकते हैं...

ZO Zoya

यह दर्शाएगा $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$ और $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$

SO Sophia

इसके साथ ही, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12}$ दर्शाएगा।

ZO Zoya

बिल्कुल!

SO Sophia

और $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ और $\frac{1}{12}$ के लिए दूसरी बोतल पर तीन पट्टियाँ।

NK

Write your message...

Math Space
Sophia, Maaya, Sanjay, Zoya, Narender Kothiyal

Messages Participants

Zoya

तो फिर, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$ भी होगा।

Sophia

हाँ, और जब आप $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ को $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, से जोड़ते हैं, तो आप इसे $\frac{11}{12}$ तक बढ़ते हुए देखते हैं।

Maaya

@Narender जी, विद्यार्थियों की प्रतिक्रिया कैसी थी?

You

बोतलों को विभिन्न स्तरों तक भरकर स्वयं करके देखने के इस अनुभव से उन्हें ज़्यादा स्पष्टता आई। $\frac{2}{3}$ या $\frac{3}{5}$ अमूर्त चिह्न नहीं रह गए थे, बल्कि कुल लम्बाई के सन्दर्भ में वास्तविक मात्राएँ थीं। दो भिन्नों का योग करने का एक उद्देश्य था। और इस तरह से उनकी उत्सुकता बढ़ी।

Sophia

बहुत बढ़िया! मैंने कभी भी धारिता या तरल पदार्थ के आयतन के तौर पर भिन्नों को अनुभव नहीं किया... इसका इस्तेमाल करने की इच्छुक मुझ जैसी नई शिक्षिका का मार्गदर्शन आप कैसे करेंगे?

You

पहला नियम यह है कि एक ही आकार और आकृति की बोतलें एकत्र करना शुरू किया जाए... जिनकी तली बेलनाकार हो...

मैंने इन बोतलों के साथ प्रयोग किया है। ये कारगर हैं।

Sophia

बहुत बढ़िया।

You

और ये वाली नहीं काम करेंगी।

Write your message...

NK

Math Space
Sophia, Maaya, Sanjay, Zoya, Narender Kothiyal

Messages Participants

You

आप बेलनाकार हिस्से के सबसे ऊपरी किनारे पर निशान लगाएँ और ऊँचाई निकालें... अब, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, और सम्भव हो तो 15 के हर चुनें। हरेक हर के लिए काग़ज़ की पट्टी बनाएँ, कुल 9 पट्टियाँ बनाएँ और उन्हें बराबर भागों में बाँटें– क्रमशः आधे, एक तिहाई, एक चौथाई, पाँचवें, छठवें, आठवें, दसवें, बारहवें और पन्द्रहवें में... अब, एक बोतल पर 5, 10 और 15 बराबर भागों में बँटी पट्टियाँ चिपकाएँ, दूसरी बोतल पर 3-6-12-15 भागों में बँटी पट्टियाँ चिपकाएँ, तीसरी पर 2-4-8-12 भागों में बँटी...

SA Sanjay

@Narender जी, आपने कौन-सी कक्षा के बच्चों के साथ यह किया?

You

कक्षा-7

SO Sophia

बहुत बढ़िया!

You

और कक्षा में भिन्न दीवार लगाने से मदद मिलती है...

MA Maaya

हाँ, इससे समतुल्य भिन्नों की पहचान करने में मदद मिलती है।

SO Sophia

क्या आपने भिन्नों का घटाना सिखाने के लिए भी इसका इस्तेमाल किया?

SA Sanjay

क्यों नहीं? $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}$ को आज़माकर देखिए।

SO Sophia

हम्म... आप पहली बोतल में $\frac{3}{5}$ भरते हैं, फिर दूसरी बोतल में $\frac{1}{2}$ उड़ेलते हैं। पानी का शेष आयतन $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}$ को दर्शाता है।

SA Sanjay

क्या इसे इतने पर ही ख़त्म हो जाना चाहिए?

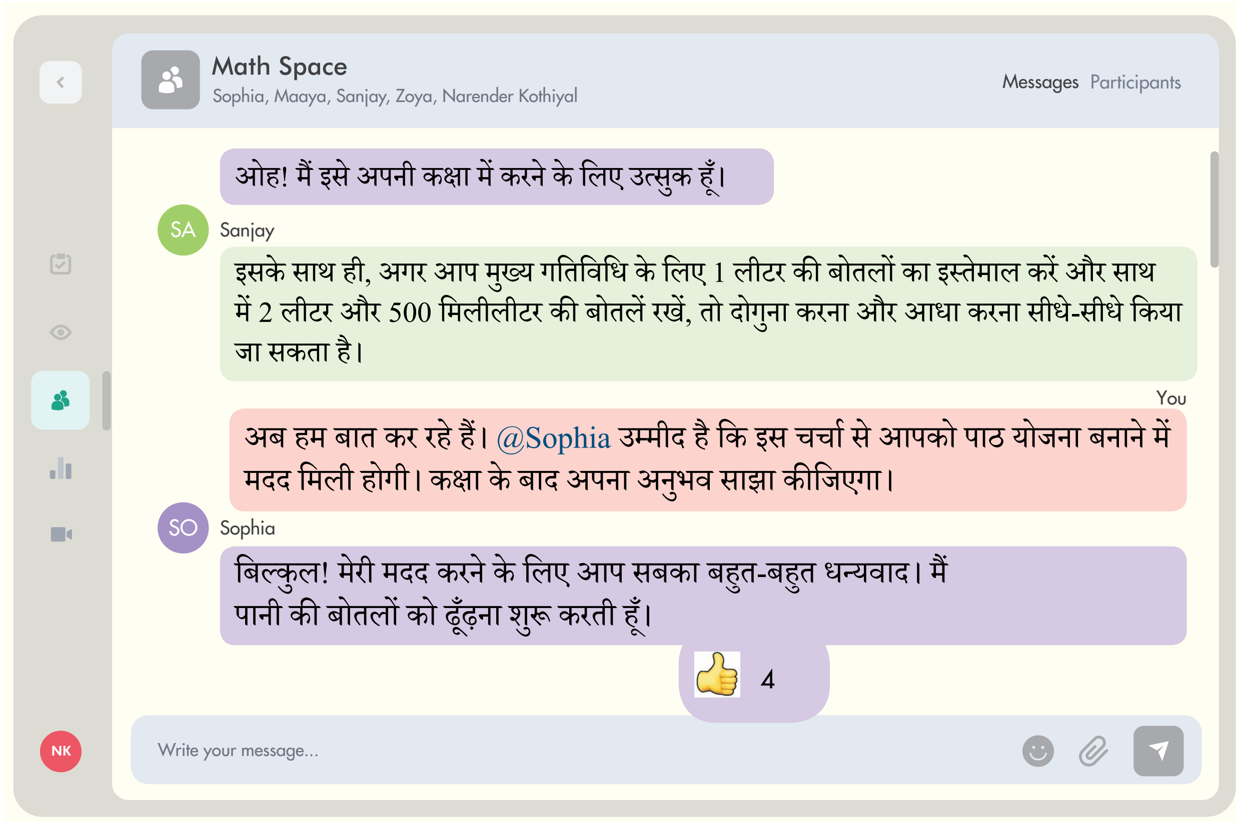
SO Sophia

बेशक़ नहीं। विद्यार्थी पहले ही देख रहे होंगे कि $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ और $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$। तो उड़ेलने से पहले मैं उनसे उत्तर का अन्दाज़ा लगाने को कह सकती हूँ और वे सत्यापित कर सकते हैं कि उत्तर दरअसल $\frac{1}{10}$ है।

👍 4

NK

Write your message...



सम्पादकीय टिप्पणी

उपरोक्त चर्चा अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के मैथ स्पेस में हुई बातचीत का एक काल्पनिक प्रस्तुतीकरण है। हमने चर्चा को इस तरह से संशोधित किया है कि यह मैसेजिंग ऐप में चैट की तरह लगे।

नरेन्द्र कोठियाल अप्रैल 2013 से अज़ीम प्रेमजी स्कूल, उत्तरकाशी में कार्यरत हैं। वे प्राथमिक और उच्च प्राथमिक कक्षाओं में गणित पढ़ाते हैं। अज़ीम प्रेमजी स्कूल में आने से पहले वे देहरादून में विभिन्न विद्यालयों में शिक्षण क्षेत्र से जुड़े रहे हैं। उन्हें कहानी की पुस्तकें पढ़ने का शौक़ है। उनसे narender.kothiyal@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

मैथ स्पेस अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय की एक गणित प्रयोगशाला है जो स्कूलों, शिक्षकों, अभिभावकों, बच्चों, स्कूली शिक्षा और शिक्षक प्रशिक्षकों के साथ काम करने वाले गैर-सरकारी संगठनों को सेवाएँ प्रदान करती है। यह गणित की विभिन्न शिक्षक सहायक सामग्रियों (mat(h)erials) और उनकी सम्भावनाओं को तलाशती है, उसी के साथ इनके कम लागत वाले संस्करण, जो कबाड़ से बनाए जा सकते हैं, को भी खोजती है। यह गणित से डरने या नफ़रत करने वालों और साथ-ही-साथ गणित प्रेमियों, को सम्बोधित करने का प्रयास करती है। यह एक ऐसा स्थान है जहाँ कई लोगों के साथ चर्चा से विचार उत्पन्न होते हैं और विकसित होते हैं। मैथ स्पेस को आप mathspace@apu.edu.in पर लिख सकते हैं।

अनुवाद : शहनाज़ **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता

भिन्न के साथ मज़ा

तेजस श्रीराम

यह लेख मूल रूप से एक ऑनलाइन गणितीय स्रोत, NRICH, पर प्रस्तुत की गई समस्या से प्रेरित है। विचार वाटिका के तत्वावधान में आयोजित किए गए 'गणित मन्थन' नामक कोर्स में भाग लेते हुए, एक समस्या ने मेरा ध्यान आकर्षित किया। यहाँ आगे, मैंने मूल समस्या(ओं) का जवाब दिया है और उस समस्या के स्वाभाविक विस्तार के बारे में खोजबीन की है, जहाँ मुझे कुछ पैटर्न मिले और मैंने उन्हें सिद्ध किया।

आइए हम निम्नलिखित सरल नियमों का उपयोग करके "मज़ेदार भिन्नों" को परिभाषित करें :

- नियम-1 : $\frac{1}{2}$ एक मज़ेदार भिन्न है।
- नियम-2 : यदि $\frac{p}{q}$ एक मज़ेदार भिन्न है, तो $\frac{p}{p+q}$ भी एक मज़ेदार भिन्न है।
- नियम-3 : यदि $\frac{p}{q}$ एक मज़ेदार भिन्न है, तो $\frac{q}{p+q}$ भी एक मज़ेदार भिन्न है।

इसका अर्थ यह है कि हम मज़ेदार भिन्न $\frac{1}{2}$ से शुरू कर सकते हैं और नियम-2 और नियम-3 को बार-बार लागू करके अन्य सभी मज़ेदार भिन्न बना सकते हैं। जब नियम-2 लागू किया जाता है तो एक लाल तीर खींचकर और जब नियम-3 लागू किया जाता है तो एक नीला तीर खींचकर हम नियम-2 और 3 को लागू करने की प्रक्रियाओं को दृश्य रूप से दिखा सकते हैं।

मान लीजिए कि $\frac{p}{q}$ एक मज़ेदार भिन्न है। $\frac{p}{q}$ पर नियम-2 और नियम 3 लागू करके, हमें निम्नलिखित समीकरण मिलता है :

$$\begin{tikzcd} & \frac{p}{q} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \frac{p}{p+q} & & \frac{q}{p+q} \end{tikzcd}$$

उदाहरण के लिए, $\frac{1}{2}$ पर नियम-2 और नियम-3 को लागू करने को इस प्रकार दर्शाया जा सकता है :

$$\begin{tikzcd} & \frac{1}{2} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} \end{tikzcd}$$

इस शाखा को एक और स्तर तक बढ़ाते हुए इस प्रकार देखा जा सकता है :

$$\begin{tikzcd} & & & \frac{1}{2} \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\ & \frac{1}{3} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \frac{2}{3} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \frac{1}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} \end{tikzcd}$$

की-वर्ड : *समस्या समाधान, समस्या उठाना, पैटर्न, फ़िबोनाची*

इससे पता चलता है कि प्रत्येक मज़ेदार भिन्न शाखाओं में बँटकर दो नए मज़ेदार भिन्न बना देती है।

***गतिविधि :** शाखाओं को अगले दो स्तरों तक विस्तार दें। आपके अवलोकन क्या हैं?*

इसके बाद, आइए कुछ स्वाभाविक प्रश्नों का पता लगाएँ जिनका उल्लेख NRICH वेबपेज पर भी किया गया है। पाठकों से आग्रह है कि समाधानों की जाँच करने से पहले इन्हें हल करने का प्रयास करें :

1. सबसे बड़ी/ छोटी मज़ेदार भिन्न कौन-सी है?
2. सबसे बड़ा/ छोटा अंश कौन-सा है?
3. क्या यह सही है कि अंश घटते क्रम में नहीं होते?
4. ऐसा लगता है कि एक मज़ेदार भिन्न के अंश और हर में 1 को छोड़कर कोई उभयनिष्ठ भाजक नहीं होता है। क्या यह हमेशा सही होता है?
5. क्या भिन्नों का एक बन्द फन्दा बनाना सम्भव है, जहाँ परिवर्तनों का एक क्रम आपको प्रारम्भिक बिन्दु पर वापस ले आए?

अब, मैं पाठकों को उपरोक्त समस्याओं को हल करने की अपनी यात्रा पर ले जाना चाहूँगा। सबसे पहले हम एक संकेतन प्रस्तुत करते हैं : चूँकि प्रत्येक चरण में केवल दो सम्भावनाएँ हैं, इसलिए हम नीचे वर्णित संकेतन का उपयोग करके प्रत्येक मज़ेदार भिन्न को दर्शा सकते हैं।

- नियम-1 द्वारा उत्पन्न मज़ेदार भिन्न को प्रतीक A द्वारा दर्शाया गया है।
- नियम-2 द्वारा उत्पन्न एक मज़ेदार भिन्न को प्रतीक B द्वारा दर्शाया गया है और
- नियम-3 द्वारा उत्पन्न एक मज़ेदार भिन्न को प्रतीक C द्वारा दर्शाया गया है।

इसका मतलब है कि $\frac{1}{2}$ को A के रूप में दर्शाया गया है और किसी भी अन्य मज़ेदार भिन्न को A से शुरू होने वाली शृंखला के रूप में दर्शाया जा सकता है और उसके बाद Bs और/ या Cs का द्विआधारी संयोजन आ सकता है।

उदाहरण के लिए, ABCB मज़ेदार भिन्न $\frac{3}{7}$ को प्रस्तुत करता है, क्योंकि

$$\underset{A}{\frac{1}{2}} \xrightarrow[B]{} \frac{1}{3} \xrightarrow[C]{} \frac{3}{4} \xrightarrow[B]{} \frac{3}{7}$$

समाधान

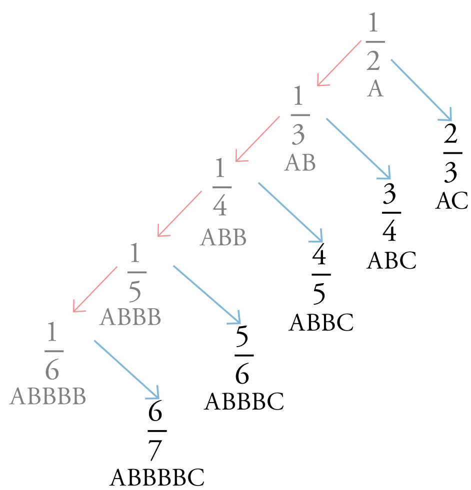
1. चूँकि $\frac{1}{2}$ धनात्मक है, इसलिए हर दूसरी मज़ेदार भिन्न धनात्मक होनी चाहिए। साथ ही, चूँकि प्रत्येक मज़ेदार भिन्न का हर, अंश से बड़ा होता है, इसलिए प्रत्येक मज़ेदार भिन्न 1 से छोटा होना चाहिए।

   अब आइए A, AB, ABB, ABBB, ABBBB, इत्यादि के रूप के मज़ेदार भिन्नों को देखें। इसका मतलब है कि हम नियम-2 को $\frac{1}{2}$ पर बार-बार लागू कर रहे हैं। दृश्य रूप में इसका मतलब सबसे बाईं शाखा है :

$$\underset{A}{\frac{1}{2}} \rightarrow \underset{AB}{\frac{1}{3}} \rightarrow \underset{ABB}{\frac{1}{4}} \rightarrow \underset{ABBB}{\frac{1}{5}} \rightarrow \underset{ABBBB}{\frac{1}{6}}$$

किसी भी प्राकृतिक संख्या n का व्युतक्रम $\frac{1}{n}$ इस शाखा में होना चाहिए। इस प्रकार, इस शाखा में प्रविष्टियाँ छोटी होती रहती हैं और कभी समाप्त नहीं होती हैं। इसका मतलब है कि कोई सबसे छोटी मज़ेदार भिन्न सम्भव नहीं है।

आइए अब हम AC, ABC, ABBC, ABBBC, ABBBBC इत्यादि रूपों की मज़ेदार भिन्नों को देखें। इसका मतलब है $\frac{1}{2}$ पर नियम-2 को बार-बार लागू करना और फिर अन्त में *एक बार* नियम-3 को लागू करना। दृश्य रूप से, इसका मतलब है 'दूसरी' सबसे बाईं शाखा :



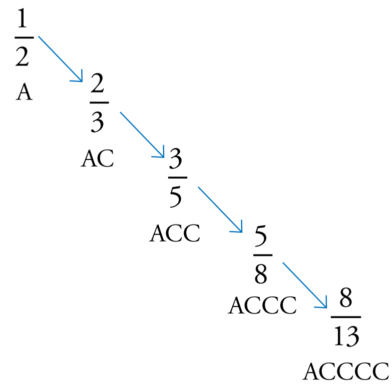
इस शाखा में प्रत्येक प्राकृतिक संख्या $n > 1$ के लिए $\frac{n}{n+1}$ के रूप के मज़ेदार भिन्न हैं। इसलिए यह मज़ेदार भिन्नों का एक बढ़ता हुआ क्रम है जो कभी समाप्त नहीं होता। इसका मतलब है कि कोई सबसे बड़ी मज़ेदार भिन्न सम्भव नहीं है।

2. सबसे छोटा अंश स्पष्ट रूप से 1 है, जो $\frac{1}{2}$ का अंश है। हालाँकि, जैसा कि हमने समाधान-1 में देखा, $\frac{n}{n+1}$ प्रत्येक प्राकृतिक संख्या n के लिए एक मज़ेदार भिन्न है। इसलिए कोई भी सबसे बड़ा अंश सम्भव नहीं हो सकता है।
3. हाँ, चूँकि नियम-2 अंशों को बनाए रखता है और नियम-3 अंशों को बढ़ाता है, इसलिए अंश कभी घट नहीं सकते। लेकिन क्या होगा यदि हम किसी स्तर पर अंश और हर के बीच एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड को निरस्त कर सकें? अगला समाधान कहता है कि यह सम्भव नहीं है।
4. मान लीजिए $\frac{p}{q}$ एक मज़ेदार भिन्न है। नियम-2 या नियम-3 लागू करने पर, हमें क्रमशः भिन्न $\frac{p}{p+q}$ या $\frac{q}{p+q}$ प्राप्त होते हैं। आइए हम इन तीन भिन्नों के बीच अंशों और हरों के उभयनिष्ठ गुणनखण्डों की तुलना करने का प्रयास करें।

   मान लीजिए कि d, p और q दोनों का एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। तब स्पष्ट रूप से d को $p + q$ को विभाजित करना चाहिए। इसी प्रकार, मान लीजिए कि d, p और $p + q$ *दोनों* का एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है, तो d को $q = (p + q) - p$ को भी विभाजित करना चाहिए। इसका मतलब है कि p, q और $p + q$ के उभयनिष्ठ गुणनखण्डों की सूची बिल्कुल समान है।

   स्पष्ट रूप से, पहली मज़ेदार भिन्न $\frac{1}{2}$ के लिए, अंश और हर के बीच केवल एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है, अर्थात 1। इसलिए हर दूसरी मज़ेदार भिन्न $\frac{p}{q}$ के लिए, अंश p और हर q का एकमात्र उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 1 ही है।
5. नियम-2 और 3 दोनों ही हरों को बढ़ाते हैं। इसलिए बन्द फन्दा प्राप्त करने का एकमात्र तरीक़ा छोटे अंश और हर प्राप्त करने के लिए मज़ेदार भिन्न में उभयनिष्ठ गुणनखण्डों को निरस्त करना है। हालाँकि, समाधान-4 के अनुसार, यह सम्भव नहीं है। इसलिए कोई फन्दा नहीं बनता।

मैंने एक और दिलचस्प बात देखी। आइए सबसे दाईं शाखा को देखें, जिसकी प्रविष्टियाँ A, AC, ACC, ACCC, ACCCC इत्यादि के रूप में हैं।



ध्यान दें कि इन भिन्नों को निम्नानुसार पुनरावर्ती रूप से परिभाषित किया जा सकता है और हमें फ़िबोनाची संख्याओं की याद आनी चाहिए। मान लें कि प्रत्येक प्राकृतिक संख्या m के लिए

$$F_1 = 1$$

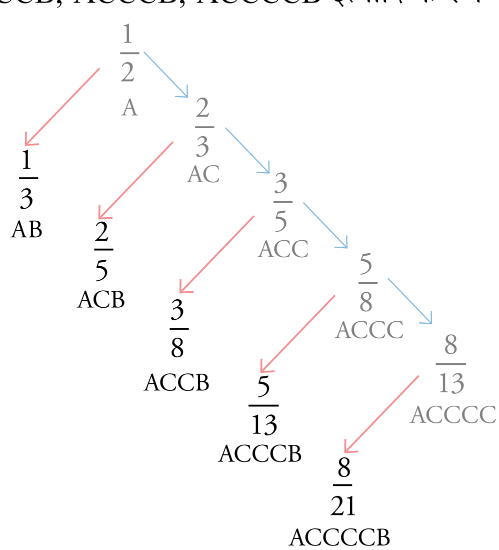
$$F_2 = 2$$

$$F_{m+2} = F_{m+1} + F_m \text{ है।}$$

स्पष्ट रूप से, ACCC…CCC के रूप का कोई भी मज़ेदार भिन्न $\frac{F_{m+1}}{F_{m+2}}$ के अलावा कुछ नहीं हो सकता, जहाँ m अन्त में दिखाई देने वाले C की संख्या है। जैसा कि हम पहले ही दिखा चुके हैं, इसका मतलब है कि क्रमानुगत फ़िबोनाची संख्याओं के बीच 1 के अलावा कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं हैं।

मैंने यह भी देखा कि यदि हम हर F_{m+2} को अंश F_{m+1} से भाग दें, तो हमें हमेशा शेष F_m प्राप्त होता है। ऐसा इसलिए है क्योंकि $F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$। फिर मैंने कुछ और दिलचस्प बात देखीं। यह ACCC…CCCBBB…BBB के रूप वाले मज़ेदार भिन्नों के लिए भी सही है, जहाँ C बीच में m बार और B अन्त में k बार दिखाई देता है।

उदाहरण के लिए, AB, ACB, ACCB, ACCCB, ACCCCB इत्यादि के रूप वाले मज़ेदार भिन्न इस प्रकार दिखाई देती हैं :



आइए देखें कि यह क्यों सत्य है। मान लें कि $\frac{p}{q}$ ACCC…CCCBBB…BBB रूप की एक भिन्न है, जहाँ बीच में C, m बार दिखाई देता है और B अन्त में k बार दिखाई देता है। दूसरे शब्दों में, $\frac{p}{q}$ पहले, नियम-3 को लगातार m बार लागू करके और फिर नियम-2 को बार-बार लागू करके $\frac{1}{2}$ से $\frac{p}{q}$ प्राप्त किया जाता है। इसलिए $\frac{p}{q}$ को नियम-2 को k बार लागू करके $\frac{F_{m+1}}{F_{m+2}}$ से प्राप्त किया जाएगा। इसलिए हमारे पास होना चाहिए

$$\frac{p}{q} = \frac{F_{m+1}}{F_{m+2} + k(F_{m+1})}$$

इसलिए यदि हम हर q को अंश p से भाग दें, तो हमें भागफल के रूप में $k + 1$ तथा शेष के रूप में F_m प्राप्त होना चाहिए। इसलिए हमने जो सिद्ध किया है वह निम्नलिखित प्रमेय है।

प्रमेय। मान लें कि $\frac{p}{q}$ एक मज़ेदार भिन्न है जिसे नियम-3 को m बार लागू करके और फिर नियम-2 को k बार लागू करके $\frac{1}{2}$ से प्राप्त किया जाता है, फिर यदि हम q को p से विभाजित करते हैं, तो शेष हमेशा F_m होता है जिसे निम्न रूप में परिभाषित किया जाता है :

$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 2$$
$$F_{m+2} = F_m + F_{m+1}$$

सम्पादकीय टिप्पणी

इस लेख में प्रस्तुत की गई समस्याएँ स्वाभाविक रूप से अनेक भिन्नताओं और दिलचस्प नए प्रश्नों को जन्म देती हैं। उदाहरण के लिए, क्या होगा यदि आरम्भिक मज़ेदार भिन्न $\frac{1}{2}$ से $\frac{p}{q}$ भिन्न हो? क्या प्रत्येक भिन्न अपने घटे हुए रूप में उपरोक्त वृक्ष में दिखाई देती है? इन समस्याओं को 9 से 16 वर्ष की आयु के विद्यार्थियों के अनुकूल बनाया जा सकता है, जिससे उन्हें भिन्न की संक्रियाओं का अभ्यास करने, पैटर्न की पहचान करने और अपने निष्कर्षों को सही ठहराने के अवसर मिलते हैं। शिवरामन (2021) ने *एट राइट एंगल्स* के जुलाई 2021 के अंक में इससे सम्बन्धित एक अन्य रूप के बारे में खोजबीन की थी, जिसे पढ़ने के लिए हम पाठकों को प्रोत्साहित करते हैं।

References

1. Sivaraman, R. (2021, July). Tremendous tree. *At Right Angles*, (10), 17-22. http://publications.azimpremjifoundation.org/2786/1/02_Sivaraman_TremendousTree.pdf

तेजस श्रीराम 11 साल के हैं और उन्हें गणित, भौतिकी और साहित्य में गहरी दिलचस्पी है। वे नेशनल पब्लिक स्कूल, इन्दिरानगर, बेंगलूरु के छात्र हैं। वे वर्ल्ड साइंस फ़ेस्टिवल के जूनियर वर्ल्ड साइंस स्कॉलरशिप प्रोग्राम और रेज़िंग ए मैथेमेटिशियन फ़ाउण्डेशन के एप्सिलॉन इंडिया जैसे प्रतिष्ठित गणित और विज्ञान कार्यक्रमों का हिस्सा रहे हैं। उनसे tejas.sriram1201@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : निशान्त राणा **पुनरीक्षण :** भरत त्रिपाठी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

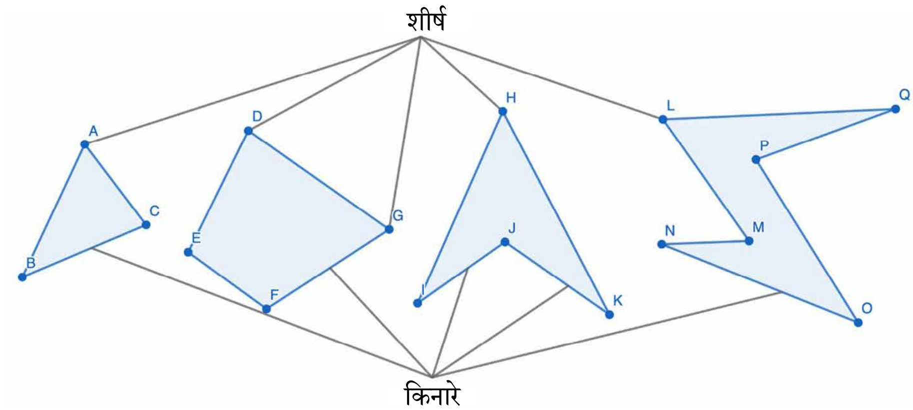
सममित बहुभुजों की खोजबीन

अजय कुमार

यह लेख सममित बहुभुजों के अध्ययन को ज़्यादा आकर्षक बनाने के लिए विभिन्न पद्धतियों की पड़ताल करता है। यह स्वयं करके सीखने वाली ऐसी गतिविधियों पर ज़ोर देता है जो अवलोकन और सामान्यीकरण को बढ़ावा दें। ध्यानपूर्वक तैयार की गई गतिविधियों के माध्यम से गणित जैसे अमूर्त विषय को एक जीवन्त, संवादात्मक, स्पर्शनीय अनुभव में बदला जा सकता है। एनसीईआरटी कक्षा-6 की गणित की पाठ्यपुस्तक के सबसे हालिया संस्करण में स्वयं करके सीखने वाली तमाम गतिविधियों के ज़रिए सममिति के सिद्धान्त से विद्यार्थियों को परिचित कराया गया है। ये ऐसी गतिविधियाँ हैं जो विद्यार्थियों की कल्पना को साकार कर सकती हैं। इनमें काग़ज़ मोड़ने और काटने (एनसीईआरटी, 2004, पेज 223) को लेकर एक उल्लेखनीय गतिविधि है जिसमें विद्यार्थियों को मुड़े हुए काग़ज़ से बने कटआउट (आकृतियों) के आकारों का अनुमान लगाना है। यह ऐसी प्रक्रिया है जिससे न सिर्फ़ सममिति के बारे में बच्चों की समझ बढ़ती है बल्कि ज्यामितीय स्वरूपों की उनकी समझ भी विकसित होती है। इन अभ्यासों द्वारा तैयार बुनियाद पर आगे बढ़ते हुए यह लेख ऐसी कई गतिविधियों की पड़ताल करता है जो पाठ्यपुस्तक के पूरक के तौर पर काम कर सकती हैं और कक्षा के अनुभव को बेहतर बना सकती हैं।

बहुभुजों को ऐसी सरल बन्द आकृतियों के रूप में परिभाषित किया जाता है जो सीधे रेखाखण्डों से बनी होती हैं (जो 180 डिग्री पर नहीं मिलते)। हम सामान्य रूप से बहुभुज को उसकी भुजाओं की संख्या के आधार पर नाम देते हैं। तीन भुजाओं वाले बहुभुज को 3-भुज या त्रिभुज कहा जाता है और चार भुजाओं वाले बहुभुज को 4-भुज या चतुर्भुज कहा जाता है। सामान्यत: कोई बहुभुज जिसमें n किनारे और n शीर्ष होते हैं उसे n-भुज कहा जाता है। रेखाखण्ड या बहुभुज की भुजाओं को किनारे कहा जाता है और किनारे जिन बिन्दुओं पर मिलते हैं उन्हें शीर्ष कहा जाता है।

आगे हम इस बात पर चर्चा करेंगे कि मुड़े हुए काग़ज़ को अलग-अलग ढंग से काटने पर किस प्रकार हमें बहुभुज आकृतियाँ मिल सकती हैं। विद्यार्थी विभिन्न क्रमों में काग़ज़ को काटकर और सामने आने वाली आकृतियों का अवलोकन करके सममिति और बहुभुजों के रिश्ते की गहरी समझ हासिल कर सकते हैं।



चित्र-1

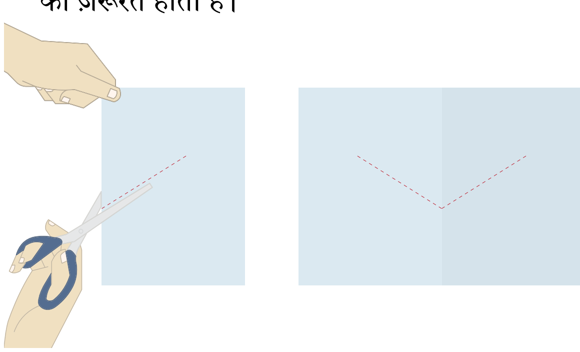
की-वर्ड : रैखिक सममिति, सममित चतुर्भुज, सममित त्रिभुज

पहले यह समझ लें कि इस लेख के उद्देश्य के लिए एक 'काट', 'काट के क्रम' और 'कटआउट' क्या हैं। एक 'काट' का मतलब, किसी सीधी रेखा के अनुदिश काग़ज़ को काटने के लिए लगाई गई लकीर है (जैसा कि **चित्र-2** में दिखाया गया है)। 'दो काट के एक क्रम' में दूसरी काट पहली काट के अन्तिम बिन्दु से शुरू होकर ऐसी सीधी रेखा में चलती है जो कि पहली काट से नहीं मिलती। यानी दोनों काटों के बीच उनके साझा बिन्दु पर कोई कोण (180 डिग्री के अलावा) होता है। **चित्र-3** तीन काटों का एक क्रम दिखाता है। 'कटआउट' से हमारा तात्पर्य मुड़े हुए काग़ज़ के उस टुकड़े से है जो काटों के उस अनुक्रम के पूरा होने पर सामने आता है जो मोड़ रेखा के अनुदिश किसी बिन्दु से शुरू होता है और मोड़ रेखा के अनुदिश ही किसी बिन्दु पर समाप्त होता है। हम इसे एक बहु-काट कहते हैं। **चित्र-3** के दाईं तरफ़ की तस्वीर 3 काटों के क्रम (जैसा कि साथ वाले चित्र में दिखाया गया है) का उपयोग करते हुए हासिल कटआउट को दर्शाती है।

कुछ सामान्य अवलोकन

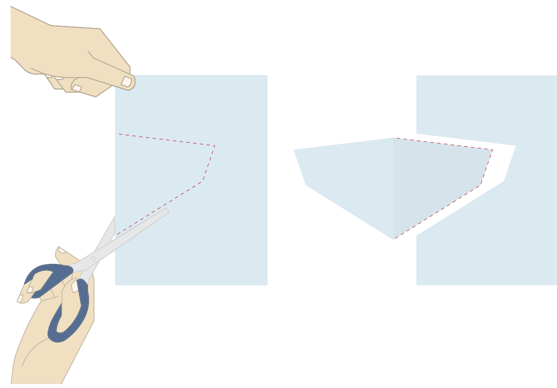
1. कटआउट के रूप में एक बहुभुज प्राप्त करने के लिए हमें मोड़ रेखा पर किसी बिन्दु से शुरुआत करनी पड़ेगी, सरल रेखा के अनुदिश काट लगानी पड़ेगी (क्योंकि कटआउट सिर्फ़ रेखाखण्डों से मिलकर बना होना चाहिए) और मोड़ रेखा पर ही किसी अन्य बिन्दु पर अन्त करना होगा। यह बाध्यता इस बात को सुनिश्चित करती है कि कटआउट एक सरल, बन्द बहुभुजीय आकृति होगी।

2. जैसा कि **चित्र-2** में दिखाया गया है, एक अकेली काट किसी बहुभुज का निर्माण नहीं कर सकती क्योंकि इसके लिए ऐसे और शीर्षों व किनारों की ज़रूरत होती है जो मोड़ रेखा के अनुदिश ख़ुद को प्रतिबिम्बित करें। इसकी बजाय अनेक काटों (जैसा कि ऊपर वर्णन किया गया है) की ज़रूरत होती है।



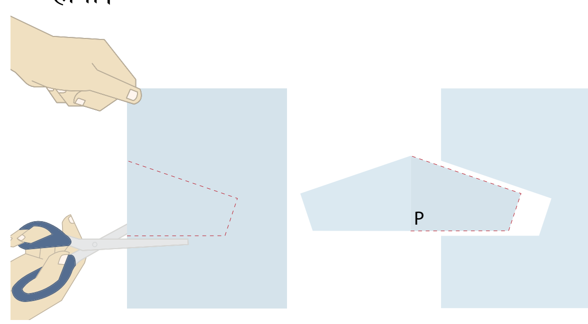
चित्र-2

3. अगर कोई बिन्दु मोड़ रेखा पर किसी ऐसी काट पर है जो मोड़ के साथ समकोणों (90 डिग्री) पर नहीं है तो यह बिन्दु बहुभुजीय कटआउट का एक शीर्ष है (**चित्र-3** देखें)।



चित्र-3

4. अगर कोई बिन्दु मोड़ रेखा पर ऐसी काट पर है जो मोड़ के साथ समकोण पर है तो यह बिन्दु बहुभुजीय कटआउट का शीर्ष नहीं होता (**चित्र-4** देखें)। इसके अलावा, ऐसा बिन्दु बहुभुजीय कटआउट के एक किनारे का मध्य बिन्दु होगा।



चित्र-4

5. किसी बिन्दु (यह बिन्दु मोड़ रेखा पर नहीं हो सकता) पर किन्हीं भी दो काटों के मिलने से बहुभुजीय कटआउट के दो शीर्ष बन जाते हैं (**चित्र-5** देखें)।

खोज-1 : सममित त्रिभुज (3-भुज) बनाना

आइए शुरुआत इस बात की पड़ताल से करें कि एक त्रिभुज कैसे बनाएँ जो मोड़ रेखा के अनुदिश सममित हो।

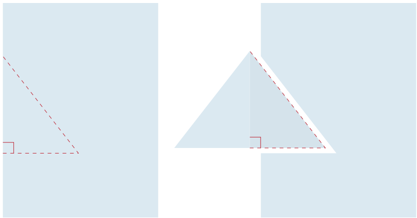
सवाल : किसी मुड़े हुए काग़ज़ से एक सममित त्रिकोणीय कटआउट प्राप्त करने के लिए इस काग़ज़ को काटने के सम्भावित तरीक़े क्या हो सकते हैं?

आइए हम एक काग़ज़ को मोड़कर आधा कर दें, जैसा कि ऊपर के चित्रों में दिखाया गया है। ध्यान दें कि हम तीन (या अधिक) काट का उपयोग नहीं कर सकते क्योंकि इससे

दो काटों के मिलने से दो (या अधिक) अलग-अलग बिन्दु निर्मित होते हैं और नतीजतन अवलोकन-5 के हिसाब से इस कटआउट में चार शीर्ष होंगे। इसलिए, एक त्रिभुज हासिल करने के लिए हमें बस दो काटों की ज़रूरत है।

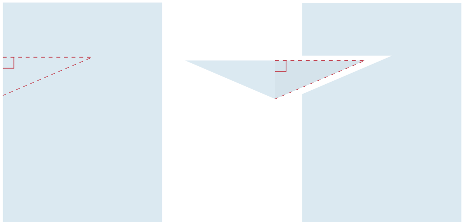
अगर दोनों में से कोई भी काट मोड़ रेखा के साथ समकोण पर नहीं है तो अवलोकन-3 के मुताबिक़ मोड़ रेखा पर स्थित दो बिन्दुओं के नतीजे में बहुभुजीय कटआउट के दो शीर्ष बन जाते हैं। अवलोकन-5 के अनुसार इन दो काटों के मिलने का बिन्दु बहुभुजीय कटआउट के दो और शीर्षों को जन्म देता है। इस तरह, ऐसी स्थिति में बहुभुज की चार भुजाएँ होती हैं और त्रिभुज का निर्माण नहीं हो सकता।

इसलिए त्रिभुज हासिल करने के लिए रणनीतिक रूप से दो काट लगाने का अकेला तरीक़ा है कि इन दो काटों में से मात्र एक को मोड़ रेखा के साथ ठीक समकोण पर रखना। नीचे दिए गए चित्र त्रिभुज निर्माण तक ले जाने वाले इस तरह की रणनीतिक काटों को दिखाते हैं। ज़ाहिर है कि मोड़ रेखा प्राप्त हुए त्रिभुज के लिए सममिति की रेखा है।



चित्र-5

इसके अलावा, ध्यान दें कि इस सममिति की रेखा के अनुदिश इन त्रिकोणीय कटआउट को मोड़ने से इसकी दोनों तरफ़ के किनारे सम्पाती हो जाते हैं यानी ये दो किनारे एक ही लम्बाई के होते हैं। इसलिए, हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि अगर किसी त्रिभुज में एक सममिति की रेखा है तो रेखा की दोनों तरफ़ के दो किनारे बराबर लम्बाई के होते हैं। ऐसा त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है। इसके बाद हम देखते हैं कि दोनों तरफ़ के दो शीर्ष सम्पाती होते हैं जो दर्शाता है कि उनसे मिलने वाले किनारे को मोड़ रेखा समद्विभाजित करती है।



चित्र-6

आगे की खोज : हम काग़ज़ को दो जगह से युक्तिपूर्वक काटकर तीनों समान भुजाओं वाला त्रिभुज (जिसे समबाहु त्रिभुज कहते हैं) कैसे प्राप्त कर सकते हैं?

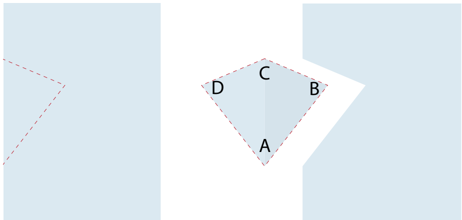
खोज- 2 : सममित चतुर्भुज (4-भुज) बनाना

इसके बाद हम अपना ध्यान 4 भुजाओं वाला एक ऐसा बहुभुज, यानी चतुर्भुज, बनाने की तरफ़ लगाते हैं जो मोड़ के अनुदिश सममित हो।

सवाल : किसी मुड़े हुए काग़ज़ से एक सममित चतुर्भुज का कटआउट प्राप्त करने के लिए इस काग़ज़ को काटने के सम्भावित तरीक़े क्या हो सकते हैं?

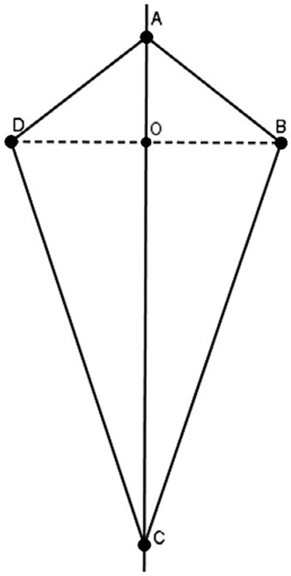
पहले, आइए हम एक काग़ज़ को मोड़कर आधा कर दें। ध्यान दें कि हम चार (या अधिक) काटों का इस्तेमाल नहीं कर सकते क्योंकि इनके नतीजे में तीन (या अधिक) ऐसे बिन्दु सामने आते हैं जहाँ दो काटें मिलती हैं और इसलिए अवलोकन-5 के मुताबिक़ इस कटआउट में छह (या अधिक) शीर्ष होंगे। इसलिए चतुर्भुज हासिल करने के लिए हमें दो या तीन काटों की ज़रूरत है।

स्थिति-1 – दो काटों के साथ : पहले, आइए एक चतुर्भुज का कटआउट हासिल करने के लिए सिर्फ़ दो काटों का इस्तेमाल करते हैं। अवलोकन-3 के वर्णन के मुताबिक़ जब हम ऐसी दो काट लगाते हैं जिनमें से कोई भी मोड़ रेखा के साथ समकोण पर नहीं होती तो हमें चतुर्भुज हासिल होता है।



चित्र-7

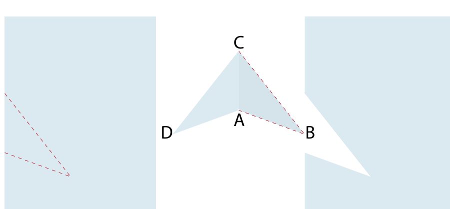
चतुर्भुज ABCD (**चित्र-7** देखें), में ध्यान दें कि मोड़ रेखा सममिति की रेखा है। स्पष्ट है कि B और D चतुर्भुज के ऐसे शीर्ष हैं जो मोड़ रेखा के चारों ओर एक-दूसरे के सममित हैं, जबकि A और C ऐसे शीर्ष हैं जो सममिति की रेखा पर स्थित हैं। आइए हम एक रेखाखण्ड के माध्यम से B और D को जोड़ें और उसे सममिति की रेखा को O पर काटने दें जैसा कि **चित्र-8** में दिखाया गया है।



चित्र-8

ध्यान दें कि जब हम ABCD को सममिति की रेखा के अनुदिश मोड़ते हैं तो OB व OD सम्पाती होती हैं। इसके अलावा, कोण AOB व AOD और COB व COD एक-दूसरे के साथ क्रमशः सम्पाती होते हैं। इसलिए, OB व OD एक ही लम्बाई की हैं। इसके अलावा, AOB, AOD, COB और COD में से हर एक कोण समकोण है।

इसलिए, हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि ठीक दो काटों का इस्तेमाल करके हासिल किए गए ऐसे सममित चतुर्भुज में दो शीर्ष सममिति की रेखा पर स्थित होते हैं और उन्हें जोड़ने वाला विकर्ण दूसरे विकर्ण का लम्ब समद्विभाजक होता है। इस गुण वाले दो प्रकार के चतुर्भुज होते हैं : पतंग और भाला। (ध्यान रहे कि कोई ख़ास स्थिति हो सकती है जब समचतुर्भुज प्राप्त हो।)

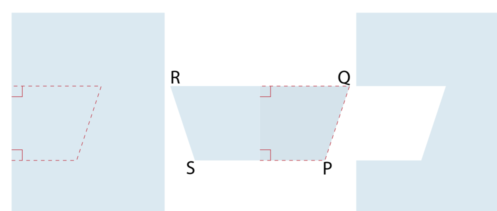


चित्र-9

स्थिति-2 – तीन काटों के साथ : यदि तीनों में से कोई भी काट मोड़ रेखा के साथ समकोण पर स्थित नहीं है तो अवलोकन-3 के मुताबिक़ मोड़ रेखा पर स्थित दो बिन्दु बहुभुजीय कटआउट के दो शीर्षों को जन्म देते हैं। वे दो बिन्दु जहाँ इन काटों के दो युग्म मिलते हैं, अवलोकन-5 के मुताबिक़ बहुभुजीय कटआउट के चार और शीर्षों को जन्म देते हैं। इसलिए, ऐसी स्थिति में बहुभुज की छह भुजाएँ होती हैं और इसलिए वह चतुर्भुज नहीं हो सकता।

इसके अलावा, हम देखते हैं कि अगर तीन काटों में से बस एक काट मोड़ रेखा के साथ समकोण पर है तो अवलोकन-4 के मुताबिक़ ऐसी काट पर स्थित बिन्दु बहुभुजीय कटआउट का शीर्ष नहीं बनता। लेकिन, मोड़ रेखा पर स्थित अन्य बिन्दु जो अन्य दो काटों में से एक पर है, शीर्ष निर्मित करता है। इसके अलावा, वे दो बिन्दु जहाँ इन दो काटों के दो युग्म मिलते हैं, अवलोकन-5 के मुताबिक़, बहुभुजीय कटआउट के चार और शीर्षों को जन्म देते हैं। इसलिए ऐसी स्थिति में बहुभुज की पाँच भुजाएँ होंगी और इसलिए वह चतुर्भुज नहीं हो सकता।

इसलिए, चतुर्भुज हासिल करने के लिए तीन काटों का इस्तेमाल करने का एकमात्र तरीक़ा है दो ऐसी काट लगाना जो मोड़ रेखा के साथ समकोणों पर हों। ऐसे में, वे दो बिन्दु जहाँ इन दो काटों के दो युग्म मिलते हैं, अवलोकन-5 के मुताबिक़, बहुभुजीय कटआउट के चार शीर्षों को जन्म देते हैं और इसके अलावा और कोई शीर्ष नहीं होते। नीचे दिए गए चित्र (**चित्र-10**) ऐसी कुछ स्थितियाँ दिखाते हैं।



चित्र-10

चित्र-7 व **चित्र-8** में बने चतुर्भुज को पतंग कहा जाता है जबकि **चित्र-9** में बने चतुर्भुज को भाला। दोनों के बीच फ़र्क़ यह है कि पतंग के मामले में विकर्ण BD पूरी तरह से चतुर्भुज के भीतर स्थित है जबकि भाले के मामले में विकर्ण BD पूरी तरह से चतुर्भुज के बाहर स्थित है।

चतुर्भुज PQRS (**चित्र-10**) में, मोड़ रेखा सममिति की रेखा है। स्पष्ट है कि P और S व Q और R इस चतुर्भुज के शीर्षों के ऐसे युग्म हैं जो मोड़ रेखा के चारों ओर संगत रूप से सममित हैं। इसके अलावा, PS व QR एक-दूसरे के समान्तर हैं क्योंकि वे दोनों सममिति की रेखा के लम्बवत हैं। इसके अतिरिक्त, PQRS को सममिति की रेखा के अनुदिश मोड़ने पर हम देखते हैं कि PQ व RS सम्पाती हो जाती हैं यानी वे समान लम्बाई की हैं।

इसलिए हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि ठीक तीन काटों का इस्तेमाल करके हासिल किए गए सममित चतुर्भुज में सममिति की रेखा पर कोई शीर्ष स्थित नहीं होता और इसमें समान्तर सम्मुख भुजाओं का एक युग्म होता है जबकि सम्मुख भुजाओं के दूसरे युग्म में लम्बाई समान होती है। ऐसे गुण वाले चतुर्भुज को हम समद्विबाहु समलम्ब कहते हैं।

आगे की खोज : किन परिस्थितियों में हम गारंटी से यह कह सकते हैं कि ऊपर बताई गई प्रक्रियाओं से प्राप्त किए गए सममित चतुर्भुजों में सममिति की कम-से-कम एक रेखा और होती है?

हमारे अवलोकनों का सामान्यीकरण : किसी मुड़े हुए काग़ज़ से एक सममित n-भुजीय कटआउट प्राप्त करने के लिए इस काग़ज़ को काटने के कितने सम्भावित तरीक़े हो सकते हैं?

References

1. National Council of Educational Research and Training (NCERT). (2024). *Ganit Prakash, Class 6* (1st ed.). NCERT. https://ncert.nic.in/textbook.php?fegp1=0-10

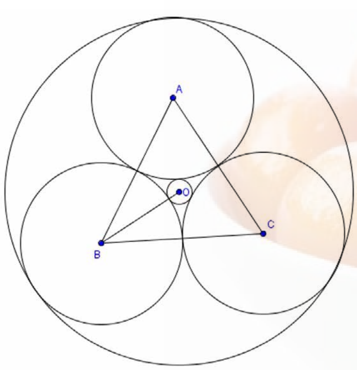
अजय कुमार के. अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलूरु में गणित पढ़ाते हैं। गणित और गणित शिक्षकों के प्रशिक्षण में रुचियों के अलावा उन्हें पटकथा लेखन और फिल्म निर्माण का भी शौक है। उनसे ajaykumar.k@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : भरत त्रिपाठी **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

Sweet Stuff

यह रहा मार्च 2024 अंक के पेज-40 पर दिए गए सवाल का एट राइट एंगल्स के पाठक **तेजस पटेल** द्वारा भेजा गया हल। इस सवाल को आप यहाँ देख सकते हैं https://anuvadasampada.azimpremjiuniversity.edu.in/4633/

हाँ, अर्जुन हर एक गुलाबजामुन की त्रिज्या का पता लगा सकता है और वह कटोरी की त्रिज्या का भी पता लगा सकता है।



माना कि r गुलाबजामुन की त्रिज्या है और R कटोरे की त्रिज्या है। दिया गया है कि स्ट्रा की त्रिज्या 1 इकाई है। जैसा कि चित्र में दिखाया गया है, ΔABC समबाहु त्रिभुज है।और माना कि $O\Delta ABC$ का केन्द्र है।

अब $OB = 1 + r = \dfrac{r}{cos30°} \implies r = \dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}+3$

अब $R = 2r + 1 = 2(2\sqrt{3}+3) + 1 = 4\sqrt{3}+7$.

$\therefore$ गुलाबजामुन की त्रिज्या $r 2\sqrt{3}+3$ और कटोरी की त्रिज्या $R\ 4\sqrt{3}+7$ है।

तेजस चाणस्मा प्राइमरी स्कूल नं-2, गुजरात में शिक्षक हैं। उन्होंने देकार्त के वृत्त प्रमेय का इस्तेमाल करते हुए इसी सवाल का एक दूसरा हल भी सुझाया है। देकार्त के प्रमेय के बारे में यहाँ पढ़ सकते हैं https://en.wikipedia.org/wiki/Descartes%27_theorem#:~:text=In%20geometry%2C%20Descartes'%20theorem%20states,satisfy%20a%20certain%20quadratic%20equation..

ऐरो कार्ड के साथ मेरे शैक्षणिक अनुभव

मोख़्तर ज़मान द्वारा समीक्षित

लेखक कक्षा-3 के विद्यार्थियों के साथ ऐरो कार्ड (तीर के आकार के कार्ड) इस्तेमाल करने के अपने अनुभव साझा करते हैं। यहाँ वे व्याख्या करते हैं कि कैसे इस टीएलएम ने विद्यार्थियों की स्थानीय मान की समझ में क्रमिक रूप से इज़ाफ़ा किया। दिए गए उदाहरणों से इस सामग्री का प्रभाव ज़ाहिर है।

गणितीय अवधारणाओं, जैसे संख्याएँ और उनकी संक्रियाएँ, या पैटर्न और आकृतियों, की समझ बनाना मुश्किल हो सकता है क्योंकि उनमें ऐसा कुछ नहीं होता जिसे आप देख या छू पाएँ। जैसा कि ज़्याँ पियाजे का शोध सुझाता है, बच्चे ज्ञान के तीन स्तरों के ज़रिए अवधारणाएँ सीखते हैं – ठोस, चित्रात्मक तथा अमूर्त (वॉड्सवर्थ, 1976)। इसलिए ज़रूरी है कि उनके सीखने की शुरुआत करके देखने वाली गतिविधियों से हो। यह शुरुआत वास्तविक वस्तुओं से होनी चाहिए जिनके साथ वे अन्तर्क्रिया कर सकें, उसके बाद चित्रात्मक निरूपण से होते हुए अन्त में काग़ज़ पर इन अवधारणाओं के अमूर्त निरूपणों पर पहुँचा जाना चाहिए। राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा : फ़ाउण्डेशनल स्टेज (एनसीईआरटी, 2022, पृ 122) में भी शिक्षा में ईएलपीएस (ELPS) तरीक़े का इस्तेमाल करने का सुझाव दिया गया है। ईएलपीएस में ई का आशय *एक्सपीरियंस* (अनुभव), एल का आशय *स्पोकन लैंग्वेज* (बोली जाने वाली भाषा), पी का आशय *पिक्चर्स* (चित्र) और एस का आशय *रिटन सिम्बल्स* (लिखित प्रतीक) से है।

ठोस सामग्रियों की जाँच-पड़ताल के माध्यम से बच्चों का परिचय कार्यविधियों या कौशलों से करवाया जा सकता है। बतौर उदाहरण, भाग के मामले में इसके लिए छह बच्चों के बीच 12 छड़ियों का बँटवारा किया जा सकता है। ऐसे में जब विद्यार्थी वस्तुओं को सम्हालते हैं, वे समझ निर्मित करने और गणितीय प्रक्रियाओं व विधियों को आत्मसात करने की ओर ज़रूरी शुरुआती क़दम उठाते हैं। भौतिक वस्तुओं के साथ काम करने से विद्यार्थियों को पहले अवधारणाओं की खोजबीन करने का मौक़ा मिल जाता है जो समझने का ठोस स्तर है। समय के साथ, कार्यनीतियों और एल्गोरिदम का विकास बाद में किया जा सकता है।

हम, धमतरी के अज़ीम प्रेमजी स्कूल के शिक्षक, विभिन्न शिक्षण-अधिगम सामग्री (टीएलएम) निर्मित करने की प्रक्रिया में जुटे थे, ख़ासतौर पर गणित के लिए। इस गतिविधि के हिस्से के रूप में, हमने ऐरो कार्ड बनाए। टीएलएम के तौर पर ऐरो कार्ड, दृश्यात्मक व अन्तर्क्रियात्मक तरीक़े से स्थानीय मान की अवधारणाएँ सिखाने के लिए इस्तेमाल किए जाते हैं। ऐरो कार्ड बच्चों को विभाजन (*पार्टिशनिंग*) और पुनःसंयुक्तिकरण (*रिकंबाइनिंग*) समझने में भी मदद करते हैं। विभाजन में संख्याओं को छोटे-छोटे व सम्हाले जा सकने वाले टुकड़ों में तोड़ा जाता है, और पुनःसंयुक्तिकरण में संख्याओं को अलग-अलग स्थानीय मानों के हिसाब से फिर से इकट्ठा किया जाता है।

स्थानीय मान सिखाने में आईं चुनौतियाँ

वस्तुओं की गिनती से आगे बढ़कर स्थानीय मान को समझना बच्चों के लिए चुनौतीपूर्ण हो सकता है क्योंकि इसमें देखी और छुई जा सकने वाली चीज़ों (मूर्त) से हटकर अमूर्त की ओर बढ़ा जाता है जिसका अस्तित्व उनके मन में होता है।

की-वर्ड : स्थानीय मान, शिक्षणशास्त्र, चुनौतियाँ, टीएलएम, ऐरो कार्ड

स्थानीय मान के ऐसे व्यवहारिक उदाहरण सीमित ही हैं जो विद्यार्थियों के रोज़मर्रा के अनुभवों से मेल खाते हों।

एक स्थानधारक (*प्लेसहोल्डर*) के रूप में शून्य की भूमिका को समझना विद्यार्थियों के लिए भ्रामक हो सकता है।

जटिल शब्दावली, मसलन 'इकाई', 'दहाई', 'सैकड़ा', व 'हज़ार' जैसे पदों को समझना और उन्हें सम्प्रेषित कर पाना बेहद मुश्किल है।

ऐरो कार्ड के साथ काम

शुरुआत में, मैं कक्षा में ऐरो कार्ड को प्रभावी ढंग से इस्तेमाल करना नहीं जानता था। मैं और सीख सकूँ, इसके लिए मैंने एक मेंटर से सलाह ली। उन्होंने मुझे समझाया कि किस तरह ऐरो कार्ड स्थानीय मान को सहज रूप से समझने में बच्चों की मदद करते हैं। इस समझ के साथ, मैं अब उन्हें कक्षा में इस्तेमाल करने को लेकर आत्मविश्वास महसूस करने लगा। इससे पहले तो स्थानीय मान पढ़ाने के लिए मैं स्ट्रॉ के गट्ठरों का इस्तेमाल करता था। मगर जैसे-जैसे मेरे विद्यार्थी बड़ी संख्याओं की ओर बढ़े, मुझे ऐरो कार्ड विधि ज़्यादा मददगार लगी। कक्षा में ऐरो कार्ड इस्तेमाल करने का अपना अनुभव मैं नीचे साझा कर रहा हूँ।

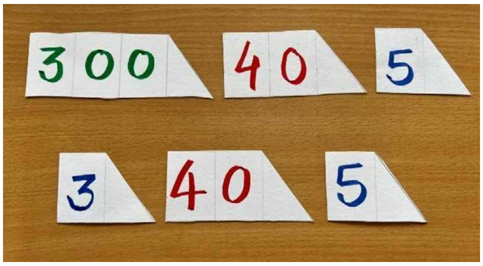
कक्षा-3 में प्रवेश करते ही मैंने ऐरो कार्ड का बक्सा निकाला। बच्चे बक्से को बड़े कौतूहल से देख रहे थे, और जब अन्दर से रंगीन कार्ड निकले तो वे उन्हें देखकर ख़ुश हो गए। हर ऐरो कार्ड किसी संख्या के इकाई, दहाई या सैकड़े के अंक प्रदर्शित करता है। मिसाल के लिए, 500, 100, 50, 20, 5, 2। इन्हें एक के ऊपर एक रखकर दो-अंकीय, तीन-अंकीय इत्यादि संख्याएँ बनाई जा सकती हैं। मैंने प्रत्येक बेंच को ऐरो कार्ड का एक-एक सेट दिया। बच्चों ने जल्दी से उन्हें खोला और अपनी बेंचों पर उन्हें जमाना शुरू कर दिया। वे आगे के निर्देशों का उत्सुकता से इन्तज़ार करने लगे। आगे क्या होगा, इसे लेकर वे जिज्ञासा से भरे थे।

सबसे पहले, मैंने 0 से 9 तक की अलग-अलग एक-अंकीय संख्याएँ पुकारीं और बच्चों से उनके अनुरूप ऐरो कार्ड उठाने को कहा। इसके बाद, मैंने दहाई और सैकड़े की अवधारणा समझाई, और फिर से अलग-अलग संख्याएँ पुकारीं ताकि उनके अनुरूप बच्चे सही ऐरो कार्ड उठाएँ। मिसाल के तौर पर, 25 बनाने के लिए उन्हें '20' और '5' वाले ऐरो कार्ड उठाने होंगे और फिर उन्हें साथ रखना होगा ताकि उनकी तिरछी रेखाएँ एक सीध में (समान्तर) हों। यह विद्यार्थियों को सिखाता है कि दो-अंकीय संख्याएँ दहाइयों और इकाइयों से बनी होती हैं।

इसी सिलसिले में आगे, जब मैंने 234 की संख्या बोली तो कई बच्चों ने 200 की संख्या का कार्ड उठाया, मगर उसके बाद 30 की संख्या का कार्ड उठाने की जगह उन्होंने 3 की संख्या का कार्ड उठाया और इकाई के स्थान के लिए 4 की संख्या का कार्ड उठाया।

फिर मैंने जान-बूझकर ऐरो कार्ड से ग़लत संख्याएँ बनाईं और विद्यार्थियों से ग़लतियाँ पहचानने और उन्हें ठीक करने को कहा।

मैंने 345 के लिए 300, 40, और 5 के कार्ड की जगह 3, 40, और 5 के कार्ड जमा दिए। फिर उनसे कहा कि वे ऐरो कार्ड के कोने पकड़ें। जैसे ही उन्होंने ऐसा किया वैसे ही बीच वाला कार्ड, जो कि 3 की संख्या का कार्ड था, गिर गया। यह दहाई और इकाई की अवधारणाएँ समझाने का एक बढ़िया मौक़ा था। साथ ही, यह समझाने का भी मौक़ा मिला कि ऐरो कार्ड की मदद से कैसे सही तरह से 345 की संख्या बनाई जा सकती है। ऐरो कार्ड का इस्तेमाल करके बहु-अंकीय संख्या का प्रसार/विस्तार (जैसे, 234 = 200 + 30 + 4) अपने-आप और आसानी से हो जाता है।



चित्र-1

मैंने फिर एक बार ऐरो कार्ड की मदद से 9383 की संख्या बनाने को कहा। 9383 का प्रसार/विस्तार 9000 + 300 + 80 + 3 के रूप में होता है।

चित्र-2

मैंने इस गतिविधि को एक अन्तर्क्रियात्मक क्विज़ के खेल में तब्दील कर दिया। मैं बेतरतीबी से संख्याएँ पुकारता और ऐरो कार्ड की मदद से सबसे पहले सही संख्या बनाने वाले विद्यार्थी को एक अंक मिल जाता। इस खेल से यह गतिविधि और भी रोमांचक हो गई। इससे विद्यार्थियों को स्थानीय मान के बारे में जल्दी से और सटीकता से सोचने की प्रेरणा मिली।

जोड़ और घटाने में ऐरो कार्ड का इस्तेमाल

ऐरो कार्ड का इस्तेमाल जोड़ की प्रक्रिया को छोटे-छोटे व सम्हाले जा सकने वाले चरणों में तोड़ने के लिए किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, 23 और 15 को जोड़ने के लिए, 2 दहाई व 3 इकाई, और साथ में, 1 दहाई व 5 इकाई के कार्ड अलग से इस्तेमाल करें। और फिर, यह दर्शाने के लिए, कि हमें 8 इकाइयाँ और 3 दहाइयाँ कैसे मिलती हैं, उन्हें मिला दें। इससे हमें कुल 38 मिल जाएगा।

हम ऐरो कार्ड की मदद से घटाने की स्थिति की कल्पना भी कर सकते हैं। इसके लिए कार्डों को घटते क्रम में जमाया जा सकता है ताकि घटाने की प्रक्रिया निरूपित हो सके। उदाहरण बतौर, 15 में से 5 घटाने के लिए, आप 15 की संख्या दर्शा सकते हैं, और फिर दृश्यात्मक रूप से, 10 तक पहुँचने तक हर पड़ाव पर इसमें से 1 घटा सकते हैं।

कुल मिलाकर, ऐरो कार्ड ने स्थानीय मान का शिक्षण बेहतर करने में मेरी बहुत मदद की है। ये कार्ड सीखने को अधिक अन्तर्क्रियात्मक और मज़ेदार बना देते हैं। विद्यार्थी बख़ूबी इनमें रम गए थे। मैंने अपने विद्यार्थियों की संख्या सम्बन्धी अवधारणाओं की समझ में और उस समझ को क़ायम रखने में प्रत्यक्ष रूप से बेहतरी देखी है। ऐसा इसलिए क्योंकि ये कार्ड स्थानीय मान को समझने के लिए करके देखने वाला व दृश्यात्मक तरीक़ा मुहैया करवाते हैं। स्थानीय मान व उससे जुड़ीं गणितीय अवधारणाएँ सिखाने के प्रभावशाली रास्ते तलाश रहे दूसरे शिक्षकों को मैं बढ़-चढ़कर ऐरो कार्ड इस्तेमाल करने की सिफ़ारिश करता हूँ। यह उनके अपने लिए भी सीखने का एक बढ़िया अनुभव रहेगा। आने वाले दिनों में, मैं गणित के लिए और अधिक टीएलएम निर्मित करने में तरक़्क़ी करूँगा।

आभार

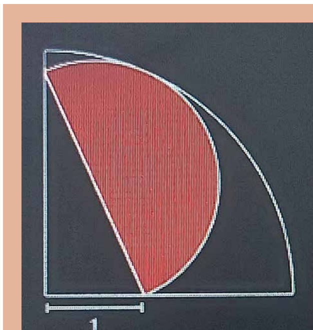
1. स्वाती सरकार, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय,बेंगलूरु के स्कूल ऑफ़ कंटिन्यूइंग एजुकेशन व यूनिवर्सिटी रिसोर्स सेंटर में असिस्टेंट प्रोफ़ेसर।
2. अर्द्धेन्दु शेखर दास, धमतरी (छत्तीसगढ़) के अज़ीम प्रेमजी स्कूल के प्रिंसिपल।

References

1. National Council of Educational Research and Training (NCERT). (2022, October). *National Curriculum Framework for Foundational Stage*. NCERT. https://ncert.nic.in/pdf/NCF_for_Foundational_Stage_20_October_2022.pdf
2. Wadsworth, B. J. (1971). *Piaget's theory of cognitive development: an introduction for students of psychology and education*. McKay.

मोख़्तर ज़मान धमतरी, छत्तीसगढ़ के अज़ीम प्रेमजी स्कूल में एक शिक्षक के तौर पर पढ़ा रहे हैं। उन्होंने मैकेनिकल इंजीनियरिंग में स्नातक डिग्री प्राप्त की है, और रायपुर, छत्तीसगढ़ के गवर्नमेंट कॉलेज ऑफ़ टीचर एजुकेशन से बीएड किया है। गणित के प्रति अपने जज़्बे के साथ ही, उन्हें इसी विषय में बच्चों के साथ जुड़ने में आनन्द मिलता है। मोख़्तर शिक्षा के लिए प्रौद्योगिकी संसाधनों के अन्वेषण और डिज़ाइन में भी गहरी दिलचस्पी रखते हैं। उनसे mokhtarzaman@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : अतुल वाधवानी **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अतुल अग्रवाल



क्या आप लाल क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

अपने हल इस ई-पते पर भेजें -
AtRightAngles.editor@apu.edu.in

डाइन्स ब्लॉक्स और स्टेटिक बीड्स : एक तुलनात्मक विश्लेषण

मैथ स्पेस द्वारा समीक्षित

यह आलेख व्यापक रूप से इस्तेमाल किए जाने वाले दो टीएलएम – डाइन्स ब्लॉक्स और स्टेटिक बीड्स – की समीक्षा और उनकी तुलना करता है ताकि पाठक उनके गुण-दोषों के साथ यह भी अच्छी तरह समझ सकें कि वे किस तरह काम करते हैं।

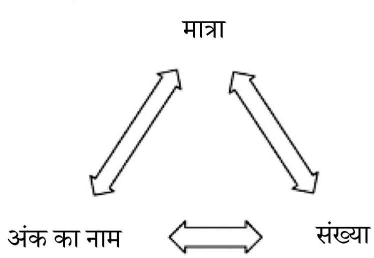
बच्चों को संख्याओं से परिचित कराते समय निम्नलिखित के बीच तीन-तरफ़ा सम्बन्ध स्थापित करना बहुत ज़रूरी होता है :

(i) दर्शाई गई मात्रा

(ii) संख्या का नाम और

(iii) संख्या सूचक चिह्न या प्रतीकात्मक प्रतिनिधित्व (**चित्र-1**)।

बेस-10 ब्लॉक स्थानीय मान के पीछे के विचार को समझने या इस बात को समझने में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं कि हम संख्याओं को 10-10 के समूह में बाँधकर कैसे लिखते हैं। जहाँ सबसे उपयोगी दो-आयामी बेस-10 ब्लॉक हैं जो कि फ़्लैट-लॉन्ग-यूनिट (एफ़एलयू) के नाम से भी लोकप्रिय हैं, वहीं अलग-अलग लोगों द्वारा त्रि-आयामी ब्लॉक के दो संस्करणों की कल्पना भी की गई है। *'एट राइट एंगल्स'* के क्रमशः मार्च 2024 और जुलाई 2024 के अंकों में हम इस पर पहले ही चर्चा कर चुके हैं कि एफ़एलयू [1] क्या है और किस तरह यह बीजगणित टाइल्स [2] में सामान्यीकृत होता है। इस बार हम त्रि-आयामी संस्करणों पर क़रीब से नज़र डालेंगे।

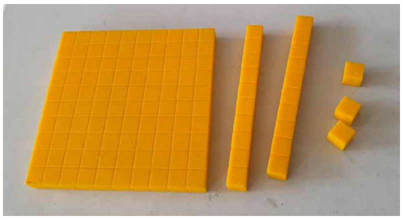


चित्र-1

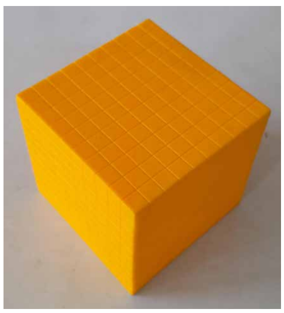
डाइन्स ब्लॉक

हंगरी के गणितज्ञ ज़ोल्टन डाइन्स (1916-2014) ने त्रि-आयामी बेस-10 ब्लॉक को लोकप्रिय बनाया। इसकी इकाई आमतौर पर 1 सेमी × 1 सेमी × 1 सेमी का एक छोटा घन होता है। 'दहाई' 10 सेमी × 1 सेमी × 1 सेमी वाला एक लम्बा घनाभ होता है जिसे छड़ भी कहा जाता है। इसमें खाँचे होते हैं ताकि कोई भी आसानी से देख सके कि 10 इकाइयाँ एक क़तार में हैं। 'सैकड़ा' 10 सेमी × 10 सेमी × 1 सेमी का एक सपाट घनाभ होता है जिसे फलक भी कहा जाता है। खाँचों से पता चलता है कि इसमें 10 दहाइयाँ और 100 इकाइयाँ, दोनों हैं। ये तीन ब्लॉक मूलतः एफ़एलयू के जैसे हैं, लेकिन इकाई मोटाई वाली हैं (**चित्र-2**)। 'हज़ार' 10 सेमी × 10 सेमी × 10 सेमी का एक बड़ा घन होता है जिसकी सभी छह सतहों पर खाँचे होते हैं। अगर कोई 10 'सैकड़ा' को एक के ऊपर एक रखे तो वह देख सकता है कि इन सबका संयुक्त आयतन हज़ार घन के बराबर है (**चित्र-3**)। चूँकि हरेक ब्लॉक (इकाई को छोड़कर) को 10 छोटे ब्लॉकों से बदला जा सकता है, यानी 1 हज़ार = 10 सैकड़ा, 1 सैकड़ा = 10 दहाई, 1 दहाई = 10 इकाइयाँ, सभी ब्लॉकों का रंग एक जैसा होना चाहिए, उनका आकार चाहे जो भी हो।

की-वर्ड : डाइन्स ब्लॉक, स्टेटिक बीड्स, मॉण्टेसरी, तुलना, स्थानीय मान ब्लॉक, एफ़एलयू, एफ़आरबी



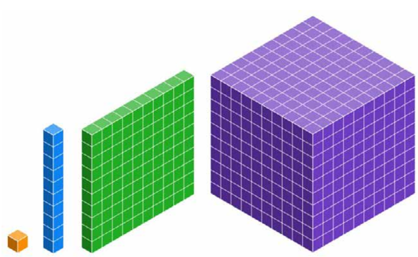
चित्र-2



चित्र-3

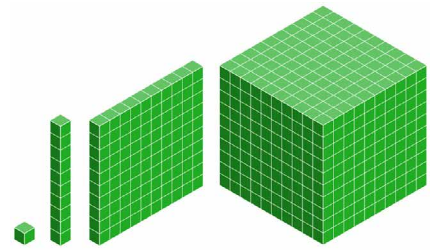
ऑनलाइन संस्करण

कई ऑनलाइन संस्करणों (जैसे मैथिगॉन पॉलीपैड में नम्बर क्यूब्स) में अलग-अलग आकार के ब्लॉक के लिए अलग-अलग रंग होते हैं। यह बहुत भ्रामक हो सकता है जब कोई बैंगनी रंग का हज़ार हरे रंग के 10 सैकड़ों में विभाजित हो जाता है या नारंगी रंग की 10 इकाइयाँ जुड़कर नीले रंग की दहाई बन जाती हैं (**चित्र-4**)।



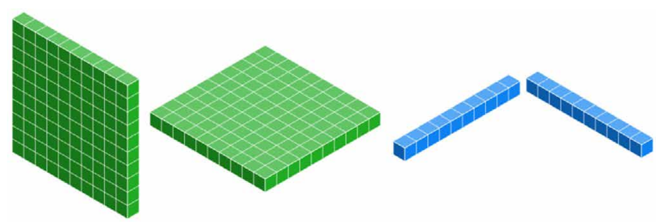
चित्र-4

शुक्र है कि इसमें उपयोगकर्ता रंग को बदल सकता है (**चित्र-5**)। लेकिन जब भी किसी ब्लॉक को आगे विभाजित किया जाता है या एक ही तरह के 10 ब्लॉकों को एक साथ जोड़ दिया जाता है तो परिणामी ब्लॉक अपने पहले से तयशुदा रंगों को अपना लेते हैं। इसलिए ये वर्कशीट आदि के लिए चित्र बनाने में बहुत उपयोगी हो सकते हैं। अगर बाल-शिक्षार्थी इन ऑनलाइन ब्लॉकों के साथ ख़ुद खेलते हैं तो रंग बदलने को लेकर उनके सवाल जायज़ होंगे।



चित्र-5

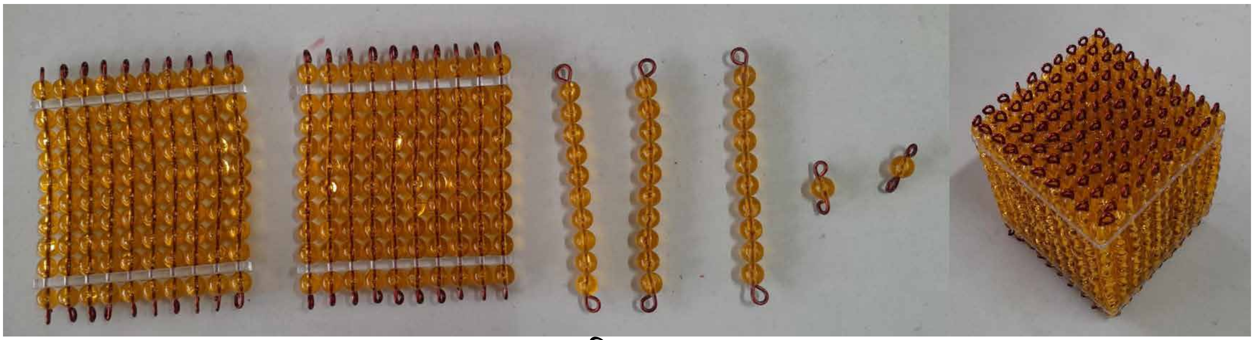
पॉलीपैड संस्करण का एक और दिलचस्प पहलू यह है कि प्रत्येक प्रकार के ब्लॉक का अभिविन्यास निश्चित है, यानी, दस हमेशा खड़े रहते हैं और लेटते नहीं हैं, सौ हमेशा दाईं ओर मुँह करके खड़े रहते हैं और कभी बाईं ओर मुँह नहीं करते! लेकिन यह आयाम (1-10) चुनकर एक नया ब्लॉक बनाने की भी अनुमति देता है। तो, 1-10-10 बाईं ओर मुँह करके एक प्लेट बनाता है; 10-10-1 एक लेटी हुई प्लेट है; 10-1-1 और 1-10-1 अलग-अलग दिशाओं में पड़ी हुई छड़ें हैं (**चित्र-6**)।



चित्र-6

स्टेटिक बीड्स

इतालवी चिकित्सक और शिक्षिका मारिया मॉण्टेसरी (1870-1952) ने बच्चों को पढ़ाने के लिए कई तरह की सामग्री विकसित की थी, साथ ही एक शिक्षणशास्त्र और शिक्षा का दर्शन भी विकसित किया जिसे मॉण्टेसरी पद्धति के नाम से जाना जाता है। ऐसा ही एक सेट है स्टेटिक बीड्स या सुनहरे मोती (**चित्र-7**)। इसमें 'इकाई' एक एकल (सुनहरा) मनका होता है जिसे एक तार लुढ़कने से रोकता है जो दोनों तरफ़ दो हैंडल प्रदान करता है। 'दहाई' ऐसे 10 मनके होते हैं जिन्हें एक तार में पिरोया गया है (जिसे डोरी कहा जाता है)। 'सैकड़ा' ऐसे 10 तार से बना होता है जो एक सपाट संरचना (जिसे वर्ग कहा जाता है) बनाते हुए जुड़े होते हैं। तो, वास्तव में सैकड़ा में 10 × 10 = 100 मोती होते हैं। इसी तरह 'हज़ार' ऐसे 10 वर्ग हैं जिन्हें मिलाकर एक घन बनता है। तो, असल में इसमें 10 × 100 = 1000 मोती हैं। यह देखा



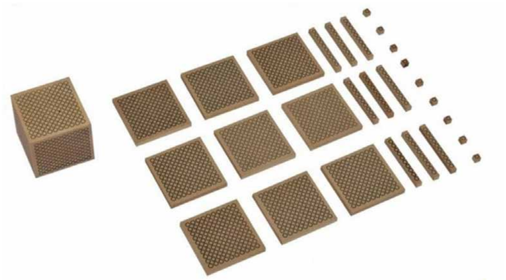
चित्र-7

जा सकता है कि ‘हज़ार’ साफ़तौर पर मोतियों की 10 परतें हैं, जहाँ हरेक परत एक ‘सैकड़ा’ है। इसके अलावा, एक शिक्षार्थी यह महसूस कर सकता है कि सैकड़ा या दहाई या एक इकाई की तुलना में हज़ार कितना भारी है। तो, स्टेटिक बीड्स का सेट न केवल दृश्य है बल्कि एक स्पर्शनीय सामग्री भी है। इनका इस्तेमाल दशकों तक शिक्षार्थियों द्वारा पूर्व-प्राथमिक स्तर (3-5 वर्ष) पर किया गया है।

अलबत्ता, इसे बनाना ज़्यादा महँगा और कठिन है। इसलिए, परिचय के बाद स्टेटिक बीड्स की जगह कभी-कभी लकड़ी के ब्लॉकों का इस्तेमाल किया जाता है। मोतियों को दर्शाने के लिए ब्लॉकों पर वृत्त बनाए जाते हैं (**चित्र-8**)।

अगर धातु के तारों की जगह प्लास्टिक के धागों का इस्तेमाल किया जाए तो स्टेटिक बीड्स को बनाना आसान हो सकता है (**चित्र-9**)। दहाई, सैकड़ा और हज़ार कम सख़्त होंगे, लेकिन उद्देश्य वही होगा। और एक हज़ार को इस तरह से बनाना सम्भव है कि 10 परतें बहुत स्पष्ट हों (**चित्र-10**) ।

यह आइडिया देने के लिए अनुपमा एस.एम., अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय को धन्यवाद।



चित्र-8

Source: https://www.kidkenmontessori.com/product/static-decimal-beads-and-cards/

चित्र-9

सम्भावित विस्तार

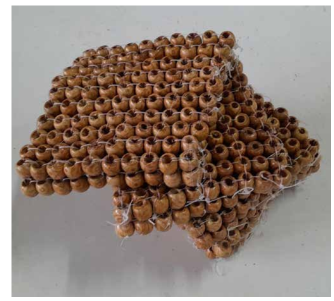
तीन अपेक्षाकृत छोटे डाइन्स ब्लॉक में एफ़एलयू के सभी फ़ायदे हैं। लेकिन तीसरे आयाम के कारण इन्हें बनाना ज़्यादा कठिन है। हालाँकि, ‘हज़ार’, जिसमें असल में तीसरे आयाम का इस्तेमाल होता है, बाल-शिक्षार्थियों को 1000 का एहसास देने में मदद नहीं करता। कई बच्चे इसे 600 की तरह देखते हैं क्योंकि प्रत्येक फ़लक एक सैकड़ा होता है। वयस्क और अधिक उम्र के विद्यार्थी तो घन के आयतन को लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई के रूप में देख सकते हैं, यानी 10 × 10 × 10 = 1000 लेकिन छोटे बच्चों के लिए इसे समझना बहुत मुश्किल लगता है।

इसके अलावा, बाज़ार में उपलब्ध ब्लॉक आमतौर पर खोखले होते हैं। ऐसे ब्लॉक में वज़न के लिहाज़ से हज़ार वाला ब्लॉक 10 सैकड़ा या 100 दहाई के बराबर नहीं होगा, क्योंकि 10 सैकड़ा और 100 दहाई में बड़े 10 × 10 × 10 के घन होंगे, जिनमें अधिक विभाजन होते हैं।

वैसे, त्रि-आयामी बेस-10 ब्लॉक यह समझने में उपयोगी हो सकते हैं कि प्रत्येक अंक के साथ मात्रा कैसे बढ़ती है, यानी, घातीय वृद्धि का एहसास : 1(घन) → 10 (छड़) → 100 (फ़लक) → 1000 (बड़ा घन) → 10,000 (बड़ी छड़)

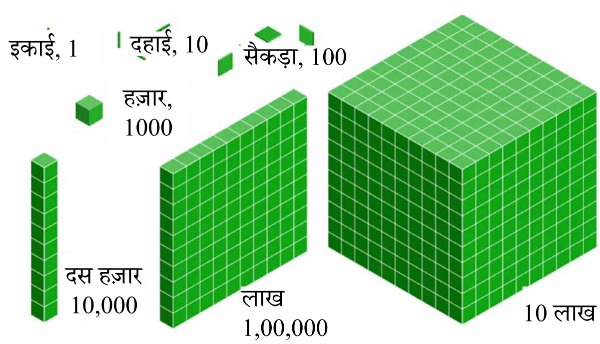
सितारे जैसा विन्यास

चित्र-10 : सामान्य 'हज़ार' की परतों को फैलाया नहीं जा सकता



अलग-अलग परतें

→ 1,00,000 (बड़ा फ़लक) → 10,00,000 (और भी बड़ा घन)। ऐसे मॉडल लकड़ी या अन्य सामग्री से बनाए जा सकते हैं और यह समझने में मदद कर सकते हैं कि 10 लाख लिखने में दो बार अल्पविराम क्यों आता है। तो, त्रि-आयामी बेस-10 ब्लॉक या घनाभ मिडिल स्कूल स्तर (कक्षा 6-8) में काफ़ी सहायक होते हैं, लेकिन बुनियादी स्तर (पूर्व-प्राथमिक और कक्षा-1, 2) या यहाँ तक कि कक्षा-3 में भी नहीं। भले ही मॉडल न बनाए जा सकें, **चित्र-11** जैसे दृश्य अधिकांश शिक्षार्थियों को यही समझ प्रदान कर सकते हैं।



चित्र-11

इनका उपयोग दशमलव के लिए भी किया जा सकता है, जिसकी चर्चा *'एट राइट एंगल्स'* के मार्च 2024 अंक में प्रकाशित दशमलव विभाजन [3] में की गई थी।

इसके विपरीत, स्टेटिक बीड्स को बड़ी संख्याओं के लिए (सैद्धान्तिक रूप से) इस्तेमाल किया जा सकता है। लेकिन यह काफ़ी थकाऊ होगा। इससे भी महत्त्वपूर्ण बात यह है कि चूँकि सीखने वाले तब तक काफ़ी बड़े हो चुके होते हैं, यह अपेक्षा की जाती है कि गणना पर निर्भर रहने की बजाय सार निकाला जाए और आयतन सूत्र और माप का उपयोग किया जाए। इसलिए, 5 या 6 अंक वाली या बड़ी संख्याओं के लिए इस तरह के मॉडल बनाने की ज़रूरत कम ही होती है। और चूँकि एक मोती को विभाजित करना व्यावहारिक रूप से असम्भव है, इसलिए इस मॉडल को दशमलव तक नहीं बढ़ाया जा सकता।

	डाइन्स ब्लॉक्स	स्टेटिक बीड्स
श्रेय	ज़ोल्टान डायनेस (1916-2014)	मारिया मॉण्टेसरी (1870-1952)
कालानुक्रमिक क्रम में	बाद में आया	पहले आया
सैद्धान्तिक रूप से	आयतन पर आधारित	गणना पर आधारित
समझ सकते हैं	बड़ी उम्र के शिक्षार्थी, कक्षा 4-5, नौ वर्ष से अधिक	पूर्व-प्राथमिक स्तर के शिक्षार्थी, तीन वर्ष से अधिक
निर्माण	आसान	अधिक श्रम और गहन सामग्री
लागत	कम	ज़्यादा
विस्तार	बड़ी संख्याओं और दशमलव तक विस्तार किया जा सकता है	बड़ी संख्याओं तक विस्तार किया जा सकता है (सैद्धान्तिक रूप से), दशमलव तक नहीं बढ़ाया जा सकता

संक्षेप में, डाइन्स ब्लॉक लम्बे समय में अधिक विस्तार योग्य और सार्थक है। लेकिन यह बाल-शिक्षार्थियों को पर्याप्त रूप से 1000 की समझ प्रदान नहीं करता। स्टेटिक बीड्स उनसे बेहतर ढंग से जुड़ते हैं। इसलिए, सीखने वाले की उम्र के आधार पर इन दोनों में से किसी एक को चुनना चाहिए।

सन्दर्भ :

1. द्विविमीय आधार-10 ब्लाक https://anuvadasampada.azimpremjiuniversity.edu.in/4639/
2. बीज गणितीय टाइल्स की समीक्षा https://anuvadasampada.azimpremjiuniversity.edu.in/4793/
3. दशमलव संख्याओं के भाग https://anuvadasampada.azimpremjiuniversity.edu.in/4634/

मैथ स्पेस अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय की एक गणित प्रयोगशाला है जो स्कूलों, शिक्षकों, अभिभावकों, बच्चों, स्कूली शिक्षा में काम करने वाले ग़ैर-सरकारी संगठनों और शिक्षक प्रशिक्षकों को सेवा प्रदान करती है। यह गणित के लिए सीखने-सिखाने की अलग-अलग तरह की सामग्री (mat(h)erials), उनकी व्यापकता, साथ-ही-साथ कम लागत वाले संस्करणों की सम्भावना तलाश करती है जिन्हें कबाड़ चीज़ों से बनाया जा सके। यह विविधता के दोनों छोरों को साधने का प्रयास करती है – उन्हें जो गणित से डरते हैं या इसे पसन्द नहीं करते और उन्हें भी जो इससे जुड़ना पसन्द करते हैं। यह एक ऐसी जगह है जहाँ कई लोगों के साथ बातचीत के ज़रिए विचार उभरते हैं और विकसित होते हैं। मैथ स्पेस से Mathspace@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : अमेय कान्त **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

$\frac{5}{7}$ और $\frac{5}{8}$ के बीच आप जितनी भिन्नें पता कर सकते हैं, उन्हें लिखें।

(आपको हर उस भिन्न के लिए एक बोनस अंक मिलेगा जिसे किसी और ने नहीं लिखा हो।)

स्रोत : बेन ओर्लिन

https://mathwithbaddrawings.com/

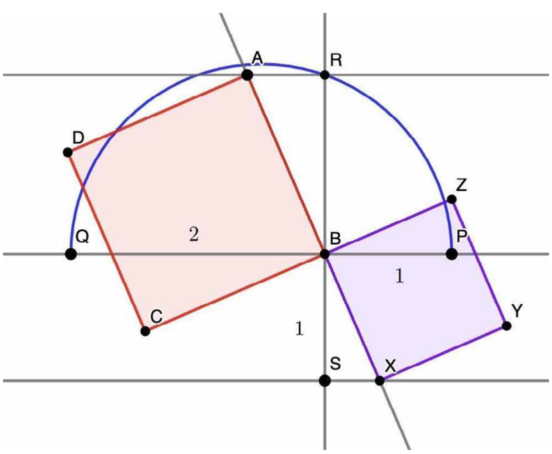
एक ऐसा वर्ग बनाना जिसका क्षेत्रफल दिए गए वर्ग के क्षेत्रफल का *1/n* हो

दीक्षा सिन्हा

हम यहाँ पृष्ठ 26 पर दी गई समस्या का एक समाधान प्रस्तुत कर रहे हैं।

एक ऐसी आकृति बनाना, जिसका क्षेत्रफल दिए गए वर्ग के क्षेत्रफल का आधा हो।

नीचे दी गई आकृति में, मान लीजिए कि एक वर्ग *ABCD* दिया गया है (जिसकी भुजा की लम्बाई हमें मालूम नहीं है)। माना कि $PB = BS = 1$ इकाई, और $BQ = 2$ इकाइयाँ है। माना कि *PRQ* एक अर्धवृत्त (semicircle) है, जो बिन्दुओं *P* और *Q* से गुज़र रहा है। तब, वर्ग *XYZB* का क्षेत्रफल वर्ग *ABCD* के क्षेत्रफल का आधा होना चाहिए।



चित्र-1

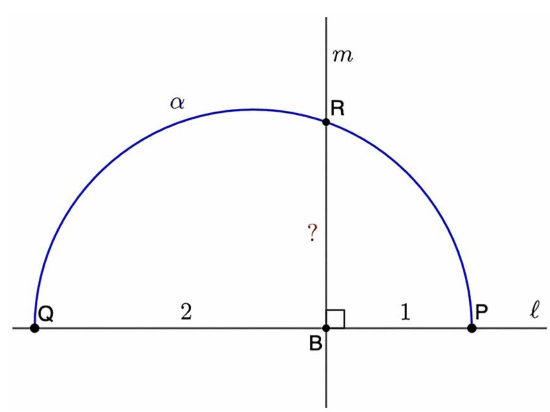
यह सवाल और यह चित्र हमें हमारे एक लेखक ने भेजे थे और इसने हमें सोचने के लिए मजबूर कर दिया। इस चित्र को थोड़ी देर ध्यान से देखें– क्या वर्ग *XYZB* का क्षेत्रफल दिए गए वर्ग *ABCD* के क्षेत्रफल का आधा है? अगर ऐसा है, तो क्यों? आगे हम इसकी व्याख्या कर रहे हैं।

अगर हम इस समस्या को सुलझाने के लिए कम्प्यूटेशनल चिन्तन का इस्तेमाल करें, तो इसे सुलझाने का पहला चरण यह होगा :

समस्या का कथन : क्या वर्ग *XYZB* का क्षेत्रफल दिए गए वर्ग *ABCD* के क्षेत्रफल का आधा है? अगर ऐसा है, तो क्यों?

आइए इन चरणों को छोटे-छोटे चरणों में तोड़े : हमें दिया गया है कि $QB = 2$ इकाइयाँ, और $PB = BS = 1$ इकाई है।

एक ऐसा वर्ग दिया होने पर, जिसका क्षेत्रफल x वर्ग इकाइयाँ है, हम एक ऐसा वर्ग बनाना चाहते हैं, जिसका क्षेत्रफल $\frac{x}{2}$ वर्ग इकाइयाँ हो। सरसरी नज़र से देखने पर पता चलता है कि यह कुछ वैसा ही है जैसे $\sqrt{x}$ इकाइयों वाला एक रेखाखण्ड दिया होने पर, हम $\sqrt{\frac{x}{2}}$ इकाइयों वाला एक रेखाखण्ड बनाना चाहते हों।



चित्र-2

की-वर्ड : निर्माण, भिन्नात्मक क्षेत्रफल, तार्किक चिन्तन

चरण-1 : एक रेखा l पर तीन बिन्दु P, B और Q इस तरह से अंकित करें, ताकि B बिन्दु P और Q के बीच में स्थित हो। $QB = 2$ इकाइयाँ और $PB = 1$ इकाई।

चरण-2 : हम एक अर्धवृत्त α बनाएँगे, जिसका व्यास PQ होगा।

चरण-3 : मान लीजिए कि रेखा m, l पर लम्बवत है और B से गुज़रती है व α को R पर काटती है (**चित्र-2** देखें)।

BR क्या होगा?

समकोणीय ΔPBR से, $PR^2 = PB^2 + RB^2$

समकोणीय ΔRBQ से, $QR^2 = RB^2 + BQ^2$

समकोणीय ΔPRQ से, $PQ^2 = PR^2 + RQ^2$

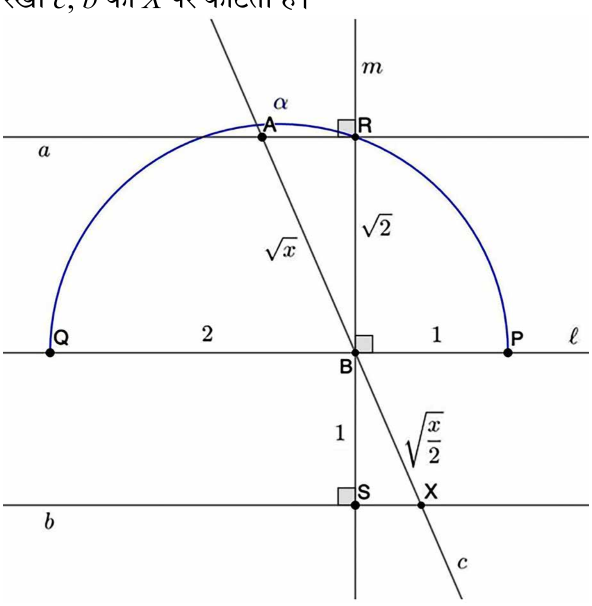
(ध्यान दें कि अर्धवृत्त में $\angle$PRQ एक समकोण है)।

इन तीन समीकरणों का इस्तेमाल करके, हम इस तथ्य तक पहुँचते हैं कि $BR = \sqrt{2}$ है।

चरण-4 : l के दूसरी तरफ़ रेखा m पर बिन्दु S इस तरह से अंकित करें ताकि $BS = 1$ इकाई हो (**चित्र-3** देखें)।

चरण-5 : रेखा l के समानान्तर रेखा a बनाएँ, जो R से गुज़रती हो, और रेखा l के समानान्तर रेखा b बनाएँ, जो S से गुज़रती हो।

चरण-6 : रेखा a पर कोई बिन्दु A चुनें और रेखा c के माध्यम से बिन्दु B और A को मिलाएँ। मान लीजिए कि रेखा c, b को X पर काटती है।

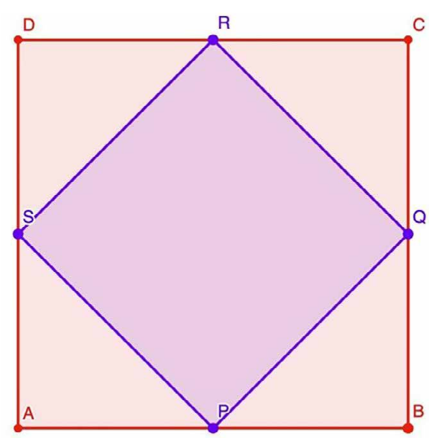


चित्र-3

अब ΔARB और ΔXBS एक समान (समरूप) हैं। तो, अगर $AB = \sqrt{x}$ इकाइयाँ है, तो $BX = \sqrt{\frac{x}{2}}$ इकाइयाँ होगा।

इस प्रकार, अगर हम एक वर्ग बनाएँ जिसकी एक भुजा सम्मिलित रूप से AB और XB हों, तो अनिवार्य तौर पर हमारे पास AB भुजा वाला वर्ग होना चाहिए, जो XB भुजा वाले वर्ग के क्षेत्रफल का दोगुना होगा। इस प्रकार, समाधान को छोटे-छोटे चरणों में विभाजित करके, हम यह निष्कर्ष निकालेंगे कि वर्ग $XYZB$ का क्षेत्रफल असल में दिए गए वर्ग $ABCD$ के क्षेत्रफल का आधा है।

पाठकों ने यह जान ही लिया होगा कि वर्ग बनाने के और भी सरल तरीके हैं, जो दिए गए वर्ग के क्षेत्रफल को आधा कर सकते हैं, जैसे कि **चित्र-4** में दिखाया गया है। यहाँ $ABCD$ एक दिया गया वर्ग है, और P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य बिन्दु हैं। हालाँकि, $BQ = 2$ की बजाए n लेकर, दिए गए वर्ग के क्षेत्रफल के $\frac{1}{n}$ क्षेत्रफल वाला वर्ग बनाने के लिए ऊपर बनाई गई आकृति का विस्तार किया जा सकता है (नीचे **सवाल-1** देखें)।



चित्र-4

किसी वर्ग का क्षेत्रफल आधा करने तक ही क्यों रुकें? हमारा दावा है कि इस निर्माण से और भी बहुत कुछ हासिल किया जा सकता है! हम पाठकों के आज़माने के लिए यहाँ कुछ सवाल प्रस्तुत कर रहे हैं।

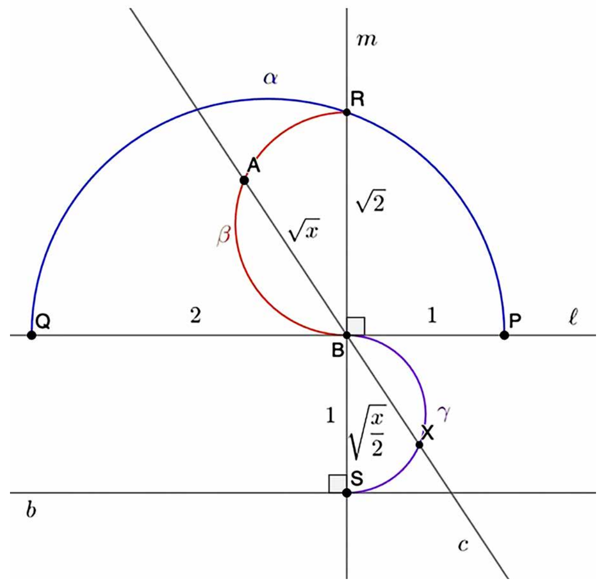
सवाल

1. अगर हम मान लें कि $BQ = n$ इकाइयाँ है, तो BR की लम्बाई क्या होगी? BX की लम्बाई क्या होगी? $ABCD$ और $XYZB$ के क्षेत्रफलों के बीच का अनुपात क्या है?
2. ऊपर बनाई गई आकृति तभी सही कहलाएगी जब भुजा

AB या तो BR के बराबर हो या फिर उससे ज़्यादा हो। क्या होगा अगर $AB < BR$? इस सम्भावना के अनुसार ऊपर निर्मित आकृति में थोड़ा बहुत बदलाव किया जा सकता है (**चित्र-5**)। बताएँ कि ऊपर निर्मित आकृति सही क्यों होगी। यहाँ β एक अर्धवृत्त है, जो बिन्दु B और R को जोड़ रहा है, और γ एक और अर्धवृत्त है, जो बिन्दुओं B और S को जोड़ रहा है।

3. अगर हम एक समबाहु त्रिभुज, एक नियमित षट्कोण, एक नियमित 13-गॉन, एक वृत्त के क्षेत्रफल को आधा करना चाहते हैं, तो क्या ऊपर निर्मित आकृतियाँ काम करेंगी?

4. एक द्वि-आयामी (2D) आकृति दी होने पर, क्या आप कह सकते हैं कि ऊपर निर्मित आकृतियों से एक ऐसी आकृति बन सकती है, जो दी गई आकृति के जैसी हो और उसका क्षेत्रफल दी गई आकृति के क्षेत्रफल का 1/n हो?



चित्र-5

दीक्षा सिन्हा पोदार इंटरनेशनल स्कूल सीआईई नेरुल नवी मुम्बई में दसवीं कक्षा की छात्रा हैं। गणित के प्रति उनके जुनून और प्यार ने उन्हें संयुक्त राज्य अमरीका में रैम फ़ाउण्डेशन और मैथपाठ द्वारा आयोजित राइजिंग ए मैथेमैटीशियन प्रशिक्षण कार्यक्रम में सक्रियता से भाग लेने के लिए प्रेरित किया। दीक्षा से dictionarycube@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : शहनाज़ **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता

वर्गमूल के सवाल का सामान्यीकरण

गौरी घोरमाड़े

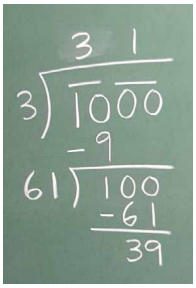
लेखिका ने एक कक्षा अवलोकन के अपने अनुभव का वर्णन किया है जहाँ वर्गमूल सम्बन्धित सवाल को हल करने के लिए एक चित्रात्मक विधि का उपयोग किया गया था। इस लेख में वे इस विधि को एक क़दम आगे बढ़ाकर, सामान्यीकृत करने का प्रयास कर रही हैं।

छत्तीसगढ़ के धमतरी में स्थित अज़ीम प्रेमजी स्कूल में, मैंने कक्षा-8 की गणित की कक्षा देखी, जहाँ शिक्षक ने वर्गमूल सिखाने के लिए एक नए तरीक़े का उपयोग किया था। उन्होंने वर्गमूल के सवाल को हल करने के लिए एक चित्रात्मक विधि अपनाई थी, जो पारम्परिक तरीक़ों से भिन्न थी। इस लेख में, मैं इस चित्रात्मक तरीक़े और पारम्परिक विधि के बीच एक सम्बन्ध स्थापित करने का प्रयास करते हुए, इस विधि को सामान्यीकृत करने का प्रयास कर रही हूँ।

शिक्षक ने पाठ की शुरुआत निम्नलिखित सवाल से की :

मैंने 1000 पौधे ख़रीदे हैं। अब उन्हें आयताकार जमावट में इस तरह लगाना है कि पंक्तियों और स्तम्भों की संख्या बराबर हो। यदि मुझे ऐसा करना हो, तो उक्त शर्त को पूरा करने के लिए मुझे और कितने पौधों की आवश्यकता होगी?

आइए देखें कि हम इस सवाल को पारम्परिक तरीक़े से कैसे हल करते। इस सवाल से संकेत मिलता है कि हमें सबसे बड़ी 3-अंकीय संख्या के बाद वाली अगली वर्ग संख्या का पता लगाना है। पंक्तियों और स्तम्भों की संख्या समान होना यह दर्शाता है कि हम वर्ग संख्याओं के बारे में बात कर रहे हैं। पर सबसे बड़ी 3-अंकीय संख्या क्यों? जब इस सवाल को दीर्घ (लम्बी) विभाजन विधि से हल करते हैं, तो हम पाते हैं कि इसका उत्तर 1000 से कम सबसे बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल होगा, जो सबसे बड़ा 3-अंकीय पूर्ण वर्ग होगा। इस सवाल के तर्क के अनुसार, हमें सबसे बड़ी 3-अंकीय वर्ग संख्या के बाद की अगली वर्ग संख्या खोजनी है, जो सबसे छोटी 4-अंकीय वर्ग संख्या होगी। यदि इस संख्या में से 1000 घटा दिया जाए, तो हमें आवश्यक पौधों की संख्या मिल जाएगी।



चित्र-1

चित्र-1 में 1000 का वर्गमूल पता करने के लिए दीर्घ (लम्बी) विभाजन विधि दिखाई गई है। यहाँ यदि हम 32 का वर्ग लें और उसमें से 1000 घटाएँ तो हमें उत्तर मिल जाएगा। इसलिए, उत्तर 24 होगा।

अब, हम 1000 को N और 31 को m मानकर इस विधि को सामान्यीकृत करने का प्रयास करते हैं।

तब इस समीकरण को $(m+1)^2 - N$ =आवश्यक पौधों की संख्या के रूप में लिखा जा सकता है।

ध्यान दें कि यहाँ दीर्घ (लम्बी) विभाजन विधि के बाद दो 2-अंकीय संख्याओं का गुणा करना आवश्यक होता है।

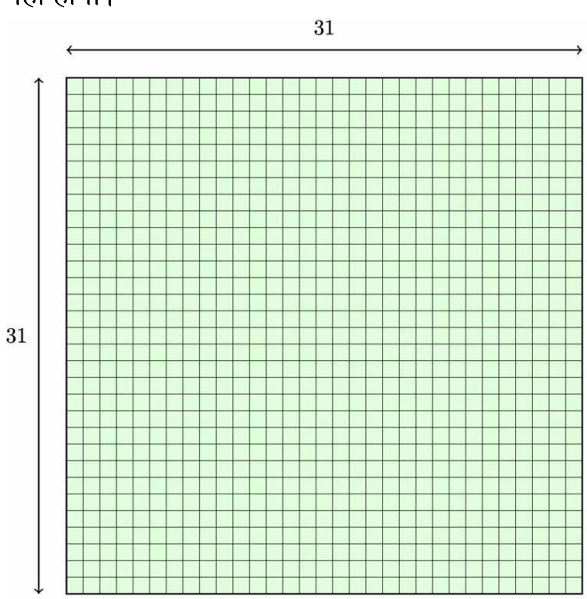
कक्षा में इस सवाल को हल करने से पहले, विद्यार्थियों को सबसे बड़ी या सबसे छोटी 3 या 4-अंकीय वर्ग संख्याओं की पहचान करने जैसे सवालों को हल करने

की-वर्ड : वर्ग, वर्गमूल, इबारती सवाल, सवालों के चित्रात्मक हल

का पर्याप्त अभ्यास कराया गया था। कक्षा के अधिकांश विद्यार्थियों ने इस सवाल को वर्गमूल निकालने की दीर्घ (लम्बी) विभाजन विधि का उपयोग करके हल करने का प्रयास किया और उनमें से कुछ इसे हल करने में सफल भी रहे।

हालाँकि, शिक्षक ने इसे समझाने के लिए ठीक इस तरीक़े का उपयोग तो नहीं किया, जिसमें सबसे बड़ी 3-अंकीय वर्ग संख्या और सबसे छोटी 4-अंकीय वर्ग संख्या शामिल हो।

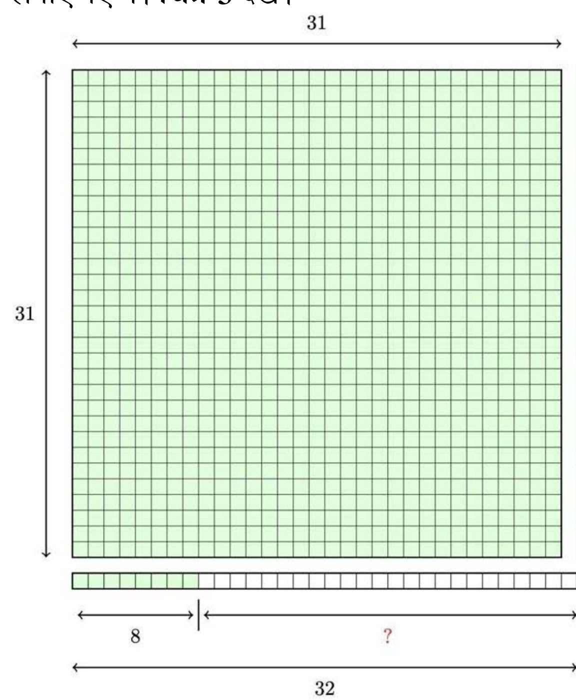
इसकी बजाय, उन्होंने **चित्र-2** के समान एक आरेख बनाया और कहा कि 1000 पौधों को जमाकर केवल 31 गुणा 31 का एक वर्ग बनाया जा सकता है और जिसमें से कुछ पौधे बच जाएँगे, जो शेषफल के बराबर होंगे। जिन्हें दोनों भुजाओं पर और जमाया जा सकता है। इससे विद्यार्थियों को 32 का वर्ग पता करने का संकेत मिलेगा जो कि पौधों की कुल संख्या होगी और इसमें से 1000 घटाने पर ख़रीदे जाने वाले पौधों की संख्या मिल जाएगी। अब इस चित्रात्मक तरीक़े को इस सवाल का उत्तर खोजने के लिए बढ़ाया जा सकता है जिससे हमें 32 का वर्ग ज्ञात करने की आवश्यकता नहीं होगी।



चित्र-2

माना कि हमारे पास पौधों की संख्या N है, जो कि एक पूर्ण वर्ग नहीं है और N से छोटा सबसे बड़ा पूर्ण वर्ग m^2 है। अब m गुणा m के वर्ग में पौधों को जमाने के बाद, शेष पौधों की संख्या $N - m^2$ होगी। याद करें कि पिछले सवाल में यह कैसे किया गया था, $1000 - 31^2 = 39$, जो कि दीर्घ (लम्बी) विभाजन विधि में शेषफल के रूप में प्राप्त हुआ था।

अब इन बचे हुए पौधों में से m पौधे किसी एक भुजा पर जमाए जा सकते हैं। इस प्रकार, इन्हें जमाने के बाद हमारे पास अब $N - m^2$ पौधे बचे रहेंगे। यानी, पिछले सवाल में $(1000 - 31^2) - 31 = 39 - 31 = 8$ पौधे बचे थे। याद कीजिए कि वर्ग की दूसरी भुजा पर $39 - 31 = 8$ पौधे लगाए गए थे। **चित्र-3** देखें।



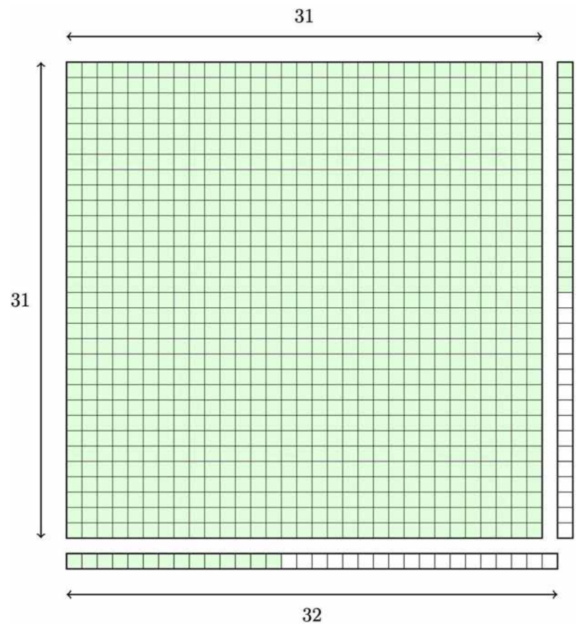
चित्र-3

लेकिन ध्यान दीजिए कि दूसरी भुजा पर कुल मिलाकर $m + 1$ इकाइयाँ हैं। इसलिए हमें $(m + 1) - [(N - m^2) - m]$ पौधे ख़रीदने की ज़रूरत है। पिछले उदाहरण में हमने देखा कि, हमें $(31+1) - 8 = 24$ पौधे ख़रीदने होंगे।

हालाँकि, अगर हम 1000 की बजाय 990 पौधों से शुरू करते, तो हमारा यह तर्क काम नहीं करेगा। ऐसा इसलिए है क्योंकि तब $(N - m^2) - m < m$ हो जाता, जिसका अर्थ है कि हम दोनों भुजाओं में से किसी एक को पूरा नहीं भर सकेंगे। इसे हल करने के लिए पौधों को पहले एक ही भुजा पर लगाने की बजाय, हम दोनों भुजाओं पर एक-एक करके पौधे लगा सकते हैं (**चित्र-4** देखें)।

सामान्य रूप से, इसका अर्थ है कि हमारे पास वर्ग की दोनों भुजाओं पर $m + m + 1 = 2m + 1$ स्थान (स्लॉट) हैं। यदि हम शेष $(N - m^2)$ पौधों का उपयोग करके इन स्थानों को भरते हैं, तो ख़रीदे जाने वाले आवश्यक पौधों की संख्या $2m + 1 - (N - m^2)$ होनी चाहिए।

यहाँ ध्यान देने योग्य है कि विद्यार्थियों को केवल जोड़ और घटाना होता है, न कि गुणा करना होता है। चूँकि जोड़ और घटाना, गुणा की तुलना में सरल संक्रियाएँ हैं, इसलिए ग़लतियों की सम्भावना कम होती है। इसके साथ ही, यह विधि उन्हें चित्र रूप से सत्यापित करने का अवसर भी प्रदान करती है कि $(m + 1)^2 - N$ और $2m + 1 - (N - m^2)$ समान हैं।



चित्र-4

गौरी घोरमाड़े अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलूरु में बीएससी-बीएड गणित के चौथे वर्ष में अध्ययन कर रही हैं। विद्यालय स्तर के गणित और उससे सम्बन्धित विभिन्न शिक्षण विधियों में उनकी गहरी रुचि है। गौरी गणित में मास्टर डिग्री प्राप्त करना चाहती हैं और स्कूलों में पढ़ाने के माध्यम से वह गणित शिक्षण पर अध्ययन करने के लिए उत्सुक हैं। गौरी से gauri.ghormade21ug@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : प्रमोद मैथिल **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

लेख आमंत्रित हैं...

एट राइट एंगल्स भारत की सार्वजनिक शिक्षा प्रणाली में गणितीय शिक्षा को समर्पित एक गुणवत्तापूर्ण संसाधन है। इसे विशेषकर बुनियादी, प्राथमिक और माध्यमिक पाठशालाओं के शिक्षक और शिक्षकों के प्रशिक्षकों के लिए तैयार किया गया है।

हम गणित के शिक्षकों, शिक्षाविदों, अभ्यासकर्ताओं (प्रैक्टिसनर्स), अभिभावकों और विद्यार्थियों से लेख आमंत्रित करते हैं। यदि आप एक ऐसा मंच तलाश रहे हैं जो ख़ासतौर से लगभग 6-14 साल के विद्यार्थियों के गणित के सीखने के अनुभव को समृद्ध करता हो और बढ़ाता हो, तो यह पत्रिका आपके लिए है। आपके लेखों का स्वागत है।

विषय एवं थीम के लिए सुझाव

भेजे जाने वाले लेख कक्षा-1 से 8 की पाठ्यक्रम सामग्री पर केन्द्रित होना चाहिए। लेखों से अपेक्षा है कि वे :

- स्कूली शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा, 2023 (NCF-SE-2023) में उल्लेखित विषय और थीम को विस्तारपूर्वक समझा सकें और दर्शा सकें।
- ख़ासकर NCF-SE-2023 में चर्चित चुनौतियों को सम्बोधित करते हों।
- गणितीय इतिहास या गणितीय सोच के इतिहास का प्रमाणित विवरण हों।
- विद्यार्थियों को प्रशिक्षण और अभ्यास में तल्लीन रखने के लिए नवाचारी वर्कशीट या तरीक़ों को शामिल कर सकें।
- बच्चों के सन्दर्भ में प्रासंगिक, गणित के रोज़मर्रा जीवन में उपयोग का वर्णन कर सकें।
- अन्तःविषय गतिविधियों और परियोजनाओं (प्रोजेक्ट) का वर्णन कर सकें।
- पाठ्यक्रम से जुड़ी पहेलियों और खेलों की समीक्षा कर सकें।
- ऑनलाइन रिसोर्स सहित प्रासंगिक सामग्री के चयन पर मार्गदर्शन कर सकें।
- बुनियादी संख्या ज्ञान के साथ-साथ गणनात्मक सोच के लिए शैक्षणिक रणनीतियाँ विकसित कर सकें।
- विभिन्न शैक्षणिक पद्धतियों को लागू करने में शिक्षकों की सहायता कर सकें।
- टीचर्स लर्निंग मैटेरियल (टीएलएम) की समीक्षा कर सकें या गणित की कक्षा में स्थानीय सन्दर्भ और स्थानीय टीएलएम का उपयोग कैसे करें इसके बारे में बता सकें।
- विद्यार्थियों में अवधारणात्मक समझ की खाई को पाटने में सहायता करने के लिए सामग्री प्रदान कर सकें।
- आकलन में आने वाली परेशानियों का समाधान कर सकें।
- गणित सीखने के दौरान होने वाली ग़लतफ़हमियों को पहचानने और समझने के लिए उपाय सुझा सकें।
- समस्याओं की सूची, उनके हल पर चर्चा एवं समस्या–समाधान की रणनीतियों सहित दे सकें, जो कि सामान्यतौर पर पाठयपुस्तकों में नहीं मिलती।

बड़े लेखों के अलावा हम छोटे लेखों का भी स्वागत करते हैं जिनमें विविध तरह की रोचक सामग्री शामिल हो। जैसे किसी किताब या गणित के सॉफ्टवेयर की समीक्षा या गणितीय थीम पर आधारित यूट्यूब की कोई क्लिप। प्रूफ़ विदाउट वर्ड्स (proofs without words), गणितीय अन्तर्विरोध (mathematical paradoxes), असिद्धीकरण (false proofs) पर आधारित लेख हो सकते हैं। गणितीय विषयों पर आधारित कविता, कार्टून या तस्वीरें (photographs) जैसी रचनात्मक अभिव्यक्तियों को शामिल करते लेख हो सकते हैं। आप किसी गणितज्ञ से जुड़े क़िस्से या 'हस्तशिल्प में गणित, फ़िल्मों में गणित' जैसे रोचक विषयों पर भी लेख भेज सकते हैं।

लेख AtRightAngles.editor@apu.edu.in पर भेजें।

कृपया आगे दी गई सम्पादकीय नीतियों और दिशा-निर्देशों को भी देखें।

लेखों को स्वीकार करने की नीति

एट राइट एंगल्स प्रारम्भिक गणित और गणितीय शिक्षा से सम्बन्धित मुद्दों पर पूर्णत: केन्द्रित पत्रिका है। इसलिए लेखों का प्रयास होना चाहिए कि वे गणित के आम मिथकों, धारणाओं और भ्रान्तियों से परे हों।

पत्रिका में कहीं और से नक़ल या चोरी करके भेजे गए लेखों के लिए बिल्कुल भी जगह नहीं है। लेखक द्वारा लेख को प्रकाशन के लिए भेजे जाने पर माना जाता है कि यह मौलिक है और प्रकाशन के लिए इस पर किसी भी तरह का क़ानूनी प्रतिबन्ध नहीं है (जैसे किसी अन्य का कॉपीराइट स्वामित्व)। लेख में जहाँ भी उपयुक्त हो वहाँ प्रासंगिक सन्दर्भ और स्रोतों का उल्लेख किया जाए।

एट राइट एंगल्स पत्रिका अन्य भारतीय भाषाओं में भी अनूदित होती है। इसलिए, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय को पत्रिका में प्रकाशित सभी लेखों का अन्य भाषाओं में अनुवाद और प्रसार करने का अधिकार होगा।

यदि भेजा गया लेख पहले कहीं प्रकाशित हो चुका है, तो लेखक से अनुरोध है कि वे पूर्ववर्ती प्रकाशक से अन्यत्र पुनर्प्रकाशन के लिए अनुमति अवश्य प्राप्त कर लें। और लेख के अन्त में 'लेखक का नोट' के तहत इसका उल्लेख करें। इसके अलावा, यह अपेक्षा भी की जाती है कि लेखक हमारे रिकॉर्ड के लिए अनुमति पत्र की एक कॉपी लेख के साथ भेजें। इसी तरह, यदि लेखक ***एट राइट एंगल्स*** में प्रकाशित अपना लेख पुनः प्रकाशन के लिए कहीं और भेज रहे हैं तो उनसे अपेक्षा है कि वे ***एट राइट एंगल्स*** को यथोचित श्रेय अवश्य दें।

एट राइट एंगल्स में विविध तरह के लेखों का स्वागत है। ऐसे लेख जो गुणवत्ता की दृष्टि से अच्छे हैं लेकिन इस पत्रिका में प्रकाशन के लिए उपयुक्त नहीं हैं, उनका उपयोग लेखक की सहमति से विश्वविद्यालय की अन्य पत्रिकाओं में किया जा सकता है।

लेखकों के लिए विशेष दिशा-निर्देश

अगर आप ***एट राइट एंगल्स*** के लिए लिख रहे हैं तो कृपया इन दिशा-निर्देशों पर ध्यान दें :

1. **रोचक परिचय** : शुरुआत से ही पाठक का ध्यान आकर्षित करने के उद्देश्य से पठनीय और रोचक शैली में लिखें। लेख के पहले पैराग्राफ़ से ही स्पष्ट हो जाना चाहिए कि लेख किस विषय के बारे में है। उदाहरण के तौर पर, शुरुआती पैराग्राफ़ एक अप्रत्याशित निष्कर्ष हो सकता है, एक चुनौती हो सकती है, एक मज़ेदार सवाल के साथ चित्र हो सकता है या एक प्रासंगिक क़िस्सा हो सकता है। ख़ासतौर से ये आगे पढ़ते जाने की रुचि पैदा करने वाला होना चाहिए।
2. **लुभावना शीर्षक** : लेख का शीर्षक एक उपयुक्त और लुभावने वाक्यांश से दिया जाए, जिसमें लेख की भावना और सत्व झलके।
3. **शैली** : प्रमाण-सिद्ध प्रारूप (Theorem-Proof Format) में लेख लिखने से परहेज़ करें। इसकी बजाय, अनौपचारिक तरीक़े से प्रमाणों (Proofs) को लेख में एकीकृत करें।
4. **सन्तुलन** : लम्बी-लम्बी गणनाओं को दर्शाने से बचें। बहुत अधिक विवरण देने और छिपी हुई (अ-उल्लेखित) गणनाओं पर निर्भर चरण को छोड़कर अगले चरण पर चले जाने, के बीच सन्तुलन बनाकर रखें।
5. **सुलभ भाषा** : उन विशिष्ट शब्दावली और संकेत शब्दों के उपयोग को टालें जिनसे सिर्फ़ विशेषज्ञ ही परिचित होते हैं। यदि तकनीकी शब्दों का उपयोग ज़रूरी हो तो उन्हें परिभाषित कर दें।
6. **दृश्यों का प्रयोग** : जहाँ सम्भव हो वहाँ ऐसे रेखाचित्र या फ़ोटो दें जिनमें गणितीय विचार का सार हो। यदि कोई चित्र या रेखाचित्र गणित की किसी अवधारणा को स्पष्ट करते हों तो उन्हें अवश्य रखें।
7. **संक्षिप्त सन्दर्भ** : संक्षिप्त अनुशंसाओं के साथ सन्दर्भों (reference) की एक संक्षिप्त सूची दें।
8. **अभ्यास और सवाल** : लेख की शुरुआत या अन्त में विचार करने के लिए कुछ सवाल और कुछ अभ्यास उपलब्ध कराएँ।
9. **उद्धरण प्रारूप (Citation Format)** : लेख के अन्त में, स्रोतों और सन्दर्भों को जिस क्रम में वे आएँ हैं उस ही क्रम में उन्हें उद्धृत (cite) करें। फ़ुटनोट से बचें। यदि फ़ुटनोट की आवश्यकता है, तो उनका क्रम डालकर अलग से लिखें।
10. **संक्षिप्ताक्षर और परिवर्णी शब्द (Abbreviations and Acronyms)** : लेख में जब पहली बार किसी शब्द का लघु रूप (यानी संक्षिप्ताक्षर) और कई शब्दों के शुरुआती अक्षर का प्रचलित लघु रूप (यानी परिवर्णी) आए तब वहीं उनका अर्थ बता दें। ऐसे सभी शब्दों की एक शब्दावली बनाकर उसे लेख के अन्त में प्रस्तुत करें।
11. **चित्रों को नामांकित करना** : लेख में आने वाले सभी चित्रों, रेखाचित्रों, तस्वीरों पर चित्र क्रमांक डालें और उनका विवरण लिखें। इन सभी चित्रों, रेखाचित्रों, तस्वीरों को स्पष्ट निर्देशों के साथ ईमेल में अलग से अटैच करें। (ध्यान दें कि खीचीं गई तस्वीरों या स्कैन तस्वीरों की गुणवत्ता 300dpi से कम नहीं होना चाहिए।)
12. **चित्रों का विवरण स्पष्टता से दें** : तस्वीरों, चित्रों, डायग्राम्स और तालिकाओं का उल्लेख उनके उचित क्रमांक से करें। 'यहाँ', 'वहाँ', 'दाईं ओर', 'बाईं ओर', 'ऊपर', 'नीचे' इस तरह से उल्लेख करने से परहेज़ करें।
13. **लेखक का परिचय** : लेखक अपनी हाई रिज्योलूशन फ़ोटो भी भेजें। साथ ही, अपने बारे में संक्षिप्त में (जो 50 शब्दों से ज़्यादा का नहीं हो) जानकारी भेजें, जो पाठकों को आपके अनुभव व विशेष योग्यता वाले कार्यक्षेत्र के बारे में बताती हो।
14. **ब्रिटिश वर्तनी (Spellings)** : ब्रिटिश वर्तनी का पालन करें। जैसे organise लिखें न कि organize; colour लिखें न कि color, neighbour लिखें न कि neighbor आदि।
15. आप अपने लेख **हिन्दी** में भी भेज सकते हैं। उपयुक्त होने पर हम उन्हें अँग्रेज़ी में अनूदित करके प्रकाशित करेंगे।
16. **लेख भेजने का प्रारूप** : लेखों को MS Word या LaTex में लिखकर ही भेजें।

मुद्रक तथा प्रकाशक शरद सुरे, रजिस्टार द्वारा अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के लिए आदर्श प्रा.लि., 4 शिखरवार्ता, प्रेस काम्पलेक्स, जोन-1, एम.पी.नगर, भोपाल 462 011 से मुद्रित

एवं अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, सर्वे नम्बर 66, बुरुगुंटे विलेज, बिक्कनाहल्ली मेन रोड, सरजापुरा,बेंगलूरु, कर्नाटक- 562 125 से प्रकाशित

सम्पादक : स्नेहा टाइटस

Azim Premji University

POSTGRADUATE DIPLOMA IN EDUCATION
EDUCATIONAL ASSESSMENT

Enabling practitioners to build assessment perspectives and practices to nurture student learning

The programme aims to build a holistic understanding of the domain of educational assessments amongst key stakeholders. It focuses on providing the requisite knowledge, skills and dispositions that are necessary for planning, designing, and utilising assessments in order to bring about a positive shift in the **culture of assessments.**

Eligibility:

- The programme is designed for professionals working in the area of education preferably for at least 2 years.
- Applicants should have an undergraduate degree in any discipline with a working knowledge of English (reading, writing, and speaking).

Scan the QR code to know more:

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी
एट राइट एंगल्स
स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

Azim Premji University

रुपए-पैसे

पद्मप्रिया शिराली

अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय का प्रकाशन

रुपए-पैसे

अधिकतर बच्चे किसी किराना या सब्ज़ी की दुकान पर ख़रीददारी करते वक़्त रुपए-पैसों का उपयोग देखते हैं। हालाँकि पूरे देश में और अलग–अलग प्रकार के लेन-देन में डिजिटल भुगतान (पेमेंट) का उपयोग बढ़ा है, फिर भी मुद्रा (सिक्के और नोट) कई तरह के भुगतानों के लिए उपयोग की जाती है, जैसे कि घरेलू सहायकों, जूता,साइकिल आदि सुधारने वालों को देने में, फ़ुटपाथ से की गई ख़रीददारी में, वेंडिंग मशीनों से समान लेने आदि द्वारा दी जाने वाली सेवाओं में। इसके अलावा, बहुत-से बुज़ुर्ग अभी भी रुपए-पैसे में लेन-देन करने में ही अधिक सहज महसूस करते हैं।

घरेलू गतिविधियों और बातचीत के ज़रिए बच्चे सीधे तौर पर न सही पर परोक्ष रूप में वस्तुओं/ सेवाओं को लेने के बदले में पैसे देने की अवधारणा को समझ जाते हैं। उन्हें सिक्कों और छोटे (कम मूल्य वाले) नोटों की बुनियादी पहचान हो जाती है। उन्हें कम और अधिक क़ीमत की समझ हो जाती है, हालाँकि उनमें विभिन्न मान के मूल्य और पैसे की सामान्य समझ धीरे-धीरे समय के साथ आती है।

हालाँकि कुछ चुनौतियाँ हैं जिनका सामना छोटे बच्चे करते हैं, जैसे सिक्कों के ढेरी के मूल्य और ढेरी में सिक्कों की संख्या के बीच अन्तर करना। इसके अलावा वस्तु के मौद्रिक मूल्य की अवधारणा से सभी छोटे बच्चे परिचित नहीं होते हैं। यह अवधारणा अमूर्त है। यदि आप एक ‘दो’ रुपए का सिक्का लें तो उसमें कोई स्वाभाविक ‘दो-पन’ नहीं होता है, कहने का मतलब वे अलग-अलग दो सिक्के नहीं होते हैं। इस बात का ध्यान रखा जाना चाहिए कि सिक्के और नोट ग़ैर-अनुपातिक सामग्री हैं (जबकि गणितमाला, तीली-बण्डल, फ्लैट्स-लॉन्ग-यूनिट (FLU) आदि आनुपातिक हैं)। उनका आकार (साइज़) भी मूल्य को निर्धारित नहीं करते, क्योंकि विभिन्न मूल्यों के नोट अकसर एक ही आकार के होते हैं।

कुछ बच्चे जब उन्हें किसी दुकान से कुछ सामान लेना होता है तो वे कम मूल्यवर्ग की मुद्रा का बख़ूबी इस्तेमाल कर सकते होंगे। कुछ परिवार अपने बच्चों में बचत का विचार विकसित करने के लिए गुल्लक देते होंगे।

कुछ बच्चों को अपने ख़र्चों को नियोजित करने के उद्देश्य से नियमित रूप से जेबख़र्च (पॉकेट मनी) दिया जाता होगा। बच्चे बड़ों की सब्ज़ी, वाहनों वग़ैरह की क़ीमतों, घर या ज़मीन के लिए ऋण, मासिक किस्तों के भुगतान आदि के बारे में होने वाली चर्चा को सुनते ही होंगे।

बच्चों को जो ये देखने–सुनने को मिलता है इसे कक्षा की चर्चाओं में सम्मिलित किया जा सकता है।

कक्षा-5 और उससे बड़ी कक्षा के विद्यार्थियों के साथ कक्षा के लिए आवश्यक किताबें, उदाहरण के लिए कहानियों की किताबें ख़रीदने का नियोजन किए जाने को कक्षा के प्रकल्प (क्लास प्रोजेक्ट) में शामिल किया जा सकता है। शिक्षक और विद्यार्थी विभिन्न पहेलियों और कहानी की किताबों के दामों की सूची देख सकते हैं और ज़रूरी वस्तु को चुन सकते हैं। क्या सभी सामग्रियों को ख़रीदना ज़रूरी है या कुछ चीज़ें सेकंड-हैंड भी ख़रीदी जा सकती हैं। आवश्यकता और इच्छा (अभिलाषा) पर चर्चा करें, पुनः उपयोग की ज़रूरत और लागत में कमी पर ज़ोर दें।

जिन स्कूल आउटिंग या मेले जाने में पैसा शामिल होता है उनसे सवाल बनाने के कई अवसर पैदा होते हैं।

पैसों के बारे में विद्यार्थियों की अवधारणात्मक समझ बढ़ाने के लिए इस विषय को आगे ले जाने के लिए शिक्षक बच्चों के इन सभी अनुभवों का उपयोग कर सकते हैं। यह विषय अकसर 100 और 1000 के संख्या कार्य के साथ जोड़कर पढ़ाया जाता है।

शिक्षकों के लिए टीप

कुछ मुद्राओं, जैसे ₹200 और ₹500, से विद्यार्थियों को तभी परिचित कराया जाना चाहिए जब उन संख्याओं से सम्बन्धित अध्यायों को पढ़ाया जा चुका हो। पारम्परिक रूप से पैसे पर एक अलग अध्याय होता था, लेकिन अब इसे कक्षा-3 में अंकगणित के अध्याय के साथ मिला दिया गया है।

गतिविधि-1 : वास्तविक सिक्कों का वर्गीकरण

स्तर : कक्षा-2, 3

बेहतर होगा कि इस उद्देश्य के लिए असली सिक्कों का प्रयोग किया जाए जिससे बच्चे उसकी बनावट और वज़न महसूस कर सकें और रंगों के अन्तर पर भी ग़ौर कर सकें। विद्यार्थियों को उनकी पसन्द के अनुसार सिक्कों को वर्गीकृत करने के लिए कहें। वर्गीकरण कई तरीक़ों से किया जा सकता है : आकार, आकृति, चित्र, रंग या मूल्य के आधार पर।

सिक्कों की तस्वीरों का उपयोग करें और विद्यार्थियों को तस्वीरों के साथ सिक्कों का मिलान करने को कहें।

विद्यार्थियों को 'समान', 'अलग', 'एक ही समूह से सम्बन्धित हैं क्योंकि…' जैसे शब्दों और वाक्यांशों का उपयोग करने और कारण बताने के लिए प्रेरित करें।

उनसे सिक्कों को क्रमबद्ध रखने/ जमाने के लिए कहें। ऐसा सिक्कों के आकार, संख्या, अंकित वर्ष, मूल्य आदि के आधार पर किया जा सकता है।

गतिविधि-2 : विवरण

स्तर : कक्षा-2,3

हरेक विद्यार्थी एक सिक्का चुन सकता है (बेहतर होगा कि शुरुआत में भारतीय मुद्रा के साथ ही काम किया जाए और अलग-अलग आकार के कुछ पुराने सिक्कों को भी शामिल किया जाए)। विद्यार्थियों को सिक्के का रंग, आकार, गोल या सीधे किनारों और उसके दोनों पहलू (चित-पट) पर पाए जाने वाले चित्र (मोटिफ़) के बारे में वर्णन करने के लिए प्रेरित किया जाए। चित और पट (हेड और टेल) के अर्थ पर चर्चा की जाए।

विद्यार्थी सिक्कों की छाप उकेर (सिक्कों को एक काग़ज़ के नीचे रखकर काग़ज़ पर रंगीन पेंसिल से घिसकर) सकते हैं और पोस्टर बना सकते हैं।

टीप : ये महत्त्वपूर्ण है कि विद्यार्थी इन चीज़ों का अवलोकन करें।

1. कुछ सिक्के अब प्रयोग में नहीं लिए जाते हैं।
2. पुराने सिक्के अलग-अलग आकार के आते थे किन्तु अब सभी नए सिक्के केवल गोलाकार (वृत्ताकार) आते हैं। चर्चा कीजिए कि पहले के सिक्कों का अलग-अलग आकार होने का क्या कोई फ़ायदा था। आपको क्या लगता है कि अब सभी सिक्के गोलाकर क्यों आते हैं?
3. समान मूल्य/ मान के सिक्के अलग-अलग वर्ष में निर्मित होने के कारण अलग-अलग आकार के हो सकते हैं। ₹1 और ₹2 के सिक्के इसकी एक अच्छी मिसाल हैं।
4. अलग-अलग मूल्य के सिक्कों का आकार (साइज़) एक जैसा भी हो सकता है। जैसे ₹1 का पुराना सिक्का और ₹2 का नया सिक्का।

गतिविधि-3 : मुक्त खेल

स्तर : कक्षा-2, 3

सिक्कों के साथ खेलने के ज़्यादा-से-ज़्यादा मौक़े दें। इस उम्र के अधिकांश विद्यार्थी दुकान-दुकान खेलना बहुत पसन्द करते हैं। मेज़ पर कुछ चीज़ें रखकर (जैसे पेंसिल, स्केच पेन, क्रेयॉन्स, इरेज़र) विद्यार्थियों को कक्षा में दुकान जमाने दें। विद्यार्थियों में सिक्के (असली/ नक़ली) बाँट दें और उन पैसों से ख़रीददारी का खेल खेलने दें। सबसे अच्छा होगा कि उन्हें उत्पाद की क़ीमत निर्धारित करने और बिक्री के लिए वस्तुओं की मात्रा का अनुमान लगाने की स्वतंत्रता दी जाए। इसके बाद, किसी वस्तु की क़ीमत और कुछ वस्तुओं जैसे बिस्किट, टॉफ़ी, स्टेशनरी, कपड़े आदि की क़ीमतों पर विद्यार्थियों की जानकारी को लेकर चर्चा हो सकती है।

डिज़ाइन गतिविधि : विद्यार्थी सिक्कों को डिज़ाइन कर सकते हैं और ये चर्चा कर सकते हैं कि सिक्के का कौन-सा पहलू इसके मूल्य को दर्शाता है। ये उनके आकारों में भिन्नताओं, बड़े अंकों में मूल्य आदि के अवलोकनों में वृद्धि करेगा।

गतिविधि-4 : उद्देश्य : छाँटे गए सिक्कों का डाटा दर्ज करना

स्तर : कक्षा-2, 3

विद्यार्थियों को छाँटे गए सिक्कों के आँकड़ों को चित्रात्मक निरूपण के रूप में ग्राफ़ में प्रस्तुत करने के लिए प्रेरित किया जा सकता है। सिक्के असली लगें इसके लिए विद्यार्थी सिक्कों की छाप उकेर सकते हैं। सिक्कों पर जो अलग-अलग चित्र नज़र आते हैं, उनके बारे में चर्चा की जा सकती है।

विद्यार्थियों द्वारा अपनाई गई छाँटने की अलग-अलग कई विधियों के आधार पर कई ग्राफ़ बनाए जा सकते हैं।

सिक्का ग्राफ़

गतिविधि-5 : सिक्कों के ढेर के मूल्य को समझना

स्तर : कक्षा-2, 3

विद्यार्थी सिक्कों को छाँटकर उनकी ऐसी थप्पियाँ बना लें जिसमें समान मूल्य/ क़ीमत के सिक्के एक ही थप्पी में जमे हों। अब उनसे सवाल करें कि “यदि आपको इन सिक्कों का उपयोग करके कुछ खाने का सामान ख़रीदना हो तो आप किस थप्पी के सिक्के चुनेंगे?” विद्यार्थी जिस थप्पी को लेना चाहते है उन्हें उसे पहचानने दिया जाए।

सवाल पूछें :

1. आपने कौन-सी थप्पी चुनी और क्यों चुनी?
2. क्या किसी और ने कोई दूसरी थप्पी चुनी? यदि हाँ तो क्यों?
3. अपना निर्णय लेने के लिए आपने समस्या-समाधान की किस रणनीति का प्रयोग किया?

चर्चा के द्वारा इस बात को उभारें कि सिक्कों की संख्या सिक्कों की थप्पी के मूल्य को तय नहीं करती।

खेल-1 : मैं कौन हूँ?

एक विद्यार्थी से इस तरह एक सिक्के को चुनने के लिए बोलिए कि अन्य विद्यार्थियों को पता न चले। अब, बाक़ी अन्य विद्यार्थियों को उस विद्यार्थी से मात्र 3 सवाल पूछने दीजिए, सिक्का चुनने वाला विद्यार्थी जवाब सिर्फ़ 'हाँ' या 'न' में दे सकता है। उदाहरण के लिए, "क्या ये चाँदी का सिक्का है?" "क्या ये 5 से छोटा है?"

विद्यार्थियों को सभी जवाब सुनने के बाद उस विद्यार्थी ने कौन-सा सिक्का चुना था यह तय करने की कोशिश करनी चाहिए।

गतिविधि-6 : मुद्रा (करेंसी) नोटों के अंकित मूल्य से परिचित होना — स्तर : कक्षा-2, 3

देश में इस समय उपयोग हो रहे सभी सम्भव मूल्य के सिक्कों और करेंसी नोटों (खेलने वाले नक़ली नोट) का प्रयोग करें। कृपया ध्यान दें कि मूल्य की समानता (equivalence of value) के सन्दर्भ में विभिन्न मूल्यों के बीच सम्बन्ध (जैसे 10 के 2 नोट का मूल्य भी एक 20 के नोट के मूल्य के बराबर है) आने वाले स्तर में आएँगे।

विद्यार्थियों को रुपया, रुपए शब्दों का प्रयोग करना चाहिए और उन्हें नोटों के बीच तुलना करते हुए उसका वर्णन करना चाहिए जैसे : "दस रुपए का नोट 100 रुपए के नोट से छोटा है।" "बीस रुपए के नोट का रंग नारंगी है।"

गतिविधि-7 : 100, 200, 500 रुपए के मूल्य की समझ पैदा करना — स्तर : कक्षा-3

बच्चों में बड़े नोटों के मूल्य की समझ तब विकसित होती है जब उन्हें उनकी पसन्दीदा वस्तु या खाद्य सामग्री में व्यक्त किया जाए।

एक डेयरी मिल्क चॉकलेट की क़ीमत ₹20 है।

- ₹100 में आप कितनी चॉकलेट ख़रीद सकते हैं?
- ₹200 में कितनी ख़रीद सकते हैं?
- ₹500 में कितनी ख़रीद सकते हैं?

गतिविधि-8 : छुट्टे या बँधे सिक्के/नोट लेना

स्तर : कक्षा-4

हम ये मानकर चल रहे हैं कि विद्यार्थी इसके पहले स्थानीय मान प्रणाली के साथ काम कर चुके हैं, जिसमें 10 इकाइयों (एक) को एक दहाई (10) में और 10 दहाइयों को एक सैकड़ा (100) में बदलने का काम शामिल है।

हालाँकि पैसे का प्रयोग विनिमय की अवधारणा को मज़बूत करने के लिए किया जा सकता है, किन्तु इस बात को ध्यान में रखना चाहिए कि एक 100 रुपए के करेंसी नोट के बदले में 100 रुपए की (कुछ) इकाइयाँ (सिक्के/ नोट) या एक 10 रुपए के सिक्के के बदले में 1 रुपए के 10 सिक्के लेना एक अमूर्त विचार है। 10 या 100 उस तरह नज़र नहीं आते जिस तरह स्थानीय मान सामग्रियों में दिखाई देते हैं। चूँकि रुपए-पैसे एक अनुपातहीन सामग्री है इसलिए स्थानीय मान सामग्री के लिए इसका उपयोग अनुपाती सामग्री से परिचय के बाद ही करना चाहिए।

लिखित में रिकॉर्ड करने के लिए कहे जाने से पहले विद्यार्थियों को विनिमय (लेन-देन) प्रक्रिया के साथ सहज होने और आत्मविश्वास अर्जित करने की ज़रूरत है।

उदाहरण के लिए एक सौ = 10 रुपए के दस नोट आदि।

हालाँकि, विद्यार्थियों को अपनी विचार प्रक्रिया को स्पष्ट रूप से व्यक्त करने के लिए प्रोत्साहित किया जा सकता है : "मेरे पास एक रुपए के 15 सिक्के हैं। मैं उनमें से 10 सिक्कों के बदले 10 रुपए का एक सिक्का ले सकता हूँ।"

अलग-अलग तरह के सवाल पूछें जिससे उनमें अन्य मूल्य का उपयोग करके समतुल्य मूल्य पता करने की क्षमता विकसित हो।

- मेरे पास एक 10 रुपए का नोट है। कौन-से दो सिक्के मिलकर इस मूल्य के बराबर होंगे?
- एक 50 रुपए के नोट के बराबर मूल्य के लिए 5 रुपए के कितने सिक्के लगेंगे?
- 2 रुपए के कितने सिक्के 10 रुपए के एक सिक्के के मूल्य के बराबर होंगे?
- 2 रुपए के कितने सिक्कों का मूल्य 5 रुपए के सिक्के के बराबर होगा?

गतिविधि-9 : समतुल्य योगों का पता लगाना
स्तर : कक्षा-4

बहुत सारे अभ्यास कार्य को गतिविधि के रूप में बनाया जा सकता है।

4 विद्यार्थियों का एक समूह बनाइए। एक व्यक्ति कोई दो चीज़ उठा सकता है, एक नोट और एक सिक्का या दो नोट या दो सिक्के। और बाक़ियों को मुद्राओं के ऐसे अलग-अलग संयोजन खोजने हैं जो उन दोनों के मूल्य के योग बराबर हों।

ऐसे प्रश्न पूछें जिनके विविध उत्तर हों।

लीला ने मेले से एक गुब्बारा ख़रीदा। उसने उसकी क़ीमत 6 सिक्कों को देकर चुकाई। गुब्बारे की क़ीमत कितनी हो सकती है? लीला ने सबसे ज़्यादा कितनी राशि चुकाई हो सकती है? लीला ने सबसे कम कितनी राशि चुकाई हो सकती है?

विद्यार्थी गुब्बारों की क़ीमत के बारे में अपनी जानकारी और उपलब्ध सिक्कों के मूल्य का उपयोग करके उपयुक्त उत्तर दे सकते हैं। इस प्रकार के प्रश्न कक्षा में अच्छी चर्चा का कारण बन सकते हैं।

खेल-2 : ₹500 का नोट किसे मिलेगा?

4 विद्यार्थियों का समूह बनाइए। सभी विद्यार्थी बारी-बारी से पाँसा फेकेंगे और उनमें जो संख्या आएगी उन्हें जोड़ेंगे। वे उस योग की 10 गुना राशि उठा सकते हैं। जैसे यदि योग 9 है तो उन्हें 9 दस के नोट मिलेंगे जो कुल मिलाकर ₹90 होंगे।

जब भी राशि ₹100 से ऊपर पहुँचेगी, तब वे 100 रुपए को 100-रुपए के नोट में बदल लेंगे। जो भी विद्यार्थी सबसे पहले ₹500 तक पहुँचेगा, वह विजेता होगा।

गतिविधि-10 : संचालन में पैसा, सही राशि का भुगतान
स्तर : कक्षा-4

सामग्री : खेलने वाले पैसे, प्राइस टैग के साथ कुछ वस्तुओं के चित्र या असली वस्तुएँ जैसे पेंसिल, स्केच पेन आदि।

कक्षा में (खेल-खेल की) दुकान बनाकर, जिसमें वस्तुओं पर उचित क़ीमत के टैग लगे हों, विद्यार्थी वस्तुओं को ख़रीदने-बेचने, भुगतान की जाने वाली राशि का अनुमान लगाने, बिल बनाने, दिए जाने वाली/ लिए जाने वाली बक़ाया राशि का पता लगाने जैसे कामों में शामिल हो सकते हैं। इसके लिए प्रत्येक विद्यार्थी को 500 रुपए का एक नोट मिलेगा।

सवाल पूछिए :

- आपने अभी तक कितने पैसे ख़र्च किए?
- आपके पास कितने पैसे बचे?
- 10 पेंसिलों को ख़रीदने के लिए आपको और कितने पैसों की ज़रूरत होगी?
- यदि आप दो पेन ख़रीदते हैं तो आप कितने पैसे ख़र्च कर चुके होंगे?
- आपके पास कितने पैसे बचेंगे?
- आपको कैसे पता?
- यदि पेन पर 'एक के साथ एक मुफ़्त' का ऑफ़र है तो ₹50 में आपको कितने पेन मिलेंगे।

यहाँ पर मन में गणना करने और जोड़-घटाने के सवालों को हल करने के लिए अलग-अलग तरीक़े अपनाने का अवसर विद्यार्थियों को मिलेगा। अकसर दुकानदारों द्वारा हिसाब के लिए 'आगे गिनना' तरीक़ा उपयोग किया जाता है। उदाहरण के

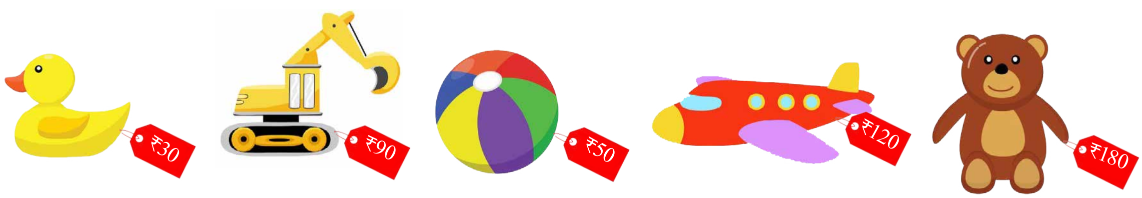
लिए, यदि किसी वस्तु की क़ीमत ₹78 है और ग्राहक ₹100 का नोट देता है, तो दुकानदार पहले ₹2 देंगे ताकि क़ीमत ₹80 हो जाए, फिर ₹10 के दो नोट या ₹ 20 का एक नोट देंगे ताकि कुल ₹100 हो जाए।

ऐसे सवाल पूछिए जो चुनाव के मौक़े देते हों।

यहाँ स्टेशनरी की चीज़ों की क़ीमत दी गई है। यदि आपको ₹100 रुपए दिए जाएँ और आप उन्हें पूरा-का-पूरा ख़र्च करना चाहें तो आप क्या-क्या ख़रीद सकते हैं?

ऐसे सवाल पूछिए जिनमें तुलना करने के मौक़े हों।

राहुल कहता है कि “मैंने मेले से दो चीज़ें ख़रीदीं, एक चीज़ की क़ीमत दूसरे से ₹90 ज़्यादा है।” राहुल ने इनमें से क्या ख़रीदा होगा?



उच्चतर कक्षाओं में लाभ-हानि की अवधारणा को भी सम्मिलित किया जा सकता है।

पर्याप्त भण्डारण (स्टॉक) बनाए रखना, उच्च दाम, सस्तेपन और पैसे की क़ीमत सम्बन्धी कई अवधारणाओं पर चर्चा की जा सकती है।

गतिविधि-11 : वास्तविक बाज़ार से परिचित कराना

स्तर : कक्षा-4, 5

विद्यार्थियों के माता-पिता जब किराना, सब्ज़ी और फल वग़ैरह ख़रीदने जाएँ तो विद्यार्थियों को उनके साथ जाने के लिए कहा जा सकता है। उन्हें इस दौरान ख़रीदी गई वस्तुओं और उनकी चुकाई गई क़ीमत की सूची बनाकर रखने के लिए कहा जा सकता है।

विद्यार्थी मोल–भाव, डिस्काउंट (दाम में छूट), वस्तु के साथ आने वाले उपहार, बड़े पैकेट को ख़रीदने पर होने वाले फ़ायदे आदि के बारे में जान-समझ सकते हैं।

इन सब पहलुओं पर कक्षा में चर्चा हो सकती है।

चर्चा से गणित से सम्बन्धित कई और विषय निकलकर आ सकते हैं, उदाहरण के लिए तराज़ू-बाँट आदि का उपयोग, उत्पादों का भण्डारण करने और ढेर लगाने (जमाने) के तरीक़े।

गतिविधि-12 : एक नोट को समझना

स्तर : कक्षा-5

विद्यार्थी 100 रुपए के एक असली नोट का सावधानीपूर्वक और बारीकी से अवलोकन कर सकते हैं। उन्हें उस नोट पर जो भी चित्र और लिखा हुआ नज़र आता है उसकी सूची बना सकते हैं।

- नोट पर कौन-सा चित्र दिखाई दिया? क्या वह कोई ऐतिहासिक इमारत है? उसके बारे में हम क्या जानते हैं?
- क्या नोट पर किसी व्यक्ति का चित्र है? वे कौन हैं?
- क्या कोई अन्य ऐतिहासिक कलाकृतियाँ हैं?
- क्या नोट पर कोई और डिज़ाइन है? क्या वे उस डिज़ाइन का वर्णन कर सकते हैं?
- नोट पर किस प्रकार की लिखावट है? नोट पर कौन-सी भाषा लिपियाँ दिखती हैं? क्या विद्यार्थी उन लिपियों को पहचान पाते हैं?
- क्या नोट पर कोई संख्याएँ हैं? कितने प्रकार की संख्याएँ हैं? इन संख्याओं का मतलब क्या है?
- क्या नोट पर नोट छपने का वर्ष लिखा है?
- नोट पर क्या वचन लिखा हुआ है? इस पर कौन हस्ताक्षर करता है?
- क्या नोट पर विशेष चिन्ह हैं?
- क्या 100, 200, 500 के नोट पर उभरी हुई आकृतियाँ हैं?

पता लगाइए : क्या प्रत्येक नोट पर यूनीक नम्बर (अद्वितीय संख्या) अंकित होता है? वाटरमार्क क्या है?

दूसरे देशों की मुद्राएँ क्या हैं?

गतिविधि-13 : पैसों के विकल्प, वस्तु विनिमय प्रणाली को समझना

स्तर : कक्षा-5

विद्यार्थियों ने इस बात पर भी ध्यान दिया होगा कि उनके माता-पिता दूसरे माध्यम से भी भुगतान करते हैं, डिजिटल तौर पर भी पैसे का हस्तान्तरण करते हैं।

उन्होंने भुगतान के और कितने तरीक़े देखे हैं इन तरीक़ों को साझा करने के लिए उन्हें प्रेरित करें। इन तरीक़ों का उपयोग किस तरह किया जाता है और इन तरीक़ों के लाभ क्या हैं, इस पर चर्चा करें।

चर्चा करें कि क्या कोई ऐसा समुदाय है जो मुद्रा का उपयोग नहीं करता और किस तरह वस्तु और सेवा को प्राप्त करता है।

गतिविधि-14 : मुद्रा के इतिहास को समझना
स्तर : कक्षा 5

कुछ सिक्के लाइए जो कुछ वर्षों पूर्व तक उपयोग/ चलन में थे (जैसे 10, 25 और 50 पैसे के सिक्के) और उनके बारे में बात कीजिए। ये अच्छा समय हो सकता है यह बात करने के लिए कि कोई पुराने समय में एक रुपए से क्या-क्या ख़रीद सकता था।

पहले के समय में (मान लीजिए 200 साल पहले) चलने वाले सिक्कों के बारे में जानकारी जुटाने में विद्यार्थियों की मदद कीजिए।

गतिविधि-15 : बैंकों को समझना
स्तर : कक्षा-5

एक स्थानीय बैंक की कार्यप्रणाली को समझने के लिए ट्रिप का आयोजन करें। विद्यार्थियों से वहाँ जाने के बारे में चर्चा करें और विद्यार्थियों से उनके द्वारा बैंक के अधिकारियों से पूछने वाले सवाल तैयार करवाएँ। विद्यार्थी इस सोच में पड़ सकते हैं कि :

"बैंक अपना पैसा कहाँ से प्राप्त करती है?"

"क्या बच्चों का बैंक में खाता हो सकता है?"

"एटीएम कैसे काम करता है?"

बैंक प्रबन्धक से पहले से ही बात कर लें ताकि उनकी बचत की अवधारणा, बैंक में पैसा रखने का उद्देश्य, अर्जित ब्याज, बैंक लोगों को ऋण आदि देने में किस प्रकार सहायता करते हैं आदि को सरल तरीक़े से समझाने की तैयारी रहे।

चर्चा करें कि लोग विभिन्न तरीक़ों से पैसा कैसे कमाते हैं और किस तरह बचाते हैं।

गतिविधि-16 : बजट योजना
स्तर : कक्षा-5

अधिकांश विद्यालय स्वतंत्रता दिवस या वार्षिक कार्यक्रम एक निश्चित बजट में ही सजावट करके और मिठाई ख़रीदकर मनाते हैं।

विद्यार्थियों को ऐसे आयोजनों की योजनाओं में शामिल करें; जैसे कितने व्यक्तियों की आने की सम्भावना है, मिठाई, चाय या जूस जैसे जलपान, स्ट्रीमर या गुब्बारे जैसी सजावट आदि की क़ीमत क्या होगी?

विद्यार्थियों को विभिन्न चीज़ों की सूची बनाने और उनके दाम पता करने के लिए प्रेरित करें।

क्या ये ख़र्च बजट से ज़्यादा हो रहा है? यदि हाँ तो उसे कैसे कम कर सकते हैं।

गतिविधि-17 : एक जन्मदिन समारोह

स्तर : कक्षा-5

जन्मदिन की पार्टी में क्या-क्या लगेगा (जैसे मिठाई, स्नैक्स, पेय, प्लेट, गिलास, सजावट) प्रत्येक विद्यार्थी उन वस्तुओं की एक सूची बना सकता है, आने वाले मेहमानों की संख्या की सूची बना सकता और ऐसी पार्टी के ख़र्च की गणना कर सकता है।

विद्यार्थी अपनी सूची समूहों में साझा कर सकते हैं।

चर्चा करें कि ऐसे किसी आयोजन को बिना किसी चीज़ को व्यर्थ किए किफ़ायती तरीक़े से कैसे मनाया जा सकता है। चर्चा करें कि लोग संसाधनों को कैसे साझा कर (मिल-बाँट) सकते हैं।

गतिविधि-18 : हिसाबी चुनाव करना

स्तर : कक्षा-5

जिन विद्यार्थियों ने किसी रेस्टोरेंट में खाना खाया हो या स्कूल की कैंटीन से कोई खाद्य पदार्थ ख़रीदा हो तो उनके अनुभवों का हवाला दिया जा सकता है।

स्नैक्स	क़ीमत (₹)
अदरक चाय	15.00
कॉफ़ी	20.00
दूध	15.00
दाल वड़ा	08.00
मेदू वड़ा	15.00
आलू वड़ा	08.00
मिर्च पकौड़ा	07.00
केला पकौड़ा	07.00

चर्चा करें कि उनके आस–पास मौजूद बड़े लोग ऑर्डर करने के लिए किस तरह खाने की चीज़ (डिश) चुनते हैं।

ग्राहक विभिन्न विकल्पों के बीच चुनाव करते हैं, जैसे कि एक नियत थाली वाला खाना या खाने की चीज़ों का अलग-अलग ऑर्डर करते हैं। कुछ आइटम्स ज़्यादा मात्रा में आते हैं और ये 2 या 3 लोगों के साथ साझा किए जाते हैं।

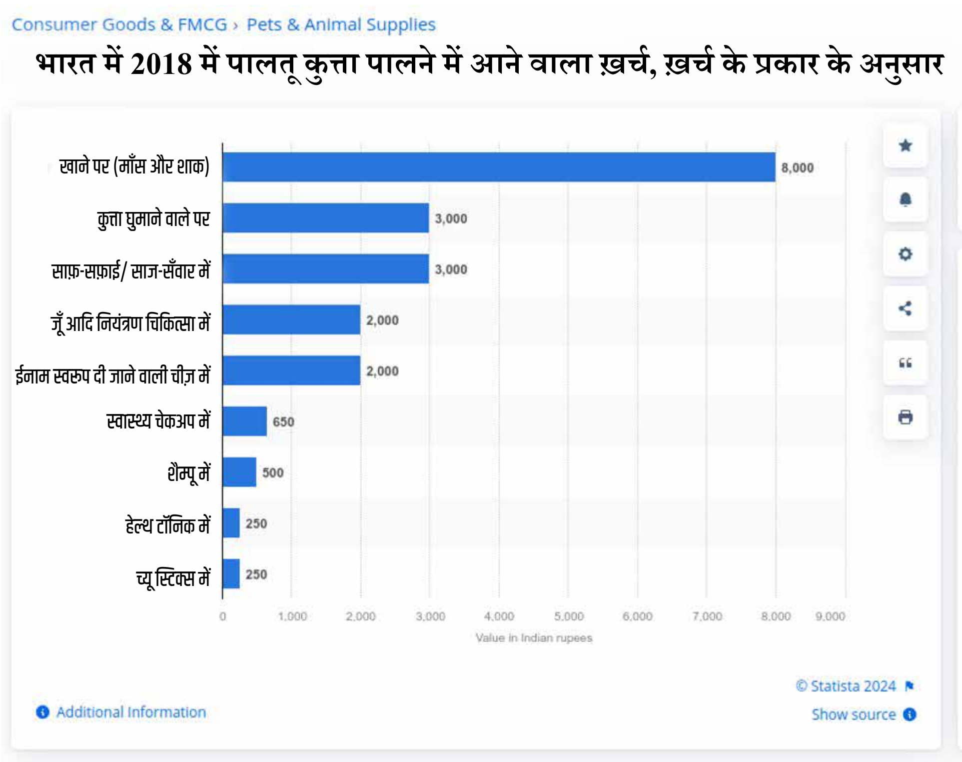
समस्या-समाधान : ऐसी समस्या निर्मित करें जो समस्या-समाधान करने के कौशल को विकसित करती हो।

- शिव और श्रवण ने ठीक 50 रुपए में 4 अलग-अलग आइटम्स ऑर्डर किए। उन्होंने क्या-क्या आइटम्स ऑर्डर किए होंगे?
- दीवा ने स्नैक शॉप से 2 अलग-अलग आइटम्स ख़रीदे, उसने हूबहू 2 नोट दिए और उसे ₹4 वापस मिले। उसने क्या ऑर्डर किया होगा?
- क्या हम स्नैक्स को ख़रीदने की बजाय घर पर बना सकते हैं?

प्रोजेक्ट : एक पालतू जानवर पालें

अधिकांश बच्चे उनके पास किसी पालतू पशु के होने को ख़ूब पसन्द करते है या उन्हें पालना चाहते हैं। विद्यार्थी इस बात का आकलन कर सकते हैं कि स्कूल में एक पालतू पशु को पालने में कितना ख़र्च आएगा?

शिक्षक पालतू पशु को रखने में आने वाले ख़र्चे के बारे में जानकारी जुटा सकते हैं।



https://www.statista.com/statistics/1031188/india-monthly-cost-pet-dogs/

भारतीय रिज़र्व बैंक द्वारा छापा गया सबसे बड़ा करेंसी नोट ₹10,000 का है।

भारतीय रिज़र्व बैंक द्वारा छापा गया अब तक का सबसे अधिक मूल्य का करेंसी नोट 10,000 का था जिसे ब्रिटिश राज में 1938 में छापा गया था। हालाँकि उस नोट को 1946 में बन्द कर दिया गया था, लेकिन इस नोट का एक नया संस्करण 1954 में फिर से आया था। 1978 में प्रधानमंत्री मोरारजी देसाई द्वारा 10,000 के साथ-साथ 1,000 और 5,000 के नोट भी बन्द कर दिए गए थे।

अधिक जानकारी के लिए हिन्दुस्तान टाइम्स पढ़ें।

आभार

स्वाती सरकार और स्नेहा टाइटस का उनके मूल्यवान सुझावों के लिए आभार।

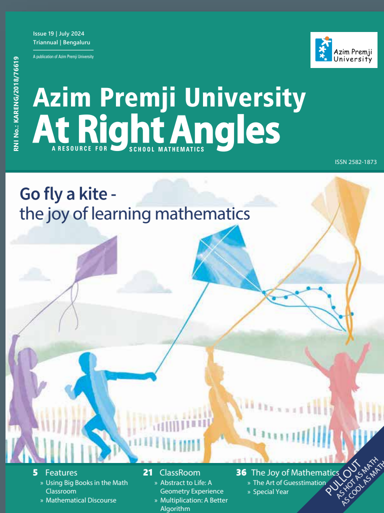

पद्मप्रिया शिराली

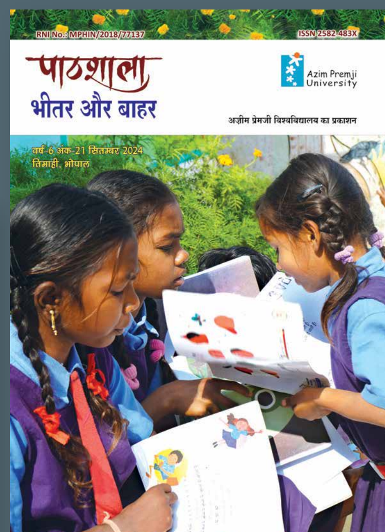
पद्मप्रिया शिराली सामुदायिक गणित केन्द्र का हिस्सा हैं, जो वैली स्कूल (बेंगलूरु) और ऋषि वैली (आन्ध्र प्रदेश) में स्थित है, जहाँ वे 1983 से विभिन्न विषयों – गणित, कम्प्यूटर एप्लिकेशन, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू – को पढ़ा रही हैं। 1990 के दशक में, उन्होंने स्वर्गीय श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ मिलकर काम किया। वे उस टीम का हिस्सा थीं जिसने ऋषि वैली ग्रामीण केन्द्र (ऋषि वैली रूरल सेंटर) के मल्टी ग्रेड प्रारम्भिक शिक्षा कार्यक्रम को बनाया, जिसे 'स्कूल इन ए बॉक्स' के नाम से जाना जाता है। वे वर्तमान में एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तक विकास समूह का हिस्सा हैं। पद्मप्रिया से padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

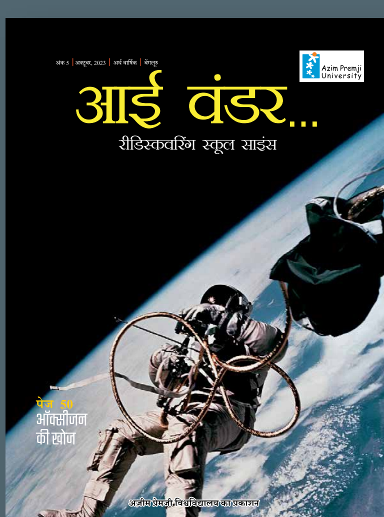
अनुवाद : प्रियेश गुप्ता **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

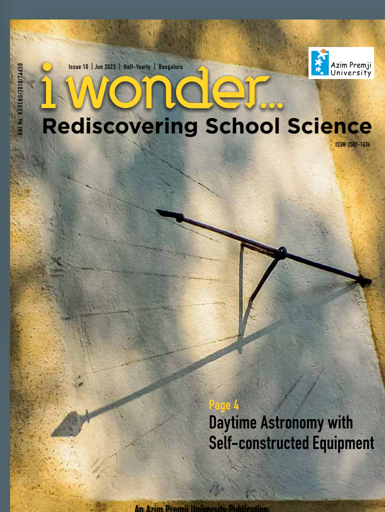
Azim Premji University

अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय की पत्रिकाएँ









अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी
एट राइट एंगल्स
स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

गणित और गणित शिक्षा पर एक गहन, गम्भीर पत्रिका।

शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों और विषय से जुड़े विद्यार्थियों के लिए।

इस पत्रिका में, शिक्षक :

- कक्षा में या अन्यत्र उपयोग के लिए संसाधनों तक पहुँच सकते हैं
- ऐसे गणितीय विषयों के बारे में भी पढ़ सकते हैं, जो सम्भवतः नियमित स्कूली पाठ्यक्रम में नहीं होते हैं
- अपने स्वयं के लिखे लेख भेज सकते हैं
- पत्रिका के माध्यम से अन्य लोगों के साथ बातचीत कर सकते हैं, और अपनी अनसुलझी समस्याओं को हल कर सकते हैं
- अपने मूल अवलोकन और खोजों को साझा कर सकते हैं
- स्कूल स्तर के गणित के विभिन्न पहलुओं के बारे में लिख सकते हैं और चर्चा कर सकते हैं।

प्रकाशक :

अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय

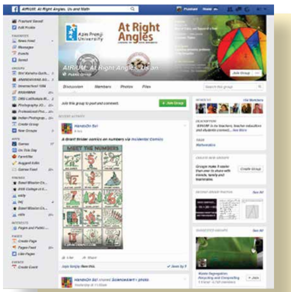
आप एट राइट एंगल्स यहाँ से प्राप्त कर सकते हैं :

निःशुल्क सदस्यता लें

https://azimpremjiuniversity.edu.in/at-right-angles

इस लिंक पर एट राइट एंगल्स के हाई-रेज और लो-रेज संस्करण निःशुल्क डाउनलोड के लिए उपलब्ध हैं। अलग-अलग लेख भी नीचे दी गई लिंक से डाउनलोड किए जा सकते हैं

https://bit.ly/AtRightAnglesrepositor



फेसबुक पर

https://www.facebook.com/groups/829467740417717/

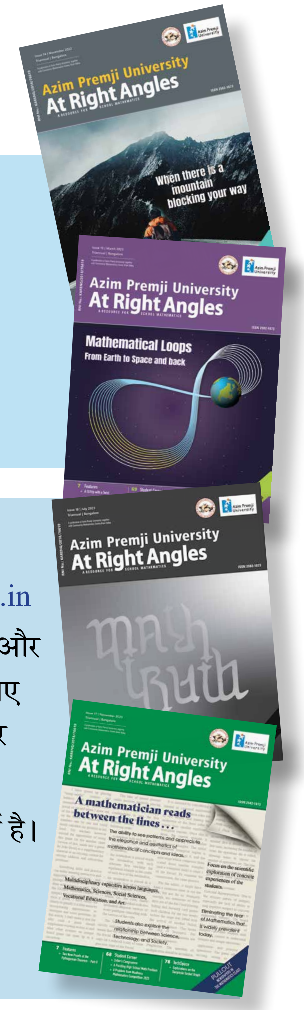
AtRiUM (एट राइट एंगल्स, अस एंड मैथ) पत्रिका का फेसबुक पेज है। यह ई-स्पेस में हमारे पाठकों को जोड़ने के लिए एक मंच के रूप में कार्य करता है। शिक्षक, विद्यार्थी, शिक्षक-प्रशिक्षक, भाषाविद् और शिक्षाशास्त्र के विशेषज्ञ इस समुदाय का हिस्सा हैं, इस कारण से इसकी पोस्ट में विविधता है और चर्चाएँ भी गम्भीर और गहन होती हैं।

ई-मेल पर

AtRightAngles.editor@apu.edu.in

हम इस ईमेल आईडी पर आपके लेखों और राय का स्वागत करते हैं। लेख भेजने लिए नीति और दिशा-निर्देश पत्रिका के अन्दर दिए गए हैं।

आपकी प्रतिक्रिया हमारे लिए महत्त्वपूर्ण है। हमें अवश्य लिखें।



Azim Premji University
Survey No. 66, Burugunte Village,
Bikkanahalli Main Road, Sarjapura
Bengaluru – 562125

azimpremjiuniversity.edu.in

Facebook: /azimpremjiuniversity Instagram: @azimpremjiuniv X: @azimpremjiuniv