भिन्न के साथ मज़ा

तेजस श्रीराम

यह लेख मूल रूप से एक ऑनलाइन गणितीय स्रोत, NRICH, पर प्रस्तुत की गई समस्या से प्रेरित है। विचार वाटिका के तत्वावधान में आयोजित किए गए 'गणित मन्थन' नामक कोर्स में भाग लेते हुए, एक समस्या ने मेरा ध्यान आकर्षित किया। यहाँ आगे, मैंने मूल समस्या(ओं) का जवाब दिया है और उस समस्या के स्वाभाविक विस्तार के बारे में खोजबीन की है, जहाँ मुझे कुछ पैटर्न मिले और मैंने उन्हें सिद्ध किया।

आइए हम निम्नलिखित सरल नियमों का उपयोग करके "मज़ेदार भिन्नों" को परिभाषित करें :

- नियम-1 : $\frac{1}{2}$ एक मज़ेदार भिन्न है।
- नियम-2 : यदि $\frac{p}{q}$ एक मज़ेदार भिन्न है, तो $\frac{p}{p+q}$ भी एक मज़ेदार भिन्न है।
- नियम-3 : यदि $\frac{p}{q}$ एक मज़ेदार भिन्न है, तो $\frac{q}{p+q}$ भी एक मज़ेदार भिन्न है।

इसका अर्थ यह है कि हम मज़ेदार भिन्न $\frac{1}{2}$ से शुरू कर सकते हैं और नियम-2 और नियम-3 को बार-बार लागू करके अन्य सभी मज़ेदार भिन्न बना सकते हैं। जब नियम-2 लागू किया जाता है तो एक लाल तीर खींचकर और जब नियम-3 लागू किया जाता है तो एक नीला तीर खींचकर हम नियम-2 और 3 को लागू करने की प्रक्रियाओं को दृश्य रूप से दिखा सकते हैं।

मान लीजिए कि $\frac{p}{q}$ एक मज़ेदार भिन्न है। $\frac{p}{q}$ पर नियम-2 और नियम 3 लागू करके, हमें निम्नलिखित समीकरण मिलता है :

$$\begin{tikzcd} & \frac{p}{q} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \frac{p}{p+q} & & \frac{q}{p+q} \end{tikzcd}$$

उदाहरण के लिए, $\frac{1}{2}$ पर नियम-2 और नियम-3 को लागू करने को इस प्रकार दर्शाया जा सकता है :

$$\begin{tikzcd} & \frac{1}{2} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} \end{tikzcd}$$

इस शाखा को एक और स्तर तक बढ़ाते हुए इस प्रकार देखा जा सकता है :

$$\begin{tikzcd} & & & \frac{1}{2} \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\ & \frac{1}{3} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \frac{2}{3} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \frac{1}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} \end{tikzcd}$$

की-वर्ड : समस्या समाधान, समस्या उठाना, पैटर्न, फ़िबोनाची

इससे पता चलता है कि प्रत्येक मज़ेदार भिन्न शाखाओं में बँटकर दो नए मज़ेदार भिन्न बना देती है।

गतिविधि : *शाखाओं को अगले दो स्तरों तक विस्तार दें। आपके अवलोकन क्या हैं?*

इसके बाद, आइए कुछ स्वाभाविक प्रश्नों का पता लगाएँ जिनका उल्लेख NRICH वेबपेज पर भी किया गया है। पाठकों से आग्रह है कि समाधानों की जाँच करने से पहले इन्हें हल करने का प्रयास करें :

1. सबसे बड़ी/ छोटी मज़ेदार भिन्न कौन-सी है?
2. सबसे बड़ा/ छोटा अंश कौन-सा है?
3. क्या यह सही है कि अंश घटते क्रम में नहीं होते?
4. ऐसा लगता है कि एक मज़ेदार भिन्न के अंश और हर में 1 को छोड़कर कोई उभयनिष्ठ भाजक नहीं होता है। क्या यह हमेशा सही होता है?
5. क्या भिन्नों का एक बन्द फन्दा बनाना सम्भव है, जहाँ परिवर्तनों का एक क्रम आपको प्रारम्भिक बिन्दु पर वापस ले आए?

अब, मैं पाठकों को उपरोक्त समस्याओं को हल करने की अपनी यात्रा पर ले जाना चाहूँगा। सबसे पहले हम एक संकेतन प्रस्तुत करते हैं : चूँकि प्रत्येक चरण में केवल दो सम्भावनाएँ हैं, इसलिए हम नीचे वर्णित संकेतन का उपयोग करके प्रत्येक मज़ेदार भिन्न को दर्शा सकते हैं।

- नियम-1 द्वारा उत्पन्न मज़ेदार भिन्न को प्रतीक A द्वारा दर्शाया गया है।
- नियम-2 द्वारा उत्पन्न एक मज़ेदार भिन्न को प्रतीक B द्वारा दर्शाया गया है और
- नियम-3 द्वारा उत्पन्न एक मज़ेदार भिन्न को प्रतीक C द्वारा दर्शाया गया है।

इसका मतलब है कि $\frac{1}{2}$ को A के रूप में दर्शाया गया है और किसी भी अन्य मज़ेदार भिन्न को A से शुरू होने वाली शृंखला के रूप में दर्शाया जा सकता है और उसके बाद Bs और/ या Cs का द्विआधारी संयोजन आ सकता है।

उदाहरण के लिए, ABCB मज़ेदार भिन्न $\frac{3}{7}$ को प्रस्तुत करता है, क्योंकि

$$\underset{A}{\frac{1}{2}} \xrightarrow[B]{} \frac{1}{3} \xrightarrow[C]{} \frac{3}{4} \xrightarrow[B]{} \frac{3}{7}$$

समाधान

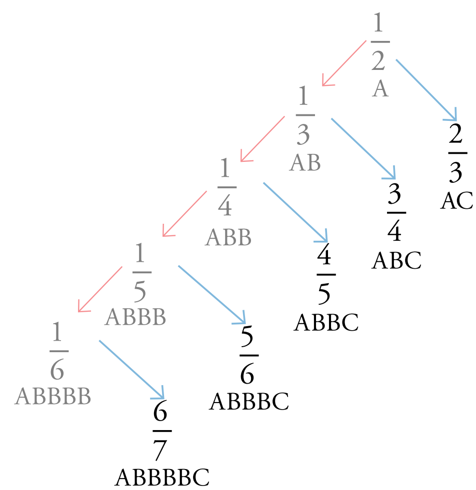
1. चूँकि $\frac{1}{2}$ धनात्मक है, इसलिए हर दूसरी मज़ेदार भिन्न धनात्मक होनी चाहिए। साथ ही, चूँकि प्रत्येक मज़ेदार भिन्न का हर, अंश से बड़ा होता है, इसलिए प्रत्येक मज़ेदार भिन्न 1 से छोटा होना चाहिए।

   अब आइए A, AB, ABB, ABBB, ABBBB, इत्यादि के रूप के मज़ेदार भिन्नों को देखें। इसका मतलब है कि हम नियम-2 को $\frac{1}{2}$ पर बार-बार लागू कर रहे हैं। दृश्य रूप में इसका मतलब सबसे बाईं शाखा है :

$$\underset{A}{\frac{1}{2}} \to \underset{AB}{\frac{1}{3}} \to \underset{ABB}{\frac{1}{4}} \to \underset{ABBB}{\frac{1}{5}} \to \underset{ABBBB}{\frac{1}{6}}$$

किसी भी प्राकृतिक संख्या n का व्युतक्रम $\frac{1}{n}$ इस शाखा में होना चाहिए। इस प्रकार, इस शाखा में प्रविष्टियाँ छोटी होती रहती हैं और कभी समाप्त नहीं होती हैं। इसका मतलब है कि कोई सबसे छोटी मज़ेदार भिन्न सम्भव नहीं है।

आइए अब हम AC, ABC, ABBC, ABBBC, ABBBBC इत्यादि रूपों की मज़ेदार भिन्नों को देखें। इसका मतलब है $\frac{1}{2}$ पर नियम-2 को बार-बार लागू करना और फिर अन्त में *एक बार* नियम-3 को लागू करना। दृश्य रूप से, इसका मतलब है 'दूसरी' सबसे बाईं शाखा :



इस शाखा में प्रत्येक प्राकृतिक संख्या $n > 1$ के लिए $\frac{n}{n+1}$ के रूप के मज़ेदार भिन्न हैं। इसलिए यह मज़ेदार भिन्नों का एक बढ़ता हुआ क्रम है जो कभी समाप्त नहीं होता। इसका मतलब है कि कोई सबसे बड़ी मज़ेदार भिन्न सम्भव नहीं है।

2. सबसे छोटा अंश स्पष्ट रूप से 1 है, जो $\frac{1}{2}$ का अंश है। हालाँकि, जैसा कि हमने समाधान-1 में देखा, $\frac{n}{n+1}$ प्रत्येक प्राकृतिक संख्या n के लिए एक मज़ेदार भिन्न है। इसलिए कोई भी सबसे बड़ा अंश सम्भव नहीं हो सकता है।

3. हाँ, चूँकि नियम-2 अंशों को बनाए रखता है और नियम-3 अंशों को बढ़ाता है, इसलिए अंश कभी घट नहीं सकते। लेकिन क्या होगा यदि हम किसी स्तर पर अंश और हर के बीच एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड को निरस्त कर सकें? अगला समाधान कहता है कि यह सम्भव नहीं है।

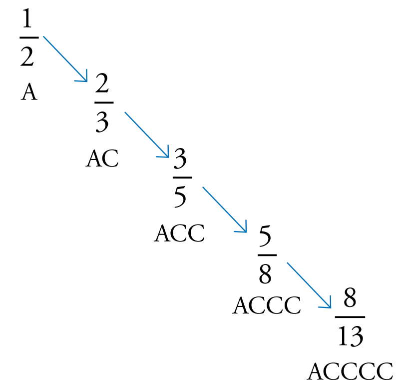
4. मान लीजिए $\frac{p}{q}$ एक मज़ेदार भिन्न है। नियम-2 या नियम-3 लागू करने पर, हमें क्रमशः भिन्न $\frac{p}{p+q}$ या $\frac{q}{p+q}$ प्राप्त होते हैं। आइए हम इन तीन भिन्नों के बीच अंशों और हरों के उभयनिष्ठ गुणनखण्डों की तुलना करने का प्रयास करें।

   मान लीजिए कि d, p और q दोनों का एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। तब स्पष्ट रूप से d को $p + q$ को विभाजित करना चाहिए। इसी प्रकार, मान लीजिए कि d, p और $p + q$ *दोनों* का एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है, तो d को $q = (p + q) - p$ को भी विभाजित करना चाहिए। इसका मतलब है कि p, q और $p + q$ के उभयनिष्ठ गुणनखण्डों की सूची बिल्कुल समान है।

   स्पष्ट रूप से, पहली मज़ेदार भिन्न $\frac{1}{2}$ के लिए, अंश और हर के बीच केवल एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है, अर्थात 1। इसलिए हर दूसरी मज़ेदार भिन्न $\frac{p}{q}$ के लिए, अंश p और हर q का एकमात्र उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 1 ही है।

5. नियम-2 और 3 दोनों ही हरों को बढ़ाते हैं। इसलिए बन्द फन्दा प्राप्त करने का एकमात्र तरीक़ा छोटे अंश और हर प्राप्त करने के लिए मज़ेदार भिन्न में उभयनिष्ठ गुणनखण्डों को निरस्त करना है। हालाँकि, समाधान-4 के अनुसार, यह सम्भव नहीं है। इसलिए कोई फन्दा नहीं बनता।

मैंने एक और दिलचस्प बात देखी। आइए सबसे दाईं शाखा को देखें, जिसकी प्रविष्टियाँ A, AC, ACC, ACCC, ACCCC इत्यादि के रूप में हैं।



ध्यान दें कि इन भिन्नों को निम्नानुसार पुनरावर्ती रूप से परिभाषित किया जा सकता है और हमें फ़िबोनाची संख्याओं की याद आनी चाहिए। मान लें कि प्रत्येक प्राकृतिक संख्या m के लिए

$$F_1 = 1$$

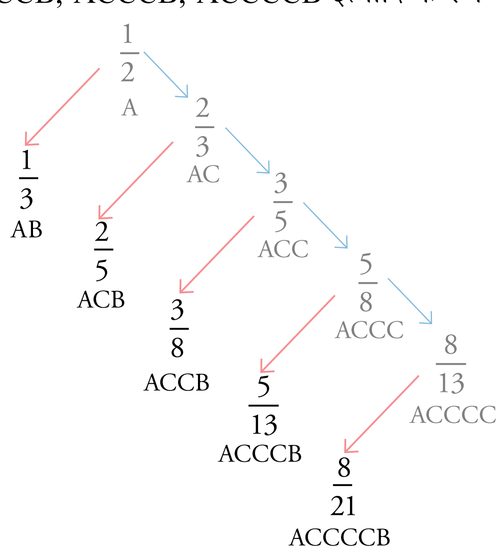
$$F_2 = 2$$

$$F_{m+2} = F_{m+1} + F_m \text{ है।}$$

स्पष्ट रूप से, ACCC…CCC के रूप का कोई भी मज़ेदार भिन्न $\frac{F_{m+1}}{F_{m+2}}$ के अलावा कुछ नहीं हो सकता, जहाँ m अन्त में दिखाई देने वाले C की संख्या है। जैसा कि हम पहले ही दिखा चुके हैं, इसका मतलब है कि क्रमानुगत फ़िबोनाची संख्याओं के बीच 1 के अलावा कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं हैं।

मैंने यह भी देखा कि यदि हम हर F_{m+2} को अंश F_{m+1} से भाग दें, तो हमें हमेशा शेष F_m प्राप्त होता है। ऐसा इसलिए है क्योंकि $F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$। फिर मैंने कुछ और दिलचस्प बात देखीं। यह ACCC…CCCBBB…BBB के रूप वाले मज़ेदार भिन्नों के लिए भी सही है, जहाँ C बीच में m बार और B अन्त में k बार दिखाई देता है।

उदाहरण के लिए, AB, ACB, ACCB, ACCCB, ACCCCB इत्यादि के रूप वाले मज़ेदार भिन्न इस प्रकार दिखाई देती हैं :



आइए देखें कि यह क्यों सत्य है। मान लें कि $\frac{p}{q}$ ACCC…CCCBBB…BBB रूप की एक भिन्न है, जहाँ बीच में C, m बार दिखाई देता है और B अन्त में k बार दिखाई देता है। दूसरे शब्दों में, $\frac{p}{q}$ पहले, नियम-3 को लगातार m बार लागू करके और फिर नियम-2 को बार-बार लागू करके $\frac{1}{2}$ से $\frac{p}{q}$ प्राप्त किया जाता है। इसलिए $\frac{p}{q}$ को नियम-2 को k बार लागू करके $\frac{F_{m+1}}{F_{m+2}}$ से प्राप्त किया जाएगा। इसलिए हमारे पास होना चाहिए

$$\frac{p}{q} = \frac{F_{m+1}}{F_{m+2} + k(F_{m+1})}$$

इसलिए यदि हम हर q को अंश p से भाग दें, तो हमें भागफल के रूप में $k + 1$ तथा शेष के रूप में F_m प्राप्त होना चाहिए। इसलिए हमने जो सिद्ध किया है वह निम्नलिखित प्रमेय है।

प्रमेय। मान लें कि $\frac{p}{q}$ एक मज़ेदार भिन्न है जिसे नियम-3 को m बार लागू करके और फिर नियम-2 को k बार लागू करके $\frac{1}{2}$ से प्राप्त किया जाता है, फिर यदि हम q को p से विभाजित करते हैं, तो शेष हमेशा F_m होता है जिसे निम्न रूप में परिभाषित किया जाता है :

$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 2$$
$$F_{m+2} = F_m + F_{m+1}$$

सम्पादकीय टिप्पणी

इस लेख में प्रस्तुत की गई समस्याएँ स्वाभाविक रूप से अनेक भिन्नताओं और दिलचस्प नए प्रश्नों को जन्म देती हैं। उदाहरण के लिए, क्या होगा यदि आरम्भिक मज़ेदार भिन्न $\frac{1}{2}$ से $\frac{p}{q}$ भिन्न हो? क्या प्रत्येक भिन्न अपने घटे हुए रूप में उपरोक्त वृक्ष में दिखाई देती है? इन समस्याओं को 9 से 16 वर्ष की आयु के विद्यार्थियों के अनुकूल बनाया जा सकता है, जिससे उन्हें भिन्न की संक्रियाओं का अभ्यास करने, पैटर्न की पहचान करने और अपने निष्कर्षों को सही ठहराने के अवसर मिलते हैं। शिवरामन (2021) ने *एट राइट एंगल्स* के जुलाई 2021 के अंक में इससे सम्बन्धित एक अन्य रूप के बारे में खोजबीन की थी, जिसे पढ़ने के लिए हम पाठकों को प्रोत्साहित करते हैं।

References

1. Sivaraman, R. (2021, July). Tremendous tree. *At Right Angles*, (10), 17-22. http://publications.azimpremjifoundation.org/2786/1/02_Sivaraman_TremendousTree.pdf

तेजस श्रीराम 11 साल के हैं और उन्हें गणित, भौतिकी और साहित्य में गहरी दिलचस्पी है। वे नेशनल पब्लिक स्कूल, इन्दिरानगर, बेंगलूरु के छात्र हैं। वे वर्ल्ड साइंस फ़ेस्टिवल के जूनियर वर्ल्ड साइंस स्कॉलरशिप प्रोग्राम और रेज़िंग ए मैथेमेटिशियन फ़ाउण्डेशन के एप्सिलॉन इंडिया जैसे प्रतिष्ठित गणित और विज्ञान कार्यक्रमों का हिस्सा रहे हैं। उनसे tejas.sriram1201@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : निशान्त राणा **पुनरीक्षण :** भरत त्रिपाठी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय