वर्गमूल के सवाल का सामान्यीकरण

गौरी घोरमाड़े

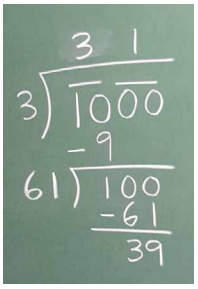
लेखिका ने एक कक्षा अवलोकन के अपने अनुभव का वर्णन किया है जहाँ वर्गमूल सम्बन्धित सवाल को हल करने के लिए एक चित्रात्मक विधि का उपयोग किया गया था। इस लेख में वे इस विधि को एक क़दम आगे बढ़ाकर, सामान्यीकृत करने का प्रयास कर रही हैं।

छत्तीसगढ़ के धमतरी में स्थित अज़ीम प्रेमजी स्कूल में, मैंने कक्षा-8 की गणित की कक्षा देखी, जहाँ शिक्षक ने वर्गमूल सिखाने के लिए एक नए तरीक़े का उपयोग किया था। उन्होंने वर्गमूल के सवाल को हल करने के लिए एक चित्रात्मक विधि अपनाई थी, जो पारम्परिक तरीक़ों से भिन्न थी। इस लेख में, मैं इस चित्रात्मक तरीक़े और पारम्परिक विधि के बीच एक सम्बन्ध स्थापित करने का प्रयास करते हुए, इस विधि को सामान्यीकृत करने का प्रयास कर रही हूँ।

शिक्षक ने पाठ की शुरुआत निम्नलिखित सवाल से की :

मैंने 1000 पौधे ख़रीदे हैं। अब उन्हें आयताकार जमावट में इस तरह लगाना है कि पंक्तियों और स्तम्भों की संख्या बराबर हो। यदि मुझे ऐसा करना हो, तो उक्त शर्त को पूरा करने के लिए मुझे और कितने पौधों की आवश्यकता होगी?

आइए देखें कि हम इस सवाल को पारम्परिक तरीक़े से कैसे हल करते। इस सवाल से संकेत मिलता है कि हमें सबसे बड़ी 3-अंकीय संख्या के बाद वाली अगली वर्ग संख्या का पता लगाना है। पंक्तियों और स्तम्भों की संख्या समान होना यह दर्शाता है कि हम वर्ग संख्याओं के बारे में बात कर रहे हैं। पर सबसे बड़ी 3-अंकीय संख्या क्यों? जब इस सवाल को दीर्घ (लम्बी) विभाजन विधि से हल करते हैं, तो हम पाते हैं कि इसका उत्तर 1000 से कम सबसे बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल होगा, जो सबसे बड़ा 3-अंकीय पूर्ण वर्ग होगा। इस सवाल के तर्क के अनुसार, हमें सबसे बड़ी 3-अंकीय वर्ग संख्या के बाद की अगली वर्ग संख्या खोजनी है, जो सबसे छोटी 4-अंकीय वर्ग संख्या होगी। यदि इस संख्या में से 1000 घटा दिया जाए, तो हमें आवश्यक पौधों की संख्या मिल जाएगी।



चित्र-1

चित्र-1 में 1000 का वर्गमूल पता करने के लिए दीर्घ (लम्बी) विभाजन विधि दिखाई गई है। यहाँ यदि हम 32 का वर्ग लें और उसमें से 1000 घटाएँ तो हमें उत्तर मिल जाएगा। इसलिए, उत्तर 24 होगा।

अब, हम 1000 को N और 31 को m मानकर इस विधि को सामान्यीकृत करने का प्रयास करते हैं।

तब इस समीकरण को $(m+1)^2 - N$ =आवश्यक पौधों की संख्या के रूप में लिखा जा सकता है।

ध्यान दें कि यहाँ दीर्घ (लम्बी) विभाजन विधि के बाद दो 2-अंकीय संख्याओं का गुणा करना आवश्यक होता है।

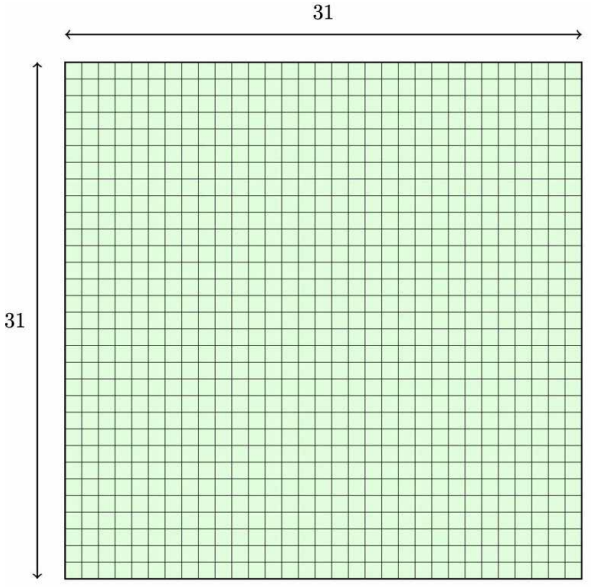
कक्षा में इस सवाल को हल करने से पहले, विद्यार्थियों को सबसे बड़ी या सबसे छोटी 3 या 4-अंकीय वर्ग संख्याओं की पहचान करने जैसे सवालों को हल करने

की-वर्ड : *वर्ग, वर्गमूल, इबारती सवाल, सवालों के चित्रात्मक हल*

का पर्याप्त अभ्यास कराया गया था। कक्षा के अधिकांश विद्यार्थियों ने इस सवाल को वर्गमूल निकालने की दीर्घ (लम्बी) विभाजन विधि का उपयोग करके हल करने का प्रयास किया और उनमें से कुछ इसे हल करने में सफल भी रहे।

हालाँकि, शिक्षक ने इसे समझाने के लिए ठीक इस तरीक़े का उपयोग तो नहीं किया, जिसमें सबसे बड़ी 3-अंकीय वर्ग संख्या और सबसे छोटी 4-अंकीय वर्ग संख्या शामिल हो।

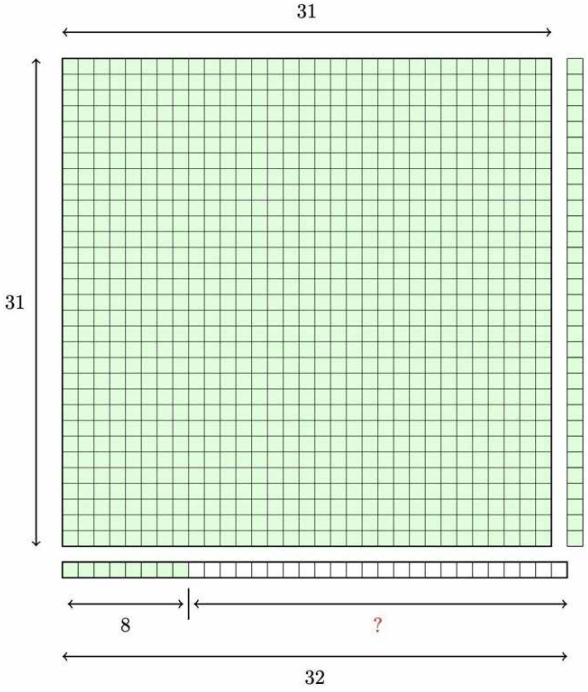
इसकी बजाय, उन्होंने **चित्र-2** के समान एक आरेख बनाया और कहा कि 1000 पौधों को जमाकर केवल 31 गुणा 31 का एक वर्ग बनाया जा सकता है और जिसमें से कुछ पौधे बच जाएँगे, जो शेषफल के बराबर होंगे। जिन्हें दोनों भुजाओं पर और जमाया जा सकता है। इससे विद्यार्थियों को 32 का वर्ग पता करने का संकेत मिलेगा जो कि पौधों की कुल संख्या होगी और इसमें से 1000 घटाने पर ख़रीदे जाने वाले पौधों की संख्या मिल जाएगी। अब इस चित्रात्मक तरीक़े को इस सवाल का उत्तर खोजने के लिए बढ़ाया जा सकता है जिससे हमें 32 का वर्ग ज्ञात करने की आवश्यकता नहीं होगी।



चित्र-2

माना कि हमारे पास पौधों की संख्या N है, जो कि एक पूर्ण वर्ग नहीं है और N से छोटा सबसे बड़ा पूर्ण वर्ग m^2 है। अब m गुणा m के वर्ग में पौधों को जमाने के बाद, शेष पौधों की संख्या $N - m^2$ होगी। याद करें कि पिछले सवाल में यह कैसे किया गया था, $1000 - 31^2 = 39$, जो कि दीर्घ (लम्बी) विभाजन विधि में शेषफल के रूप में प्राप्त हुआ था।

अब इन बचे हुए पौधों में से m पौधे किसी एक भुजा पर जमाए जा सकते हैं। इस प्रकार, इन्हें जमाने के बाद हमारे पास अब $N - m^2$ पौधे बचे रहेंगे। यानी, पिछले सवाल में $(1000 - 31^2) - 31 = 39 - 31 = 8$ पौधे बचे थे। याद कीजिए कि वर्ग की दूसरी भुजा पर $39 - 31 = 8$ पौधे लगाए गए थे। **चित्र-3** देखें।



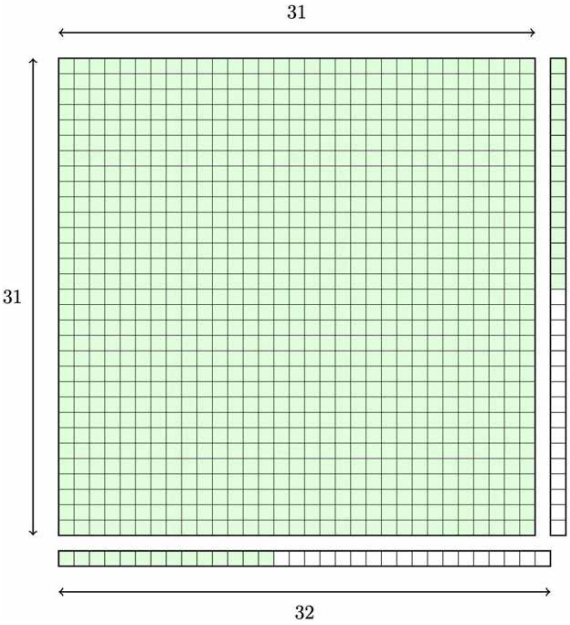
चित्र-3

लेकिन ध्यान दीजिए कि दूसरी भुजा पर कुल मिलाकर $m + 1$ इकाइयाँ हैं। इसलिए हमें $(m + 1) - [(N - m^2) - m]$ पौधे ख़रीदने की ज़रूरत है। पिछले उदाहरण में हमने देखा कि, हमें $(31+1) - 8 = 24$ पौधे ख़रीदने होंगे।

हालाँकि, अगर हम 1000 की बजाय 990 पौधों से शुरू करते, तो हमारा यह तर्क काम नहीं करेगा। ऐसा इसलिए है क्योंकि तब $(N - m^2) - m < m$ हो जाता, जिसका अर्थ है कि हम दोनों भुजाओं में से किसी एक को पूरा नहीं भर सकेंगे। इसे हल करने के लिए पौधों को पहले एक ही भुजा पर लगाने की बजाय, हम दोनों भुजाओं पर एक-एक करके पौधे लगा सकते हैं (**चित्र-4** देखें)।

सामान्य रूप से, इसका अर्थ है कि हमारे पास वर्ग की दोनों भुजाओं पर $m + m + 1 = 2m + 1$ स्थान (स्लॉट) हैं। यदि हम शेष $(N - m^2)$ पौधों का उपयोग करके इन स्थानों को भरते हैं, तो ख़रीदे जाने वाले आवश्यक पौधों की संख्या $2m + 1 - (N - m^2)$ होनी चाहिए।

यहाँ ध्यान देने योग्य है कि विद्यार्थियों को केवल जोड़ और घटाना होता है, न कि गुणा करना होता है। चूँकि जोड़ और घटाना, गुणा की तुलना में सरल संक्रियाएँ हैं, इसलिए ग़लतियों की सम्भावना कम होती है। इसके साथ ही, यह विधि उन्हें चित्र रूप से सत्यापित करने का अवसर भी प्रदान करती है कि $(m + 1)^2 - N$ और $2m + 1 - (N - m^2)$ समान हैं।



चित्र-4

गौरी घोरमाड़े अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलूरु में बीएससी-बीएड गणित के चौथे वर्ष में अध्ययन कर रही हैं। विद्यालय स्तर के गणित और उससे सम्बन्धित विभिन्न शिक्षण विधियों में उनकी गहरी रुचि है। गौरी गणित में मास्टर डिग्री प्राप्त करना चाहती हैं और स्कूलों में पढ़ाने के माध्यम से वह गणित शिक्षण पर अध्ययन करने के लिए उत्सुक हैं। गौरी से gauri.ghormade21ug@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : प्रमोद मैथिल **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय