

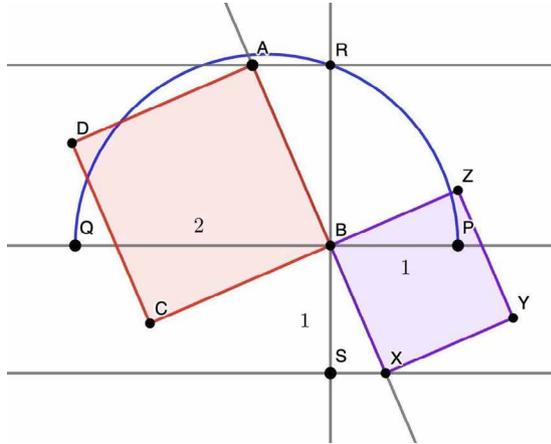
# एक ऐसा वर्ग बनाना जिसका क्षेत्रफल दिए गए वर्ग के क्षेत्रफल का $1/n$ हो

दीक्षा सिन्हा

पृष्ठ 26 पर दी गई समस्या का यहाँ हम एक समाधान प्रस्तुत कर रहे हैं।

एक ऐसी आकृति बनाना, जिसका क्षेत्रफल दिए गए वर्ग के क्षेत्रफल का आधा हो।

नीचे दी गई आकृति में, मान लीजिए कि एक वर्ग  $ABCD$  दिया गया है (जिसकी भुजा की लम्बाई हमें मालूम नहीं है)। माना कि  $PB = BS = 1$  इकाई, और  $BQ = 2$  इकाइयाँ हैं। माना कि  $PRQ$  एक अर्धवृत्त (semicircle) है, जो बिन्दुओं  $P$  और  $Q$  से गुजर रहा है। तब, वर्ग  $XYZB$  का क्षेत्रफल वर्ग  $ABCD$  के क्षेत्रफल का आधा होना चाहिए।



चित्र-1

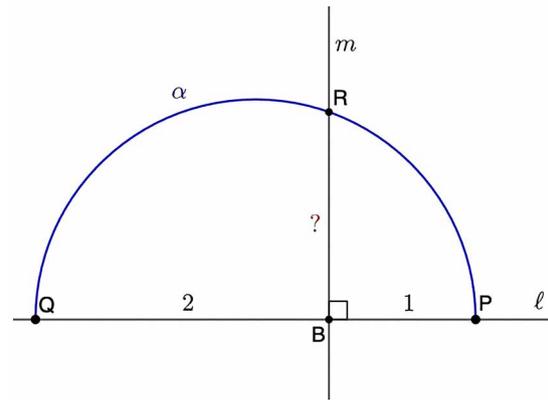
यह सवाल और यह चित्र हमें हमारे एक लेखक ने भेजे थे और इसने हमें सोचने के लिए मजबूर कर दिया। इस चित्र को थोड़ी देर ध्यान से देखें— क्या वर्ग  $XYZB$  का क्षेत्रफल दिए गए वर्ग  $ABCD$  के क्षेत्रफल का आधा है? अगर ऐसा है, तो क्यों? आगे हम इसकी व्याख्या कर रहे हैं।

अगर हम इस समस्या को सुलझाने के लिए कम्प्यूटेशनल चिन्तन का इस्तेमाल करें, तो इसे सुलझाने का पहला चरण यह होगा :

**समस्या का कथन :** क्या वर्ग  $XYZB$  का क्षेत्रफल दिए गए वर्ग  $ABCD$  के क्षेत्रफल का आधा है? अगर ऐसा है, तो क्यों?

आइए इन चरणों को छोटे-छोटे चरणों में तोड़े : हमें दिया गया है कि  $QB = 2$  इकाइयाँ, और  $PB = BS = 1$  इकाई है।

एक ऐसा वर्ग दिया होने पर, जिसका क्षेत्रफल  $x$  वर्ग इकाइयाँ है, हम एक ऐसा वर्ग बनाना चाहते हैं, जिसका क्षेत्रफल  $\frac{x}{2}$  वर्ग इकाइयाँ हो। सरसरी नज़र से देखने पर पता चलता है कि यह कुछ वैसा ही है जैसे  $\sqrt{x}$  इकाइयों वाला एक रेखाखण्ड दिया होने पर, हम  $\sqrt{\frac{x}{2}}$  इकाइयों वाला एक रेखाखण्ड बनाना चाहते हों।



चित्र-2

की-वर्ड : निर्माण, भिन्नात्मक क्षेत्रफल, तार्किक चिन्तन

**चरण-1 :** एक रेखा  $l$  पर तीन बिन्दु  $P$ ,  $B$  और  $Q$  इस तरह से अंकित करें, ताकि  $B$  बिन्दु  $P$  और  $Q$  के बीच में स्थित हो।  $QB = 2$  इकाइयाँ और  $PB = 1$  इकाई।

**चरण-2 :** हम एक अर्धवृत्त  $\alpha$  बनाएँगे, जिसका व्यास  $PQ$  होगा।

**चरण-3 :** मान लीजिए कि रेखा  $m$ ,  $l$  पर लम्बवत है और  $B$  से गुजरती है व  $\alpha$  को  $R$  पर काटती है (चित्र-2 देखें)।

$BR$  क्या होगा?

समकोणीय  $\triangle PBR$  से,  $PR^2 = PB^2 + BR^2$ .

समकोणीय  $\triangle RBQ$  से,  $QR^2 = RB^2 + BQ^2$ .

समकोणीय  $\triangle PRQ$  से,  $PQ^2 = PR^2 + RQ^2$

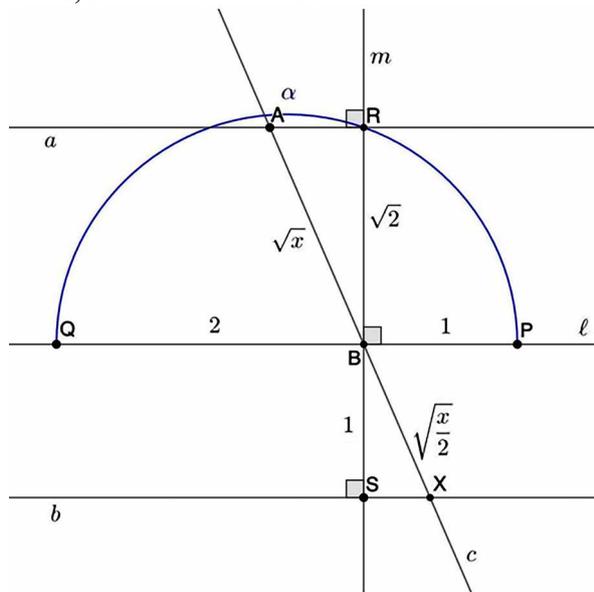
(ध्यान दें कि अर्धवृत्त में  $\angle PRQ$  एक समकोण है)।

इन तीन समीकरणों का इस्तेमाल करके, हम इस तथ्य तक पहुँचते हैं कि  $BR = \sqrt{2}$  है।

**चरण-4 :**  $l$  के दूसरी तरफ़ रेखा  $m$  पर बिन्दु  $S$  इस तरह से अंकित करें ताकि  $BS = 1$  इकाई हो (चित्र-3 देखें)।

**चरण-5 :** रेखा  $l$  के समानान्तर रेखा  $a$  बनाएँ, जो  $R$  से गुजरती हो, और रेखा  $l$  के समानान्तर रेखा  $b$  बनाएँ, जो  $S$  से गुजरती हो।

**चरण-6 :** रेखा  $a$  पर कोई बिन्दु  $A$  चुनें और रेखा  $c$  के माध्यम से बिन्दु  $B$  और  $A$  को मिलाएँ। मान लीजिए कि रेखा  $c$ ,  $b$  को  $X$  पर काटती है।

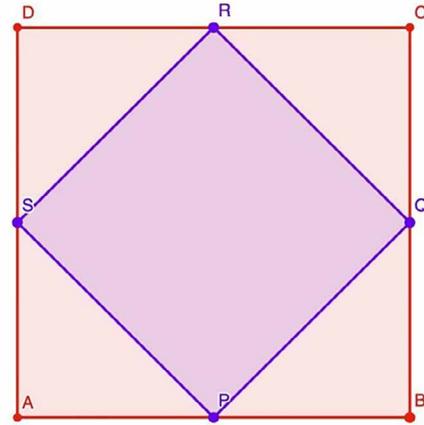


चित्र-3

अब  $\triangle ARB$  और  $\triangle XBS$  एक समान (समरूप) हैं। तो, अगर  $AB = \sqrt{x}$  इकाइयाँ है, तो  $BX = \sqrt{\frac{x}{2}}$  इकाइयाँ होगा।

इस प्रकार, अगर हम एक वर्ग बनाएँ जिसकी एक भुजा सम्मिलित रूप से  $AB$  और  $XB$  हों, तो अनिवार्य तौर पर हमारे पास  $AB$  भुजा वाला वर्ग होना चाहिए, जो  $XB$  भुजा वाले वर्ग के क्षेत्रफल का दोगुना होगा। इस प्रकार, समाधान को छोटे-छोटे चरणों में विभाजित करके, हम यह निष्कर्ष निकालेंगे कि वर्ग  $XYZB$  का क्षेत्रफल असल में दिए गए वर्ग  $ABCD$  के क्षेत्रफल का आधा है।

पाठकों ने यह जान ही लिया होगा कि वर्ग बनाने के और भी सरल तरीके हैं, जो दिए गए वर्ग के क्षेत्रफल को आधा कर सकते हैं, जैसे कि चित्र-4 में दिखाया गया है। यहाँ  $ABCD$  एक दिया गया वर्ग है, और  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  और  $S$  क्रमशः भुजाओं  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  और  $DA$  के मध्य बिन्दु हैं। हालाँकि,  $BQ = 2$  की बजाएँ  $n$  लेकर, दिए गए वर्ग के क्षेत्रफल के  $\frac{1}{n}$  क्षेत्रफल वाला वर्ग बनाने के लिए ऊपर बनाई गई आकृति का विस्तार किया जा सकता है (नीचे सवाल 1 देखें)।



चित्र-4

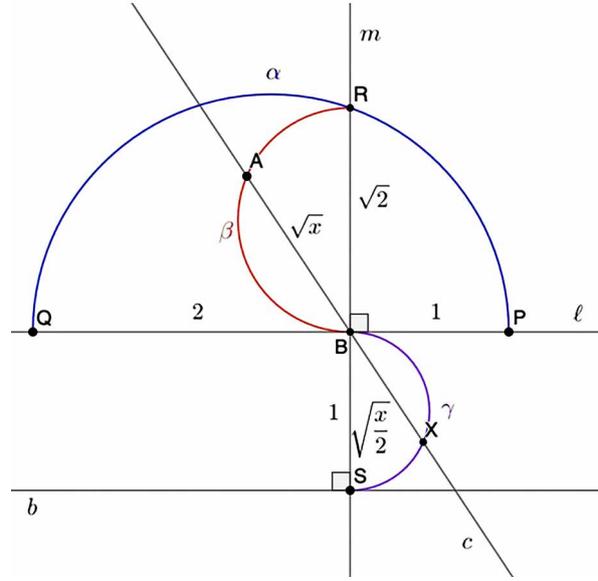
किसी वर्ग का क्षेत्रफल आधा करने तक ही क्यों रुकें? हमारा दावा है कि इस निर्माण से और भी बहुत कुछ हासिल किया जा सकता है! हम पाठकों के आजमाने के लिए यहाँ कुछ सवाल प्रस्तुत कर रहे हैं।

**सवाल**

1. अगर हम मान लें कि  $BQ = n$  इकाइयाँ है, तो  $BR$  की लम्बाई क्या होगी?  $BX$  की लम्बाई क्या होगी?  $ABCD$  और  $XYZB$  के क्षेत्रफलों के बीच का अनुपात क्या है?
2. ऊपर बनाई गई आकृति तभी सही कहलाएगी जब भुजा

$AB$  या तो  $BR$  के बराबर हो या फिर उससे ज्यादा हो। क्या होगा अगर  $AB < BR$ ? इस सम्भावना के अनुसार ऊपर निर्मित आकृति में थोड़ा बहुत बदलाव किया जा सकता है (चित्र-5)। बताएँ कि ऊपर निर्मित आकृति सही क्यों होगी। यहाँ  $\beta$  एक अर्धवृत्त है, जो बिन्दु  $B$  और  $R$  को जोड़ रहा है, और  $\gamma$  एक और अर्धवृत्त है, जो बिन्दुओं  $B$  और  $S$  को जोड़ रहा है।

- अगर हम एक समबाहु त्रिभुज, एक नियमित षट्कोण, एक नियमित 13-गॉन, एक वृत्त के क्षेत्रफल को आधा करना चाहते हैं, तो क्या ऊपर निर्मित आकृतियाँ काम करेंगी?
- एक द्वि-आयामी (2D) आकृति दी होने पर, क्या आप कह सकते हैं कि ऊपर निर्मित आकृतियों से एक ऐसी आकृति बन सकती है, जो दी गई आकृति के जैसी हो और उसका क्षेत्रफल दी गई आकृति के क्षेत्रफल का  $1/n$  हो?



चित्र-5



**दीक्षा सिन्हा** पोदार इंटरनेशनल स्कूल सीआईईई नेरुल नवी मुम्बई में दसवीं कक्षा की छात्रा हैं। गणित के प्रति उनके जुनून और प्यार ने उन्हें संयुक्त राज्य अमरीका में रैम फ़ाउण्डेशन और मैथपाठ द्वारा आयोजित राइजिंग ए मैथमैटीशियन प्रशिक्षण कार्यक्रम में सक्रियता से भाग लेने के लिए प्रेरित किया। दीक्षा से [dictionarycube@gmail.com](mailto:dictionarycube@gmail.com) पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : शहनाज़ पुनरीक्षण : प्रतिका गुप्ता