

गणित में खेल और खोज

स्वाती सरकार

स्मार्टफोन का इस्तेमाल करना हमें किसने सिखाया? क्या हमने इसके साथ खेल-खेलकर ही इसे काम में लाना नहीं सीखा? हममें से कुछ तो अभी भी सीख रहे हैं!

जब बच्चों की शिक्षा की बात आती है तो कई लोग खेल के महत्त्व के पक्ष में तर्क देते हैं। हम सभी 'खेल, बाल्यावस्था का काम है' जैसे उद्धरणों से परिचित हैं। बच्चों के मामले में हम 'काम' और 'खेल' के विभाजन को धुंधला करने लगे हैं। लेकिन खेल इतना महत्त्वपूर्ण क्यों है? सीखने में यह बच्चों (और वयस्कों) की मदद कैसे करता है? विशेष रूप से गणित पढ़ाने और सीखने में इसकी क्या भूमिका है? आइए, इस लेख की शुरुआत हम इस बात से करें कि 'खेल' से हमारा क्या तात्पर्य है।

संरचित खेल

'खेल' को देखने का एक नज़रिया यह है कि इसे स्पष्ट जीत या हार (या अनिर्णीत) वाले 'खेलों' के रूप में देखा जाए; इन्हें एक या एक से अधिक खिलाड़ियों के साथ टीमों में या केवल अकेले ही खेला जा सकता है (जैसे *सॉलितेर*)। इनमें अनिवार्य रूप से नियम होते हैं, ये संयोग या सम्भाव्यता द्वारा निर्धारित हो सकते हैं (विशेषकर यदि कोई खेल पासे और/या कार्डों (पत्तों) से खेला जाता हो) और/या वे जो पूरी तरह रणनीति पर आधारित (शतरंज की तरह) हो सकते हैं या इनमें भाग्य और रणनीति (जैसे ब्रिज का खेल) दोनों का मेल हो सकता है। *जोड़ो ज्ञान* और अन्य संसाधन समूह भिन्नो, आकृतियों आदि के लिए कई संशोधित पासों का उपयोग करते हैं। कुछ कार्ड गेम भी हैं।

चूँकि यह बिलकुल स्पष्ट है कि इस तरह के खेल का अन्तिम लक्ष्य जीतना होता है, इसलिए इनमें दक्षता का होना वांछनीय है और उसकी माँग भी बहुत है। तो, खेल स्वाभाविक रूप से खिलाड़ी को यह उद्देश्य प्रदान करते हैं कि वह अपने कौशलों को बेहतर बना सके। इन कौशलों का उपयोग किसी भी विषय, विशेष रूप से गणित में किया जा सकता है, जिसमें अभिकलनात्मक (Computational) दक्षता महत्त्वपूर्ण होती है। अभिकलनों में महारत हासिल करने का सामान्य नुस्खा अभ्यास और निरन्तर अभ्यास है, जो निस्सन्देह उबाऊ होता है और इससे बच्चों की रुचि इस विषय में कम हो जाती है।

लेकिन अगर इसे एक खेल में बदल दिया जाए और उसे टीम के रूप में खेला जाए तो शिक्षार्थी कहीं ज्यादा प्रेरित होकर भागीदारी करेंगे और वही लक्ष्य प्राप्त होंगे। इसके अलावा, इससे बच्चों द्वारा एक-दूसरे से सीखने को भी उत्प्रेरित किया जा सकता है क्योंकि टीम अपने प्रदर्शन को बेहतर बनाने के लिए जी-तोड़ प्रयास करेंगी। लेकिन शिक्षक या सुगमकर्ता को चीजों की व्यवस्था इस तरह करनी होगी कि प्रत्येक बच्चा इसमें बेहतर हो सके।

सबसे आसान तरीका है दो (या अधिक टीमों) बनाना और समय-समय पर उनसे सवाल-जवाब करना। वास्तविक क्विज़ (प्रश्नोत्तरी) को समयबद्ध किया जा सकता है क्योंकि प्रश्नों का उत्तर तुरन्त या कुछ मिनटों में देना होता है। इसे इस तरह से व्यवस्थित किया जा सकता है कि जिस टीम को उत्तर मिल जाए, वह बज़र दबाए। इसमें ग़लत उत्तर के लिए कुछ पेनल्टी (जुर्माना) भी होना चाहिए क्योंकि बच्चों को जल्दी उत्तर देने के जोश में सही उत्तरों से समझौता नहीं करना चाहिए। या इसे इस तरह से भी बनाया जा सकता है कि प्रत्येक टीम निर्धारित समय के बाद अपना-अपना उत्तर बताए। इस तरीके में पेनल्टी की आवश्यकता कम होती है और इसलिए, इस तरीके में जीत बच्चों की अपनी क्षमता के कारण ज्यादा होती है न कि अन्य टीम/टीमों की ग़लती/ग़लतियों के कारण। इसलिए इस तरीके में दक्षता तो प्रोत्साहित होती है, लेकिन खेल बहुत प्रतिस्पर्धी नहीं बनता। साथ ही इस तरह की क्विज़ का विषय पहले ही घोषित किया जा सकता है और टीमों को स्वयं अभ्यास करने के लिए पर्याप्त समय दिया जा सकता है, जिसकी देखरेख शिक्षक (कोच के रूप में कार्य करने वाले) द्वारा की जानी चाहिए।

टीम का चयन महत्त्वपूर्ण है। एक सुझाव यह है कि प्रत्येक टीम में बच्चों का मिश्रण हो — वे जो कुशल हैं और वे जो अभी तक उस स्तर पर नहीं पहुँचे हैं। टीम के प्रत्येक सदस्य की भागीदारी सुनिश्चित करना भी महत्त्वपूर्ण है ताकि टीम प्रत्येक सदस्य के प्रदर्शन को बेहतर बनाने में सहायता करे और केवल अपने श्रेष्ठ खिलाड़ियों पर निर्भर न रहे।

जब बच्चे जोड़-घटाव (और बाद में गुणा-भाग) सीख रहे हों तो उस समय यदि वे कुछ संख्या तथ्यों को एकदम पक्का करके स्वचालित बना लें तो यह बहुत उपयोगी होगा, उदाहरण

के लिए, कौन-सी संख्याएँ जुड़कर दस बनती हैं, $1 + 9$, $2 + 8$, $3 + 7$, $4 + 6$ और किन्हीं भी दो एक-अंकीय संख्याओं का योग, उदाहरण के लिए, $7 + 8$, $6 + 5$ आदि (और बाद में 8×6 , 7×9 आदि)। रैपिड-फायर राउण्ड बच्चों को इन संख्या तथ्यों को स्वचालित बना लेने के लिए प्रेरित कर सकते हैं। लेकिन यह सुनिश्चित करने के लिए कि ये चीजें केवल रटी नहीं गई हैं और यह जाँचने के लिए कि बच्चे इन परिणामों पर पहुँचना जानते हैं, क्विज़ में बोनस अंक दिए जा सकते हैं, जिन्हें पाने के लिए सही उत्तर देने वाले बच्चे (या टीम) को अपने उत्तर को तर्कसंगत बनाना होगा। 100 से अधिक की संख्याओं वाले अभिकलन से जुड़े प्रश्नों के लिए बोनस अंक और बढ़ाए जा सकते हैं: आप $37 + 56$ को कितने तरीकों से हल कर सकते हैं? यहाँ पर प्रत्येक तरीके के लिए अंक दिए जा सकते हैं। इससे संख्या की समझ बढ़ती है क्योंकि वे मानक कलन विधि (Algorithm) से परे (और आदर्श रूप से देख जाए तो वहाँ पहुँचने से पहले) संख्याओं के साथ खेलेंगे। यह उन्हें मानसिक गणित के लिए अपनी खुद की संक्षिप्त रीतियाँ/शॉर्टकट बनाने में मदद करता है।

इस बात पर ध्यान दें कि संख्याओं के साथ खेलना इसके 'खेल' के अवतार से काफ़ी अलग है। खेलों के कुछ और पहलुओं पर चर्चा करने के बाद हम पुनः इस विषय पर आएँगे। खेलों की दुनिया नियमों पर आधारित होती है और खिलाड़ियों को कुछ निर्धारित सीमाओं के भीतर काम करने और सोचने के निर्देश देती है। इसलिए हमें दी गई सीमाओं के भीतर रचनात्मक होना चाहिए। इससे गणित की दुनिया में आगे बढ़ने में सुविधा होती है, जो नियमों पर आधारित होते हुए भी कई अद्भुत काम करने के अवसर देती है। एक और अच्छा विचार यह है कि बच्चों को इस बात का पता लगाने दिया जाए कि किसी खेल के नियमों के अन्तर्गत क्या सम्भव है और क्या नहीं (उदाहरण के लिए, शतरंज में काला घोड़ा कौन-से खाने पर रखा जा सकता है) और गणित के अन्तर्गत (उदाहरण के लिए, क्या ऐसी दो विषम संख्याएँ ज्ञात करना सम्भव है जो जुड़कर एक और विषम संख्या बनाती हों? यदि कोई चतुर्भुज, एक पतंग और समलम्ब चतुर्भुज है तो उसके गुण क्या होंगे?) रणनीति-आधारित खेलों के लिए उच्च-स्तरीय चिन्तन कौशल, गहरी समझ और सम्भवतः कुछ रचनात्मकता की ज़रूरत होती है। *रैंडम डिजिट गेम* (सन्दर्भ देखें) ऐसा ही एक खेल है।

खेलों का उपयोग आकलनों के लिए भी किया जा सकता है। परिभाषाएँ पूछने की बजाय शिक्षक उदाहरण और आदर्श रूप से देखा जाए तो गैर-उदाहरण पूछ सकते हैं। लेकिन 'खेल' के पहलू का इस्तेमाल और आगे तक भी किया जा सकता है। जब बच्चे एक निश्चित प्रकार के कार्यों को करना सीख जाते

हैं तो उन्हें विशेष रूप से अन्य टीम (टीमों) को चुनौती देने के लिए इसी तरह के प्रश्न/कार्य बनाने के लिए कहा जा सकता है। इस तरह बच्चे जटिल प्रश्न बनाने के लिए प्रेरित होंगे और उनकी रचनात्मकता को फलने-फूलने का मौका मिलेगा।

मुक्त रूप से खोज करने के अवसर देने वाले खेल

आइए, अब दूसरे अवतार पर आते हैं। खेल का मतलब मुक्त रूप से खोज करना भी है जो किसी भी नियम से बँधा न हो, या अगर ज़रूरत पड़े तो नियम बनाए जा सकें। छोटे बच्चे अकेले या दूसरों (बच्चों और/या वयस्कों) के साथ रोल-प्ले के माध्यम से बहुत कुछ सीखते हैं, जिसमें वे (ज़्यादातर) वयस्कों की नक़ल करते हैं और अपने आसपास के लोगों (या उन पात्रों के बारे में जिन्हें वे जानते हैं) की जिन्दगियों का अनुभव करके सीखते हैं। इस तरह के 'खोज करने' वाले खेल का एक अन्य पहलू यह है कि इसमें किसी स्थिति या सामग्री से खुद को परिचित करना और उसकी सम्भावनाओं व सीमाओं की समझ विकसित करना भी शामिल है। उदाहरण के लिए जब कोई बच्चा ओरिगेमी के बारे में पता लगाता है तो वह सीखता है कि कागज़ कैसे काम करता है, उससे क्या किया जा सकता है, क्या करना मुश्किल है (और क्या असम्भव है)। खेलों के विपरीत, आमतौर पर, खोज करने में अन्तिम लक्ष्य स्पष्ट रूप से परिभाषित नहीं होता है, कम-से-कम शुरुआत में तो नहीं ही होता, पर किसी स्थिति या सामग्री के बारे में खोजकर्ताओं की समझ बढ़ने पर यह दिखाई दे सकता है। जब गणित सीखने की बात आती है तो खेल और खोज, दोनों महत्वपूर्ण होते हैं और दोनों का उपयोग किया जाना चाहिए।

सही शुरुआत

इससे पहले कि हम आगे बढ़ें, आइए हम इस स्कूली विषय पर क़रीब से नज़र डालें, जो न केवल अध्ययन का एक विषय है, बल्कि समझ का एक रूप भी है। माता-पिता और शिक्षकों सहित अधिकांश लोगों और उनकी वजह से बच्चों के दिमाग में भी गणित की छवि इस तरह की है कि यह नियमों द्वारा चलने वाला एक शुष्क विषय है जो पदानुक्रमों में सख्ती से जकड़ा हुआ है और इसमें रचनात्मकता के लिए बहुत कम या कतई जगह नहीं होती; या तो आपको यह समझ में आता है या नहीं। लेकिन इसके विपरीत, गणित के बारे में खोज खुद बच्चे कर सकते हैं और उन्हें करनी भी चाहिए और इसकी शुरुआत पहली कक्षा या उसके पहले हो जानी चाहिए। एक बार जब बुनियादी बातें सिखा दी जाती हैं, जैसे सम्बन्धित मात्राओं से सम्बद्ध करके विभिन्न संख्याओं के नामों का अर्थ, अंकों का संख्यात्मक निरूपण, स्थानीय मान या और महत्वपूर्ण बात कि, दहाई के बण्डल बनाना और इन्हें संख्याओं के रूप में कैसे निरूपित किया जाता है आदि, तो फिर बच्चों को ज़्यादा-कम

की समझ हो जानी चाहिए और उन्हें किन्हीं दी गई संख्याओं में से छोटे/ सबसे छोटे (या बड़े/ सबसे बड़े) अंकों को खोजने के लिए नियम बताने में सक्षम हो जाना चाहिए (उदाहरण के लिए, इन अंकों को सबसे छोटे से सबसे बड़े तक के क्रम में लगाएँ : 38, 83, 40, 9)।

यह आवश्यक है कि बच्चों के पास इन संख्याओं को बनाने के लिए कुछ वस्तुएँ/ मैनिपुलेटिव (बण्डल-डण्डियाँ और/ या गणितमाला) हों और फिर यह तय करें कि कौन-सा सबसे छोटी मात्रा (कोई बण्डल नहीं) को इंगित करता है और कौन-सा सबसे बड़ी मात्रा (बण्डलों की अधिकतम संख्या) को इंगित करता है। पता लगाने या संख्याओं के साथ खेलने की ये क्रियाएँ समूहों में की जा सकती हैं और शिक्षक बच्चों को अपने परिणामों को व्यक्त करने और उस समझ को एक नियम में बाँधने के लिए प्रेरित कर सकते हैं। यह अभ्यास गणितीय संवाद को विकसित करने और विद्यार्थियों को गणितीय भाषा की सटीक और संक्षिप्त प्रकृति को समझने में मदद करेगा। *भिन्न का अर्थ* (देखिए सन्दर्भ में वीडियो लिंक) यह दर्शाता है कि शिक्षक कैसे बच्चों से प्रश्न पूछकर और उत्तर न बताकर अपनी बात व्यक्त करने के लिए प्रेरित कर सकते हैं।

खोज और जाँच-पड़ताल

तो इस प्रकार जब जोड़, घटाव (और बाद में गुणा और भाग) का अर्थ समझाया और समझ लिया जाता है तो मात्राओं के साथ बच्चों के खेल से ही संख्याओं को जोड़ने और घटाने के विभिन्न तरीके सामने आने चाहिए। विभिन्न प्रकार की वस्तुएँ उन्हें अभिकलन के विभिन्न तरीकों की खोज करने में मदद करेंगी। ऐसे 'खेलों' से कलन विधि उभर सकती है और उभरनी भी चाहिए। बच्चे जो खोज करते हैं, उन्हें लिखित रूप देने में उनकी मदद करने में शिक्षक की भूमिका बहुत महत्वपूर्ण है। जब बच्चों को यह महसूस होता है कि उन्होंने स्वयं मानक कलन विधि की खोज की है तो यह एहसास उन्हें अत्यधिक सक्षम बनाता है और गणित उनके लिए एक ऐसा विषय बन जाता है जिसे स्वयं ही सीखा जा सकता है। वास्तव में, यही कारण है कि इस विषय से प्यार करने वाले लोग इसकी ओर आकर्षित होते हैं। इससे भी महत्वपूर्ण बात यह है कि जब बच्चों को इस आत्म-निर्भरता का स्वाद मिलता है तो उन्हें दूसरों द्वारा यह बताया जाना अच्छा नहीं लगता कि आगे कैसे बढ़ना है, बल्कि वे स्वयं ऐसे रोमांच का अनुभव करना चाहते हैं। ऐसे बच्चों और सामान्य बच्चों को पढ़ाने के अन्तर पर विचार करें तो ज़ाहिर है कि ऐसे बच्चों को पढ़ाना आसान है क्योंकि यहाँ शिक्षार्थी उत्सुक और तैयार हैं, लेकिन यह चुनौतीपूर्ण भी है क्योंकि सीखने की उनकी प्यास अलग तरह की होती है। शिक्षक को सामान्य से परे जाकर ऐसे सवाल, खोजों और जाँच-पड़ताल वाले तरीकों की तलाश करनी चाहिए जो ऐसे उत्साही व उद्यमी शिक्षार्थियों के अनुकूल हों अर्थात् बहुत आसान (और इसलिए, उबाऊ) न हों लेकिन उन्हें आकर्षित करने और संलग्न करने के लिए पर्याप्त रूप से चुनौतीपूर्ण हों। भाग्यवश इंटरनेट ऐसी खोजों और जाँच-पड़तालों वाले अभ्यासों से भरा पड़ा है और अधिकांश शिक्षक (यदि सभी नहीं) स्मार्टफोन के माध्यम से इनका उपयोग कर सकते हैं। ऐसे कुछ संसाधनों के लिए सन्दर्भ देखें, विशेष रूप से *थिंकिंग स्क्रिप्स* पुल-आउट।

गुणन सारणियों (पहाड़े) की रचना भी इसी प्रकार की जानी चाहिए और फिर उनमें विभिन्न पैटर्न का पता लगाया जा सकता है। बहुत से बच्चे 9 के गुणजों के अंकों के योग का गुण स्वयं ही खोज लेते हैं। ऐसी और भी खोजें सम्भव हैं जो गणित की कक्षा को काफ़ी जीवन्त और रोमांचक बना सकती हैं। 1-100 की संख्याओं के 10x10 ग्रिड पर संख्याओं के गुणजों की खोज करने से भाग देने के नियमों की खोज हो सकती है।

पैटर्न की खोज

इन खेलों और खोजों को संख्याओं और संक्रियाओं तक ही रखने की आवश्यकता नहीं है। बेस-10 ब्लॉकों (फ्लैट्स [सैकड़ा], लॉन्स [दहाई], इकाइयाँ या एफएलयू) के साथ खेलने से बीजगणित टाइलों में जाने में मदद मिलती है, ठीक वैसे ही जैसे *गणितमाला* संख्या रेखा की मानसिक छवि बनाती है। इस तरह की खोजों से कई बातों की गहरी समझ प्राप्त हो सकती है, जिसका उपयोग करने के लिए बच्चों से कहना चाहिए कि वे पहले अनुमान लगाएँ और फिर उन्हें सही साबित करें। खोज करने की आदत बच्चों को पैटर्न देखने के लिए सक्षम बनाती है। इसे और बढ़ाने के लिए उन्हें अपने परिवेश और दैनिक जीवन में गणित का अवलोकन करने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए।

पैटर्न की खोज

उन्हें और अधिक प्रेरित करने के लिए 'खेल' अवतार के तहत उनसे कहा जा सकता है कि वे 'अपने आस-पड़ोस में वर्ग खोजें' (आयत और वृत्त बहुत आसान होंगे) जिसमें बोनस यह बताने पर मिलेगा कि 'यह एक वर्ग क्यों है, आयत क्यों नहीं'। जाँच-पड़ताल का एक और विषय यह हो सकता है कि वे विभिन्न व्यवसायों/ हस्तकलाओं में गणित को खोजें — कोई बढ़ई या दर्जी गणित का उपयोग कैसे करता है? ज्यामिति (आकार, सममिति और स्थानिक समझ) और बीजगणित की समझ विकसित होने के साथ बहुभुजों (और वृत्त आदि) के परिमाणों और क्षेत्रफलों के लिए सूत्र निकाले जा सकते हैं और इसके लिए माचिस की तीलियों और कार्ड के टुकड़ों से आकार बनाए जा सकते हैं। इसी तरह, ठोस के जालों (घनाभ, बेलन, शंकु, गोले आदि) की खोज से, विशेष रूप से पृथ्वीय क्षेत्रफलों

की समझ तो बनती ही है, साथ ही, आयतनों को समझने में भी मदद मिलती है। विभिन्न प्रकार की टाइलों (सभी सम्भव प्रकार के त्रिभुज और चतुर्भुज) के साथ चारखानों की रचना (Tessellation) की खोज करने से कई प्रमेय बन सकते हैं।

चीजों के बारे में इस तरह पता करने से गणित के भीतर के कई दिलचस्प अवलोकनों, खोजों और अन्तर-सम्बन्धों तक पहुँचा जा सकता है (उदाहरण के लिए, कौन-सी संख्याएँ क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं के योग के रूप में नहीं लिखी जा सकती हैं? 7 टुकड़ों वाले टैनग्राम में सबसे बड़े त्रिभुज का कर्ण वर्ग की भुजा के तीन गुने से थोड़ा छोटा क्यों होता है?)।

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (एनसीएफ) 2005 और गणित शिक्षण के आधार पत्र में, बच्चों की सोच के गणितीयकरण पर जोर दिया गया है। विषय-सामग्री के साथ कई प्रक्रियाओं को एकीकृत करके खेल और विशेष रूप से खोज के रूप में खेल, इस लक्ष्य को हासिल कर सकते हैं। इसलिए यह कोई आश्चर्य की बात नहीं कि पाठ्यपुस्तकों में अब खेल शामिल किए जा रहे हैं। और आखिर बच्चे खुद को खेलने से कैसे रोक सकते हैं?

References

- Random Digits: <http://teachersofindia.org/en/activity/number-game-random-digits>
- Meaning of Fractions: https://www.youtube.com/watch?v=swpDWTm73_I
- NCTM: Activities with Rigor and Coherence: <https://www.nctm.org/ARCs/>
- Jodo Gyan: Various manipulatives and games: <https://jodogyana.org/activity-resources/>
- Thinking Skills: <http://teachersofindia.org/en/ebook/thinking-skills-pullout>
- Sum of Consecutive Natural Numbers: <http://azimpremjiuniversity.edu.in/SitePages/resources-ara-august-2017-lfnc-sums-of-consecutive-natural-numbers.aspx>
- Tangrams: <http://teachersofindia.org/en/ebook/getting-shape-tangram-time>
- Other pull-outs, activities and related articles: <https://azimpremjiuniversity.edu.in/SitePages/resources-at-right-angles.aspx>
- NCERT textbooks: <https://ncert.nic.in/textbook.php>
- Sikkim textbooks: Class 1: <https://online.fliphtml5.com/iuwdn/pfdo/#p=1> Class 2: <https://online.fliphtml5.com/iuwdn/kgob/#p=1>
Class 3: <https://online.fliphtml5.com/iuwdn/hsdm/#p=2> Class 4: <https://online.fliphtml5.com/iuwdn/ifaw/#p=1>
Class 5: <https://online.fliphtml5.com/iuwdn/pjgl/#p=1>



स्वाती सरकार स्कूल ऑफ़ कंटिन्यूइंग एजुकेशन एण्ड यूनिवर्सिटी रिसोर्स सेंटर, अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी, बेंगलूरु में सहायक प्राध्यापक हैं। गणित उनके जीवन का दूसरा प्रेम है (पहला है चित्रकारी)। उन्होंने भारतीय सांख्यिकी संस्थान से बी स्टैट-एम स्टैट और वाशिंगटन विश्वविद्यालय, सिपेटल से गणित में एमएस किया है। वे एक दशक से भी अधिक समय से बच्चों और शिक्षकों के साथ गणित पर काम कर रही हैं और प्रायोगिक कार्यों में गहरी दिलचस्पी रखती हैं, विशेष रूप से ओरिगेमी में। उनसे swati.sircar@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।
अनुवाद : नलिनी रावल