

# अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी एट राइट एंगल्स

स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

चलो पतंग उड़ाएँ –  
गणित सीखने का मज़ा उड़ाएँ



## 5 विशेष

- » गणित की कक्षा में 'बड़ी किताबों' का इस्तेमाल
- » गणितीय विमर्श

## 22 कक्षा में

- » अमूर्त अवधारणाओं से व्यावहारिक उपयोग तक : ज्यामिति का एक अनुभव
- » गुणन : एक बेहतर कलन विधि

## 37 गणित का मज़ा

- » अनुमान लगाने की कला : भाग 2
- » विशेष वर्ष

**पुल-आउट**  
गणित बराबर गर्म?  
गणित बराबर ठण्डा?

गणित का आनन्द – राष्ट्रीय पाठ्यचर्चा की रूपरेखा में प्रयुक्त इन शब्दों को सावधानीपूर्वक बरतने और गहराई से समझने की ज़रूरत है। आखिर गणित का आनन्द क्या है? क्या यह केवल मजेदार कक्षाओं और हल्के-फुल्के गणित तक ही सीमित है? क्या हम गणित की गहनता में भी आनन्द पा सकते हैं? क्या यह विरोधाभासी नहीं लगता?

एट राइट एंगल्स आनन्द का कोई नुस्खा तो नहीं दे सकता, लेकिन हम विद्यार्थियों को वे तरीके ज़रूर बता सकते हैं जिससे वे हर तरफ़ गणित को देखने, आकृतियों और संख्याओं में पैटर्न देखने, सम्बन्ध बनाने और सामान्यीकरण का परीक्षण करने, तर्कपूर्ण दलीलें गढ़ने और अपने दृष्टिकोण की पुष्टि करने की ऊर्जा से भर जाएँ। आइए अपने भीतर के बच्चे को आत्मविश्वास और निडर मन के साथ मुक्त करें।

अनुवाद : विजय सेन पुनरीक्षण : सुशील जोशी

कॉपी एडिटर : अनुज उपाध्याय



## सम्पादक की ओर से...

हम नए एट राइट एंगल्स के दूसरे अंक के साथ फिर से आपके सामने हैं। इसमें हम प्राथमिक विद्यालय स्तर पर गणित शिक्षण से जुड़े शैक्षणिक मुद्दों से जुड़ने का प्रयास कर रहे हैं। अपने अनुभव और सीख साझा करने वाले सभी लेखकों के साथ-साथ सराहना तथा मूल्यवान समालोचना करने वाले हमारे पाठकों का हम बहुत-बहुत धन्यवाद अदा करते हैं।

जुलाई 2024 अंक के विशेष खण्ड में, हमने रीमा कौर और मनीषा गोयल के साथ बहु-विषयक दृष्टिकोण की पड़ताल जारी रखी है। साझा पठन के प्रयोग कक्षा में एक मजबूत साधन साबित हुए हैं। यहाँ, वे बच्चों के सन्दर्भ से डेटा सम्हालने के विचार को समझने के लिए एक बड़ी पुस्तक (Big Book) बनाने के विचार को टटोलती हैं। और ऐसी तलाश के बारे में बात करने से बेहतर क्या हो सकता है? प्राची एम. इसी खण्ड में गणितीय संवाद के लिए एक मजबूत तर्क प्रस्तुत करती हैं।

अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय की पूर्व छात्रा अरुणी जोसफ़ कक्षा में फ़ील्ड इंटरनशिप के दौरान कोणों की अवधारणा पढ़ाने के अपने अनुभवों के साथ शुरुआत करती हैं। जेम्स मेट्ज़ और ब्रैड युई क्यों 6? में बीजगणित और ज्यामिति के बीच के अन्तर्सम्बन्धों की पड़ताल करते हैं – यह एक ऐसा प्रश्न है जो एक बीजगणितीय सर्वसमिकाओं का पता लगाने के लिए इंटरलॉकिंग क्यूब्स के साथ व्यावहारिक गतिविधियों का उपयोग करता है। गुणन के लिए बेहतर कलन विधि और बीजगणितीय टाइलों पर विचार के लिए मैथ स्पेस के लेख में भी दृश्य-संकल्पना का सहारा लिया गया है।

गणित का मज़ा खण्ड में अनुमान लगाने (Guesstimation) सम्बन्धी लेख को कक्षा गतिविधियों के साथ जारी रखा गया है ताकि इस कौशल का अभ्यास किया जा सके। मुझे पूरा यकीन है कि ये गतिविधियाँ घर पर और खेल के दौरान विद्यार्थियों की बातचीत को प्रभावित करेंगी! और अपना विशेष वर्ष खोजें कि आपके जन्म वर्ष के अन्तिम दो अंक कब आपकी उम्र होंगे? मेरा विशेष वर्ष जल्द ही आने वाला है, लेकिन यह 2025 में क्यों नहीं हो सकता? जानने के लिए आगे पढ़ें।

इस बार हमारा आवरण पतंगों का परिवार (Kite Families) पर आधारित टियरआउट से प्रेरित है। हम शिक्षकों से अनुरोध करते हैं कि यह सुन्दर पोस्टर अपनी कक्षा में लगाएँ और उसमें दिए गए प्रश्नों का उपयोग करके विद्यार्थियों को चतुर्भुजों की जादुई सैर कराएँ। वे विद्यार्थियों द्वारा पूछे गए अन्य प्रश्न भी शामिल कर सकते हैं। मैथ स्पेस ने चर्चाओं को गणितीय गहनता के आधार पर बनाए रखने के लिए कुछ दिशा-निर्देश प्रदान किए हैं – यानी आपका सीट बेल्ट बाँध दिया गया है!

पद्मप्रिया शिराली के पुलआउट की हमेशा से माँग रही है। इस बार उन्होंने तापमान से सम्बन्धित गतिविधियों पर अन्वेषण करके माहौल को गर्मा दिया है। यह चर्चा जलवायु परिवर्तन, टिकाऊ विकास और संसाधनों के संरक्षण तक जा सकती है। लेकिन हम समापन एक हस्तकला गतिविधि एक तापमान रजाई (Temperature Quilt) बनाने से कर रहे हैं। एक बहु-विषयक दृष्टिकोण के लिए एक शिक्षक को और क्या चाहिए!

हमें यह बताते हुए खुशी हो रही है कि उच्च कक्षा स्तर के लेख अब पत्रिका में वापस आ गए हैं, जो एट राइट एंगल्स के ऑनलाइन संस्करण में उपलब्ध हैं। विषय सूची पृष्ठ पर दिए गए क्यूआर कोड को स्कैन करके विषाक्त नमूने की तकनीकी जाँच को देखिए। इसमें कुमार गन्धर्व मिश्रा आपको सिखाते हैं कि एक्सेल शीट का उपयोग करके एक

प्रयोगशाला जाँच की अनुकृति (simulation) कैसे बनाई जाए। सबसे अच्छी बात यह है कि जाँच की योजना आपके कम्प्यूटेशनल कौशल को विकसित करती है।

अपने काम में एट राइट एंगल्स का उपयोग करने वालों से जुड़े रहने के लिए हमने एक प्रश्नावली तैयार की है। हम अपने पाठकों से अनुरोध करते हैं कि वे सर्वेक्षण लिंक को प्राप्त करने के लिए [AtRightAngles.editor@apu.edu.in](mailto:AtRightAngles.editor@apu.edu.in) पर मेल करें।

खुशी-खुशी पढ़ें! और सम्पर्क में रहें।

## स्नेहा टाइटस

सम्पादक, एट राइट एंगल्स

अनुवाद : विजय सेन

पुनरीक्षण : सुशील जोशी

कॉपी एडिटर : अनुज उपाध्याय

### मुख्य सम्पादक

#### स्नेहा टाइटस

अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलूर  
सर्वे नम्बर 66, बुरुगुटे विलेज,  
बिक्कनाहल्ली मेन रोड,  
सरजापुरा, बेंगलूर – 562 125  
[sneha.titus@apu.edu.in](mailto:sneha.titus@apu.edu.in)

### सह-सम्पादक

#### मोहन आर.

अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलूर  
सर्वे नम्बर 66, बुरुगुटे विलेज,  
बिक्कनाहल्ली मेन रोड,  
सरजापुरा, बेंगलूर – 562 125  
[mohan.r@apu.edu.in](mailto:mohan.r@apu.edu.in)

### सम्पादकीय कार्यालय

पब्लिकेशन, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय,  
सर्वे नम्बर 66, बुरुगुटे विलेज, बिक्कनाहल्ली मेन रोड,  
सरजापुरा, बेंगलूर - 562 125 कर्नाटक  
ईमेल: [publications@apu.edu.in](mailto:publications@apu.edu.in)  
वेबसाइट: [www.azimpremjiuniversity.edu.in](http://www.azimpremjiuniversity.edu.in)

## सम्पादन समिति

### अजय कुमार के.

अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलूर  
[ajaykumar.k@apu.edu.in](mailto:ajaykumar.k@apu.edu.in)

### अर्धेन्दु शेखर दाश

अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन,  
धमतरी, छत्तीसगढ़  
[ardhendu@azimpremjifoundation.org](mailto:ardhendu@azimpremjifoundation.org)

### अशोक प्रसाद

अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन,  
गढ़वाल, उत्तराखण्ड  
[ashok.prasad@azimpremjifoundation.org](mailto:ashok.prasad@azimpremjifoundation.org)

### हृदय कान्त दीवान

अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय,  
भोपाल, मध्य प्रदेश  
[hardy@azimpremjifoundation.org](mailto:hardy@azimpremjifoundation.org)

### मोहम्मद उमर

अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन,  
सिरोही, राजस्थान  
[mohammed.umar@azimpremjifoundation.org](mailto:mohammed.umar@azimpremjifoundation.org)

### पद्मप्रिया शिराली

सद्याद्रि स्कूल, केएफ़आई  
[padmapriya.shirali@gmail.com](mailto:padmapriya.shirali@gmail.com)

### रुद्रेश एस.

अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन,  
कलबुर्गी, कर्नाटक  
[rudresh@azimpremjifoundation.org](mailto:rudresh@azimpremjifoundation.org)

### सन्दीप दिवाकर

अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन,  
भोपाल, मध्य प्रदेश  
[sandeep.diwakar@azimpremjifoundation.org](mailto:sandeep.diwakar@azimpremjifoundation.org)

### स्वाती सरकार

अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलूर  
[swati.sircar@apu.edu.in](mailto:swati.sircar@apu.edu.in)

### सुधीश वेंकटेश

मुख्य संचार अधिकारी एवं प्रबन्ध सम्पादक  
अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन, बेंगलूर  
[sudheesh.venkatesh@azimpremjifoundation.org](mailto:sudheesh.venkatesh@azimpremjifoundation.org)

### हिन्दी अंक सम्पादक

राजेश उत्साही  
अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय,  
भोपाल, मध्य प्रदेश  
[utsahi@azimpremjifoundation.org](mailto:utsahi@azimpremjifoundation.org)

### हिन्दी अनुवाद

एकलव्य फ़ाउंडेशन  
समन्वय : प्रतिका गुप्ता

### डिज़ाइन

एमएपी सिस्टम्स, बेंगलूर, कर्नाटक

### हिन्दी अंक लेआउट एवं मुद्रक

आदर्श प्रा.लि., भोपाल, मध्य प्रदेश

एट राइट एंगल्स अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय का प्रकाशन है। इसका उद्देश्य शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों, विद्यार्थियों और गणित के प्रति रुचि रखने वाले लोगों तक पहुँचना है। यह अलग-अलग विचारों और दृष्टिकोणों की अभिव्यक्ति के लिए एक मंच प्रदान करता है तथा नए और सुविज्ञ दृष्टिकोण, विचारोत्तेजक नज़रिए और नवाचार की कहानियों को प्रोत्साहित करता है। कोशिश है कि यह पत्रिका 'अकादमिक' और 'पेशेवर' उन्मुख होने के बीच सन्तुलन बना सके।

एट राइट एंगल्स अंक 19, जुलाई 2024 का यह हिन्दी अनुवाद सितम्बर, 2024 में प्रकाशित हुआ है।

नोट : इस अंक में व्यक्त किए गए सभी विचार और राय लेखकों के अपने हैं और अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन किसी भी रूप में इसके लिए उत्तरदायी नहीं है।

## इस अंक में

### विशेष

हमारा पहला खण्ड गणितीय शिक्षा पर केन्द्रित विविधतापूर्ण लेखों का पिटारा खोलता है। इस पिटारे में पाठ्यपुस्तकों के समालोचनात्मक विश्लेषण से लेकर कक्षाओं में गणित की अभ्यास पद्धति के विभिन्न पहलुओं पर चर्चा तक मौजूद है। गणित के अभ्यासरत शिक्षाविदों द्वारा लिखे गए इन लेखों का उद्देश्य समालोचनात्मक नज़रिया साझा करना है।

मनीषा गोयल और रीमा कौर

05 ▶ फ़ाउंडेशनल स्टेज और आरम्भिक चरणों में डेटा प्रबन्धन सिखाने के लिए बड़ी किताबों का इस्तेमाल

प्राची एम.

15 ▶ गणितीय विमर्श : सही जवाबों से आगे जाना

### कक्षा में

इस भाग के लेख प्रभावशाली शिक्षण की रूपरेखा तैयार करने और उन्हें लागू करने में मददगार हैं। ये शिक्षण के प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुभवों पर आधारित हैं, जिनमें सफल योजनाएँ भी हैं और सुधार के अवसर और विचार भी। ये विषयों के बारे में शिक्षकों की समझ को सुदृढ़ करते हैं और सम्बल देते हैं, साथ ही ये उनके शिक्षाशास्त्रीय ज्ञान को भी मज़बूत करते हैं।

अरुणी जोसफ़

22 ▶ अमूर्त अवधारणाओं से व्यावहारिक उपयोग तक : ज्यामिति का एक अनुभव

जेम्स मेट्ज़ और ब्रैड युई

29 ▶ 6 क्यों? चतुष्फलकीय संख्याओं को चतुष्फलक से जोड़ना

मैथ स्पेस

33 ▶ गुणन : एक बेहतर कलन विधि

### गणित का मज़ा

यह एक ऐसा खण्ड है जिसमें गणित के मज़े और सुन्दरता को उत्सव की तरह प्रस्तुत किया गया है। आपको इस भाग में हल्के-फुल्के क्रिस्से, कॉमिक स्ट्रिप्स, कार्टून, निबन्ध और इन सबके पीछे के सुन्दर तर्क मिलेंगे जो गणित की प्रकृति को बढ़ावा देते हैं।

मोहन आर.

37 ▶ अनुमान लगाने की कला : भाग 2 कक्षा में फ़र्मी समस्याओं का उपयोग

जेम्स मेट्ज़ और ब्रैड युई

44 ▶ विशेष वर्ष

## निरन्तर...

### समीक्षा

हमारा समीक्षा खण्ड गणित में शैक्षणिक संसाधनों पर दृष्टिकोण का एक विविधतापूर्ण दायरा प्रस्तुत करता है। इस खण्ड में हम पाठ्यपुस्तकों, गणित और गणित-शिक्षा की किताबों, सीखने-सिखाने की सामग्रियों (TLMs), दिलचस्प वेबसाइट्स और शैक्षणिक खेलों और सॉफ्टवेयर जैसे विभिन्न संसाधनों की समीक्षा प्रस्तुत करते हैं। हम न सिर्फ अनुभवी शिक्षाविदों और विषय विशेषज्ञों का मूल्यांकन पेश करते हैं बल्कि शिक्षा के क्षेत्र में काम करने वालों और काम करने का जज़्बा रखने वालों के नज़रिए भी प्रस्तुत करते हैं। यह समावेशी तरीका नज़रियों की समृद्ध विविधता को सुनिश्चित करता है। यह हमारे पाठकों को व्यापक और सुलभ समीक्षा प्रदान करता है जो शैक्षणिक सामग्रियों में उनकी पसन्द का बोध करवा सकती हैं।

मैथ स्पेस

46 ▶ बीजगणितीय टाइल्स की समीक्षा

### टियरआउट

टियरआउट शिक्षक के तत्काल उपयोग के लिए डिज़ाइन किया गया है। यह कक्षा में अवलोकन और चर्चा को प्रेरित करने के लिए लगाया जाने वाला पोस्टर हो सकता है, या यह फ़ोटोकॉपी करके साझा करने के लिए एक वर्कशीट हो सकती है। इसके साथ हमेशा शिक्षक के लिए प्रश्न और मार्गदर्शन होता है।

मैथ स्पेस

53 ▶ पतंग परिवार : एक वंशवृक्ष की जाँच-पड़ताल!

### पुलआउट

पुलआउट खण्ड में, गणित में बुनियादी अवधारणाओं को सिखाने के लिए करके सीखना (Hands On) एवं गतिविधि-आधारित तरीके को शामिल किया गया है। यह खण्ड आमतौर पर प्रचलित गणित की गलत धारणाओं और उनको सुलझाने के तरीकों, मैनिप्यूलेटिव्स और उनसे विद्यार्थियों में गणित की समझ बढ़ाने और गणितीय कौशल का विकास करने के तरीकों पर; और इन सबसे बढ़कर गतिविधि-आधारित शिक्षा में लेखन और दस्तावेज़ीकरण कौशल को शामिल करने के तरीकों पर बात करता है। पुलआउट थीम आधारित खण्ड है और, जैसा कि इसके नाम से ही जाहिर है, इसे मुख्य पत्रिका से अलग करके इस्तेमाल किया जा सकता है।

पद्मप्रिया शिराली

गणित बराबर गर्म? गणित बराबर ठण्डा?

### ऑनलाइन लेख

कुमार गन्धर्व मिश्र

दूषित नमूनों को पहचानना : बाइनरी अंकगणित पर  
आधारित एक कम्प्यूटेशनल चिन्तन गतिविधि



# फ़ाउंडेशनल स्टेज और आरम्भिक चरणों में डेटा प्रबन्धन सिखाने के लिए बड़ी किताबों का इस्तेमाल

मनीषा गोयल और  
रीमा कौर

‘बड़ी किताबें’ और साथ-साथ पढ़ने के अनुभव

‘बड़ी किताबें’ सामान्य से बड़े आकार की कहानी की किताबें होती हैं। इनके पन्नों पर अक्सर बड़ी-बड़ी तस्वीरें होती हैं; शब्द कम होते हैं और बड़ी साइज़ में छपे होते हैं। ऐसी किताब को एक से ज़्यादा पढ़ने वाले एक साथ बड़े आराम से पढ़ सकते हैं। पिछले कुछ दशकों में, कक्षा में छोटे बच्चों को लेकर ‘साथ-साथ पढ़ने’ के अनुभवों के लिए बड़ी किताबों का इस्तेमाल बढ़ा है (Karges-Bone, 1992) (3)।



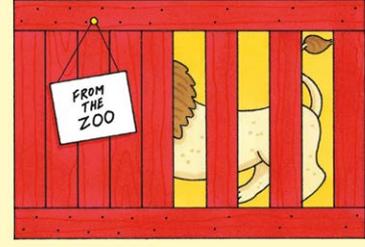
चित्र-1 : साथ-साथ पढ़ने का अनुभव।

की-वर्ड : बुनियादी साक्षरता और संख्या-ज्ञान; फ़ाउंडेशनल स्टेज ; आरम्भिक चरण; आरम्भिक बाल्यावस्था शिक्षा; डेटा प्रबन्धन; बड़ी किताबें; साथ-साथ पढ़ना; विषयों का एकीकरण

### कक्षा का शब्दचित्र-1

कल्पना करें – कक्षा 2 के कुछ बच्चे अपनी शिक्षिका के आस-पास इकट्ठे होकर शिक्षिका की गोद में खुली एक बड़ी किताब में झाँक रहे हैं। मुखपृष्ठ पर लिखा है 'Dear Zoo' (प्यारे चिड़ियाघर)। शिक्षिका रिनी बच्चों का ध्यान मुखपृष्ठ की ओर ले जाती हैं, जहाँ एक बड़े बक्से में बन्द बब्बर शेर कुछ-कुछ दिख रहा है। किताब के शीर्षक और चित्र पर कुछ देर बात करने के बाद रिनी पन्ना उठाकर पहले पेज पर आती हैं, और पढ़ती हैं, 'मैंने चिड़ियाघर को लिखा था कि मुझे एक पालतू जानवर भेजें।' इस पृष्ठ के ज्यादातर हिस्से पर बड़ा-सा बक्सा बना है, जिस पर लिखा है, 'बहुत भारी!' बच्चे अन्दाज़ा लगाने की कोशिश करते हैं कि कौन-सा भारी जानवर पालतू पशु की तरह पाला जा सकता है। कुछ कहते हैं हाथी, तो कुछ हिप्पो! रिनी पन्ना पलटती हैं – ये तो हाथी है! वे आगे पढ़ती हैं, 'उन्होंने मुझे एक... हाथी भेज दिया! वह बहुत-ही बड़ा था! मैंने उसे वापस भेज दिया।' रिनी ऐसे सवाल पूछती हैं जो बच्चों को सोचने का मौक़ा देते हैं – हम हाथी को कहाँ रखेंगे? वो क्या खाएगा? और कहानी आगे बढ़ती जाती है... इसके बाद के पन्नों की तस्वीरें कुछ और जानवरों का कुछ-कुछ हिस्सा दिखाती हैं – जिराफ़, बब्बर शेर, ऊँट, साँप, बन्दर, मेंढक, और आखिरकार कुत्ते का पिल्ला! रिनी हर बार या तो खुद पन्ना पलटती हैं या किसी बच्चे को पन्ना पलटने को कहती हैं। कुछ बच्चे पिल्ले को पालतू के तौर पर रखने को राज़ी नहीं हैं – बन्दर पालने में ज्यादा मज़ा आएगा, है ना!

## Dear Zoo



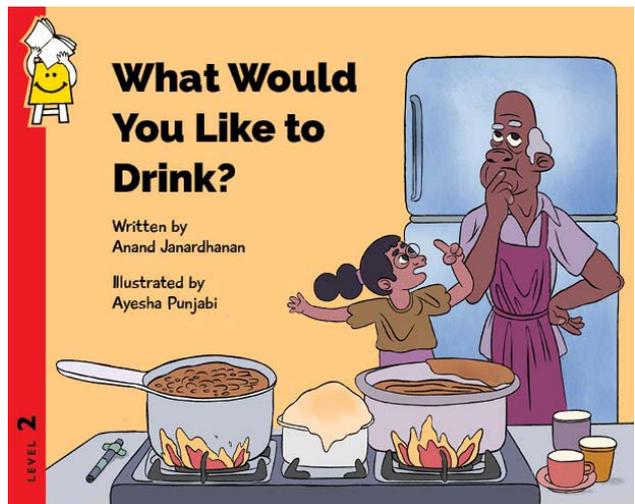
### Rod Campbell

चित्र-2 : रॉड कैम्पबैल की पुस्तक 'Dear Zoo' आपसी बातचीत और क्रिया करते हुए पढ़ने वाली किताब है। पन्ना उठाकर (lift-the-flap) पढ़ने वाली यह पुस्तक, बड़ी किताब के रूप में भी मिलती है।

किताब पढ़ने के बाद, रिनी ने बड़ी किताब का इस्तेमाल कई अन्य गतिविधियों के लिए किया, जैसे बच्चों से इस बारे में बात की कि वे कौन-से पालतू जानवर को अपने लिए रखना चाहेंगे; उन्हें जानवरों की और कहानियाँ सुनाई; जानवरों के मुखौटे बनवाए और उनके रोल-प्ले करवाए; और बच्चों से चिड़ियाघर को चिट्ठी लिखवाई जिसमें उन्होंने अपने लिए एक पालतू जानवर पाने का अनुरोध किया।

जैसा कि ऊपर बताया गया है, रिनी बच्चों में साक्षरता के कौशल का विकास करने के लिए, उन्हें साथ-साथ पढ़ने के अनुभव देने के लिए अपने क्लासरूम में अक्सर बड़ी किताबों का इस्तेमाल करती हैं। लेकिन आजकल वे कहानियों के ऐसे स्रोतों की तलाश भी कर रही हैं, जिनसे अन्य विषयों में उनका शिक्षण समृद्ध हो सके। एक रोज़ उन्हें कहानी की एक और किताब मिली – 'What would you like to drink?' इसे आनन्द जनार्दन ने लिखा है और चित्रांकन आयशा पंजाबी ने किया है (Janardhan, 2021) (2)। (यह हिन्दी में 'आप क्या पिएँगे?' नाम से उपलब्ध है। इसका हिन्दी अनुवाद डॉ. अमरदीप ने किया है।) यह कहानी तारा नाम की छोटी बच्ची के बारे में है। उसके घर पर जन्मदिन की पार्टी है, जिसमें 15 से ज्यादा मेहमान आए हैं। वे सब क्या-क्या पीना चाहते हैं, यह याद रखने में तारा अपने दादाजी की मदद करती है। इस कहानी में किसी रोज़मर्रा की समस्या के सन्दर्भ में डेटा इकट्ठा करने और व्यवस्थित करने की अवधारणा निहित है। रिनी इस कहानी को पढ़ती हैं, और उन्हें अपनी गणित की कक्षा के लिए एक शानदार ख्याल आता है!

चित्र-3 : किताब 'What would you like to drink?', जिसे आनन्द जनार्दन ने लिखा है और चित्रांकन आयशा पंजाबी ने किया है (Janardhan, 2021) (2)। यह कहानी किसी रोज़मर्रा की समस्या के सन्दर्भ में डेटा का समूहीकरण करने और गिनती करने के बारे में बताती है।



## कक्षा का शब्दचित्र-2

रिनी ने इस कहानी का प्रिंटआउट बड़े फ्रॉन्ट में ए-3 आकार के कागज़ पर लिया, और इसका इस्तेमाल बड़ी किताब की तरह करना तय किया। वे इस बड़ी किताब को व्हाइटबोर्ड के स्टैंड पर लगाती हैं, और उसके अलग-अलग हिस्सों की ओर इशारे के लिए लकड़ी के रूलर का इस्तेमाल करती हैं। वे बड़ी किताब का इस्तेमाल करते हुए साथ-साथ पढ़ने का सत्र संचालित करती हैं, जिसमें वे बच्चों की गणितीय सोच को जगाने के लिए सवाल पूछती हैं। जब दादाजी हर पेय की मात्रा (गिलासों की संख्या) को लेकर उलझन में होते हैं, तो तारा उनकी मदद करती है। रिनी पूछती हैं, “आपको क्या लगता है कि तारा किस तरह से दादाजी की मदद करेगी?” कुछ बच्चों ने कहा, “तारा बारी-बारी से हर पेय का नाम लेगी और मेहमानों से अपनी-अपनी पसन्द के पेय के लिए हाथ खड़ा करने को कहेगी। वह उठे हुए हाथों की गिनती करके अपने दादाजी को बता देगी।” एक बच्चे ने कहा, “तारा मेहमानों से अपनी पसन्द के पेय के अनुसार कमरे के अलग-अलग कोनों में खड़ा होने को कहेगी।” एक अन्य बच्चे का जवाब ज़रा अलग था, “रैस्टोरेंट में खाना परोसने वालों की तरह तारा एक-एक मेहमान से उनके पेय का ऑर्डर ले सकती है।” इतनी तरह के जवाब पाकर रिनी बहुत खुश हैं! ये जवाब बताते हैं कि उनकी कक्षा के बहुत-से बच्चे डेटा प्रबन्धन की तकनीकों के औपचारिक परिचय के लिए तैयार हैं। फिर रिनी अगले दो पन्ने पलटती हैं। कहानी को आगे पढ़ने से पहले, वे बच्चों से कहती हैं कि तस्वीरों को देखकर बताएँ कि समस्या को हल करने का तारा का तरीका क्या था। रिनी की मदद से बच्चे इस नतीजे की ओर बढ़ते हैं कि पहले तारा कागज़ पर टेबल के एक कॉलम में अलग-अलग पेय की सूची बनाती है, जैसे चाय, कॉफ़ी, जूस और दूध। फिर वह हर मेहमान से उनकी पसन्द पूछकर उन्हें टेबल के अगले कॉलम में भरती जाती है। अब, कहानी को खत्म करके रिनी पूछती हैं, “तारा ने जो रास्ता निकाला, उसके बारे में आप लोग क्या सोचते हो? आप जो सुझा रहे थे, उससे यह कितना अलग है? आपके और तारा के तरीकों में क्या-क्या एक जैसा है? क्या आपको लगता है कि हम अपनी ज़िन्दगी में ऐसी ही जिन अन्य दिक्कतों का सामना करते हैं, उन्हें हल करने में यह तरीका काम आ सकता है?” बाद में, रिनी बच्चों से तालिका को देखकर, अलग-अलग पेय के बारे में मेहमानों की पसन्द पर अपनी राय बताने को भी कहती हैं। उदाहरण के लिए, यह अनुमान लगाना/आकलन करना कि कौन-सा पेय सबसे ज़्यादा पसन्द किया गया, कौन-सा सबसे कम माँगा गया, और दादाजी को इन पेय को बनाने में किन सामग्रियों की सबसे ज़्यादा ज़रूरत होगी आदि।

रिनी अपनी कक्षा में जो फ़ॉलोअप गतिविधियाँ करती हैं, वे इस प्रकार हैं :

- रिनी पूछती हैं, “अगर हम लोग कक्षा में पार्टी करें, तो आप लोग किस-किस तरह के पेय पीना पसन्द करेंगे?” बच्चों के जवाबों से छाछ, बेल का शर्बत, चाय और नीबू-पानी निकलकर आते हैं, जो कि ज़्यादातर स्थानीय रूप से भी पिए जाते हैं।
- हर पेय की मात्रा (गिलासों की संख्या) तय करने के लिए रिनी पूछती हैं कि क्या बच्चे वैसी ही तालिका बनाना चाहेंगे, जैसी तारा ने अपने दादाजी की मदद करने के लिए बनाई थी। सबसे पहले रिनी चार पेय के नाम लिखती हैं। वे कौशल नाम के बच्चे को आगे बुलाकर तालिका भरने के लिए कहती हैं। कौशल उसी तरह हर बच्चे से उसकी पसन्द का पेय पूछकर तालिका में एक-एक करके निशान लगाता जाता है, जिस तरह कहानी की किताब में तारा ने किया था। इसके नतीजतन चार्ट-1 तैयार हुआ :

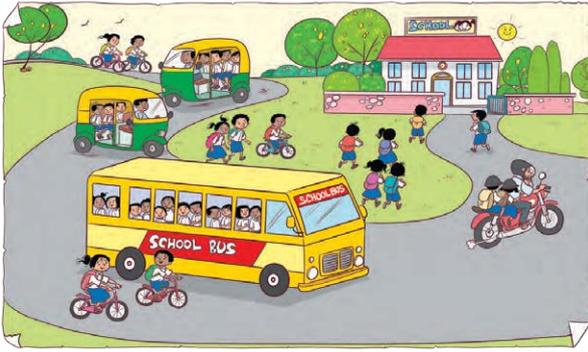
छाछ	बेल का शर्बत	चाय	नीबू पानी
✓✓	✓✓	✓✓	✓✓
✓✓	✓✓	✓	✓✓
✓✓	✓✓		✓✓
✓✓			✓✓
			✓✓
			✓
8	6	3	11

चार्ट-1: रिनी की कक्षा के बच्चों की पेय पदार्थों की पसन्द को दर्ज करने वाली तालिका।

- इसके बाद रिनी और बच्चे अपनी खुद की बड़ी किताब बनाना तय करते हैं। वे सालगिरह की पार्टी की जगह कक्षा की पार्टी रखते हैं, और उसमें अपने पसन्दीदा पेय रखते हैं। तो कहानी शुरू होती है, “एक बार की बात है – राजस्थान के सिरोही ज़िले के पोसालिया क़स्बे में, चौथी कक्षा के 27 बच्चों ने एक पार्टी रखना तय किया...” रिनी बड़ी किताब को रीडिंग कॉर्नर में रख देती हैं और देखती हैं कि बच्चे किताब के पास जमा होते हैं और उसे छोटे-छोटे समूहों में पढ़ते हैं।
- इस अनुभव के बाद, रिनी ने वादा किया कि आने वाले शनिवार को कक्षा पार्टी होगी, जहाँ सब मिलकर हर एक का पसन्दीदा पेय तैयार करेंगे और परोसेंगे!

आने वाले दिनों में रिनी इस ग्रेड स्तर के लिए, पाठ्यचर्या की अपेक्षा के मुताबिक, बच्चों के डेटा प्रबन्धन के कौशलों का और विकास करने के लिए पाठ्यपुस्तक (एनसीईआरटी की गणित की पाठ्यपुस्तक, कक्षा 2, अध्याय 11: आँकड़ों के साथ कार्य) (एनसीईआरटी, 2023) (9) में दिए गए प्रसंगों का इस्तेमाल करती हैं। पहले, वे चित्रों को ध्यान से देखने और उनका वर्णन करके विभिन्न प्रसंगों को समझने में बच्चों की मदद करती हैं। इसके बाद, बच्चे दी गई श्रेणियों, जैसे पसन्दीदा रंग, फलों और वाहनों के प्रकार आदि के लिए डेटा को गिनते हैं और इकट्ठा करते हैं। वे जो पाते हैं, उसे तालिका के रूप में दर्ज करते हैं, और सरल चित्रलेखों [pictographs] में दर्शाते हैं और चित्रलेखों को देखते हुए अपने निष्कर्षों पर चर्चा करते हैं।

चित्र के विषय में चर्चा करें और तालिका भरें।



स्कूल आने का तरीका	बच्चों की संख्या
	8

तालिका पढ़िए और चार्ट में विभिन्न तरीकों से स्कूल आने वाले छात्रों की संख्या दर्शाने के लिए चेहरे ☺ बनाइए! (☺ = 1 शिक्षार्थी)

चार्ट को देखो और रिक्त स्थानों को भरों।



- अधिकतर बच्चे \_\_\_\_\_ से स्कूल आते हैं।
- स्कूल में सबसे कम बच्चे \_\_\_\_\_ से आते हैं।
- बस से स्कूल आने वाले बच्चों की संख्या ऑटो-रिक्शा से स्कूल आने वाले छात्रों से \_\_\_\_\_ (अधिक/ कम) है।
- मोटरसाइकिल से स्कूल आने वाले बच्चों की संख्या साइकिल से स्कूल आने वाले बच्चों से \_\_\_\_\_ (अधिक/ कम) है।
- \_\_\_\_\_ से स्कूल आने वाले बच्चों की संख्या \_\_\_\_\_ से स्कूल आने वाले छात्रों से कम है।
- \_\_\_\_\_ से स्कूल आने वाले बच्चों की संख्या \_\_\_\_\_ से स्कूल आने वाले छात्रों से अधिक है।

Reprint 2024-25

Reprint 2024-25

चित्र-4 : स्रोत : एनसीईआरटी की गणित की पाठ्यपुस्तक, कक्षा 2, अध्याय 11: आँकड़ों के साथ कार्य, पृष्ठ 125-126 (एनसीईआरटी, 2023) (9)

इसके बाद, रिनी बच्चों को एक काम सौंपकर अपनी कक्षा में डेटा प्रबन्धन के विषय को समेटती हैं, जिसमें बच्चों ने पेय पदार्थों की जो तालिका पहले बनाई थी, उसका चित्रलेख उन्हें बनाना था। बच्चों ने जो चित्रलेख बनाया, वह सामने के पेज पर दिया गया है। बच्चों ने इसे बड़ी किताब में जोड़ दिया।

			
			
			
			
			
			
			
			
			
			
			
<b>छाछ</b>	<b>बेल का शर्बत</b>	<b>चाय</b>	<b>नीबू पानी</b>

चार्ट-2 : चार्ट-1 के आधार पर, रिनी की कक्षा के बच्चों की पेय पदार्थों की पसन्द को दर्शाता चित्रलेख।

### गणित सिखाने में बड़ी किताब का इस्तेमाल

रिनी का यह अनुभव गणित की किसी अवधारणा से बच्चों का परिचय कराने के लिए पढ़ने के अन्तरंग और सहभागी अनुभव का उदाहरण है। हालाँकि, आमतौर पर भाषा और साक्षरता के विकास के लिए तो ऐसे अनुभवों की अनुशंसा की जाती है<sup>1</sup>, लेकिन छोटे बच्चों के लिए गणितीय अवधारणाओं को तुकान्त बाल कविताओं और कहानियों जैसे कथात्मक वर्णनों में पिरोने को लेकर स्वीकृति और अमल बढ़ रहा है (एनसीएफ़-एफ़एस-2022, पृष्ठ 141) (7)। ऐसे एकीकृत दृष्टिकोण जटिल गणितीय विकास की अवधारणात्मक समझ में मददगार होते हैं और उसे विस्तार देते हैं। ऐसा इसलिए है क्योंकि जाने-पहचाने सन्दर्भों की वजह से बच्चे गणित को समझने के लिए अपने पूर्व-ज्ञान का इस्तेमाल कर पाते हैं। गणित और साहित्य को साथ मिलाने से नई शब्दावली गढ़ने के अवसर बनते हैं। इससे अमूर्त अवधारणाओं को एक-दूसरे से जोड़ा जा सकता है। साथ ही, यह भी दिखाने का मौक़ा मिलता है कि कैसे पूरी पाठ्यचर्या में गणित का इस्तेमाल किया जा सकता है (Koellner et al , 2009) (4)। हमने देखा कि रिनी के बच्चों ने तारा के दादाजी के लिए तरह-तरह के समाधान सुझाए। ऐसा इसलिए हुआ क्योंकि यह समस्या उनके जाने-पहचाने सन्दर्भों से जुड़ी थी, और वे उसको सुलझाने में पूरे मन से लग गए थे। यह पाया गया है कि छोटे बच्चों को मौक़ा दिया जाए तो वे अपने डेटा को प्रदर्शित करने के विविध तरीक़े अपनाते हैं – जैसे चित्रकारी/खाके बनाना, सरल चित्रलेख और बार ग्राफ़ बनाना, स्टिकी नोट्स से ब्लॉक चार्ट बनाना इत्यादि (English, 2013) (5)। यहाँ, एक सामान्य-सी सरल कहानी के इस्तेमाल ने रिनी के बच्चों को ऐसा ही मौक़ा दे दिया।

बच्चों के साहित्य के प्रकाशकों पर सरसरी नज़र डालने पर मालूम होता है कि बाज़ार में ऐसी कहानियों की किताबों की बाढ़ आ गई है जिनमें साफ़तौर पर गणितीय अवधारणाएँ पिरोई हुई हैं। आमतौर पर इन्हें 'स्टैम' बुक्स (STEM – Science–Technology–Engineering–Mathematics [विज्ञान–प्रौद्योगिकी–अभियांत्रिकी–गणित पुस्तकें]) कहा जाता है। शुरुआती सालों में, उनके कथानक में आमतौर पर पर्यावरणीय अध्ययन (EVS) और गणित से जुड़ी अवधारणाएँ पिरोई हुई होती थीं – जैसे कि पेड़-पौधे, स्वास्थ्य और स्वच्छता, पशु-पक्षी, गणितीय संक्रियाएँ, आकृतियाँ और वस्तुएँ, मापन, समय इत्यादि। भारत में बाल-साहित्य के लोकप्रिय प्रकाशकों की पुस्तकों के कुछ उदाहरण आगे दिए गए हैं।

<sup>1</sup> उदाहरण के लिए, बच्चों में कहानियों के लिए रुचि विकसित करना, छपी हुई सामग्री से परिचय बढ़ाना, पढ़ने के तरह-तरह के तरीक़े सामने रखना, शब्द-भण्डार को बढ़ाना, और पढ़ने के शुरुआती कौशलों का विकास करना, जिनमें शब्दों की पहचान और ध्वनियों व अक्षरों में रिश्ते बनाना शामिल है।

## How Do we weigh Appukuttan

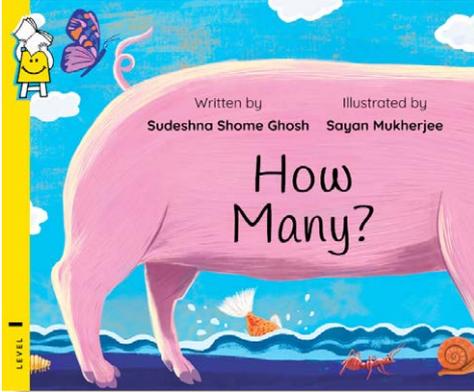
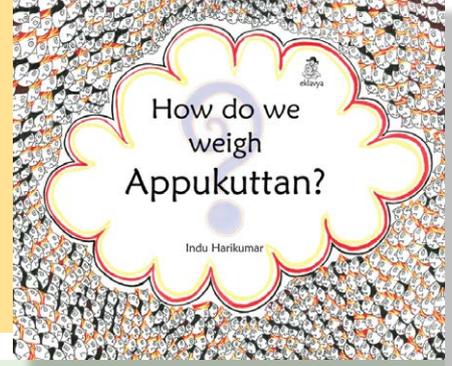
प्रकाशक : एकलव्य

लेखक : इन्दु हरिकुमार

चित्रांकन : इन्दु हरिकुमार

शामिल अवधारणाएँ : वजन (मानक व अमानक इकाइयाँ)

(‘अप्पुकुट्टन को कैसे तौलें’ नाम से हिन्दी में उपलब्ध है।)



## How Many

प्रकाशक : प्रथम बुक्स

लेखक : सुदेशना शोम घोष

चित्रांकन : शायन मुखर्जी

शामिल अवधारणाएँ : गिनती

(‘बोलो कितने’ नाम से हिन्दी में उपलब्ध है।)

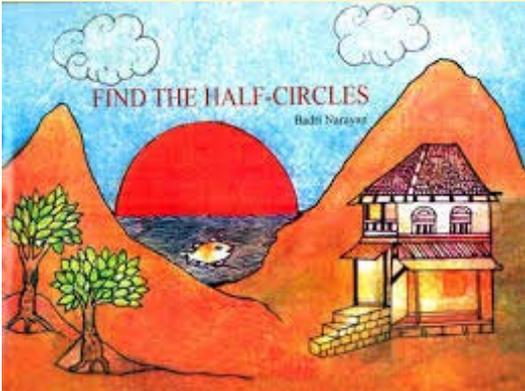
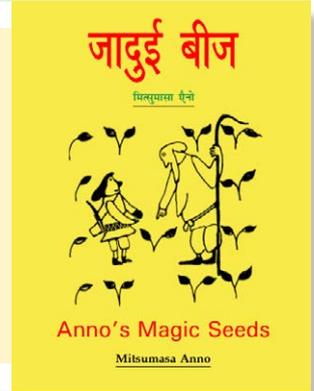
## जादुई बीज (Anno's Magic Seed)

प्रकाशक : भारत ज्ञान विज्ञान समिति

लेखक : मित्सुमासा ऐनो

हिन्दी अनुवाद : अरविन्द गुप्ता

शामिल अवधारणाएँ : जोड़, गुणा तथा उच्च कक्षाओं में अंकगणित और ज्यामितीय की अवधारणाएँ



## Find the Half Circle

प्रकाशक : नेशनल बुक ट्रस्ट

लेखक : बद्री नारायण

शामिल अवधारणाएँ : आकृतियाँ (अर्ध-वृत्त)

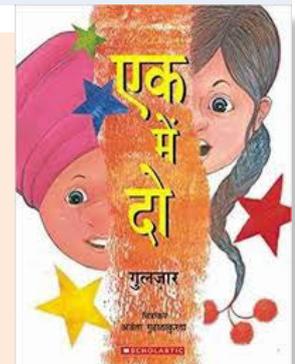
## एक में दो (Two In One)

प्रकाशक : स्कोलास्टिक

लेखक : गुलज़ार

चित्रांकन : अंजना गुहा ठाकुरता

शामिल अवधारणाएँ : गिनती

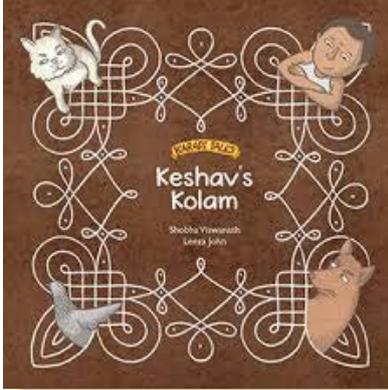


### When Will Amma Be Back

प्रकाशक : प्रथम बुक्स  
लेखक : प्रतिभा स्वामीनाथन  
चित्रांकन : अलंकृता अमाया  
शामिल अवधारणाएँ : मापन (समय)



When Will Amma Be Back?  
Author: Pratibha Swaminathan  
Illustrator: Alankrita Amaya



### Keshav's Kolam

प्रकाशक : करडी टेल्स  
लेखक : शोभा विश्वनाथ  
चित्रांकन : लीजा जॉन  
शामिल अवधारणाएँ : पैटर्न, सममिति (Symmetry)

### Mina Makes A Dash

प्रकाशक : प्रथम बुक्स  
लेखक : अंजली अलप्पट  
चित्रांकन : योगी चन्द्रशेखरन  
शामिल अवधारणाएँ : मापन (लम्बाई)



Mina Makes a Dash  
Author: Anjali Alappatt  
Illustrator: Yogee Chandrasekaran



Gola Gola  
Author: Aithihya Ashok Kumar  
Illustrator: Aithihya Ashok Kumar

### Gola Gola

प्रकाशक : प्रथम बुक्स  
लेखक : अथैया अशोक कुमार  
चित्रांकन : अथैया अशोक कुमार  
शामिल अवधारणाएँ : वेन डायग्राम

### The Animal Plot

प्रकाशक : प्रथम बुक्स  
लेखक : लोकेश खोड़के  
चित्रांकन : लोकेश खोड़के  
शामिल अवधारणाएँ : बार ग्राफ़



The Animal Plot  
Author: Lokesh Khodke  
Illustrator: Lokesh Khodke

चित्र-5 : भारत में बाल-साहित्य के कुछ नमूने।

बच्चों का ऐसा साहित्य शिक्षकों के लिए बेहतरीन संसाधन साबित हो सकता है। इसे वे अपनी गणित की कक्षा में तरह-तरह से शामिल कर सकते हैं। इसके साथ ही, शिक्षक गैर-स्टैम [non-STEM] बाल-साहित्य में गणितीय विचारों को जोड़ते हुए बच्चों के साथ काम करने की सम्भावना भी तलाश सकते हैं। उदाहरण के लिए, शिक्षक अपनी कल्पनाशक्ति का इस्तेमाल करके, पीढ़ी-दर-पीढ़ी सुनी-सुनाई जा रही कहानियों, जैसे 'जैक एण्ड द बीनस्टॉक' या 'द मंकी एण्ड द कैपसैलर (टोपीवाला और बन्दर)', को गणित के नज़रिए से अपना सकते हैं। वे इनके ज़रिए गिनती, जोड़ना, घटाना, मापन, तुलना जैसी विभिन्न अवधारणाएँ सिखा सकते हैं। एनसीईआरटी की गणित की नई पाठ्यपुस्तकों में भी गणितीय कहानियाँ बनाने के काफ़ी प्रसंग हैं। कहानियों का इस्तेमाल बच्चों को समस्या समाधान के कौशल विकसित करने का सहज अवसर भी देता है, जो गणित की कक्षा में शिक्षण का एक महत्वपूर्ण लक्ष्य भी है (एनसीएफ़-एसई-2023, पृष्ठ 269 (8))।

### डेटा का प्रबन्धन

बुनियादी चरण में, संख्या और उसके सम्बन्ध, गणित की बुनियादी संक्रियाएँ, आकृतियाँ और स्थानगत समझ, पैटर्न, और मापन के साथ ही डेटा प्रबन्धन गणित के अधिगम का प्रमुख घटक या क्षेत्र है। आज की दुनिया में, हर ओर से बड़ी तादाद में डेटा की लगातार बरसात हो रही है। ऐसे में, जीवन के लगभग हर क्षेत्र में बार ग्राफ़, पाई चार्ट [pie graph] इत्यादि जानकारियों के आदान-प्रदान के आम तरीक़े बन गए हैं। अतः डेटा प्रबन्धन की अच्छी समझ होना बच्चों की गणितीय शिक्षा का महत्वपूर्ण घटक है (Shirali, 2016) (10)। 'बुनियादी चरण के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा' (एनसीएफ़-एफ़एस-2022) में डेटा प्रबन्धन को 'डेटा का संग्रह करने के बारे में समझना, उसे एकत्र करना और उसका विश्लेषण करना' के रूप में परिभाषित किया गया है (एनसीएफ़-एफ़एस-2022, पृष्ठ 121) (7)। इस रूपरेखा के अनुसार, बुनियादी चरण में डेटा के प्रबन्धन के तहत दी गई चीज़ों को समूहों में छाँटना, वर्गीकृत करना और उन्हें गिनना शामिल है (एनसीएफ़-एफ़एस-2022, पृष्ठ 333) (7)।

स्कूल से इतर वास्तविक जीवन के सन्दर्भों में, बच्चे स्वाभाविक रूप से चीज़ों का समूहीकरण और गिनती करते हैं, जैसे कि अपने खिलौनों से खेलते वक़्त, खाने की मेज़ लगाते और समेटते हुए। वे जब पहली बार स्कूल के औपचारिक दायरे में दाख़िल होते हैं, तो उनके ये अनुभव विस्तार पाते हैं – हाज़िरी का समय, अपने लिए खेल का चुनाव करना, किसी प्रतियोगिता में शामिल होना या उसे देखना ऐसे ही कुछ अवसर हैं।

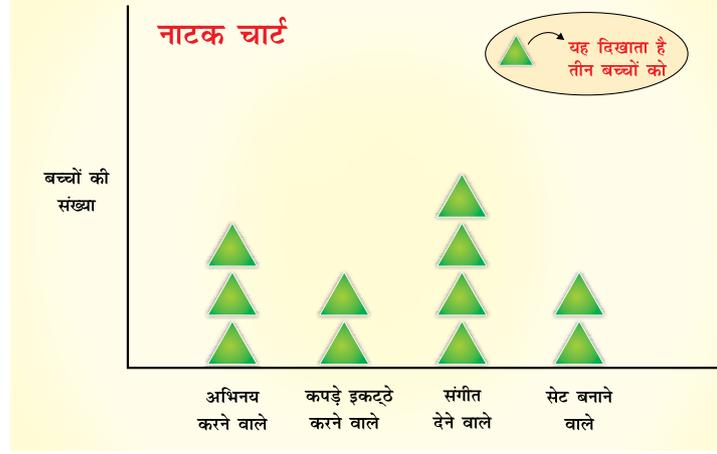
जब बच्चे शुरुआती बाल्यावस्था में वास्तविक अनुभवों के ज़रिए छाँटने और वर्गीकरण करने के कौशल विकसित करते हैं, तब उन्हें चित्रलेख और ब्लॉक चार्ट का इस्तेमाल करके इस डेटा को प्रदर्शित करना सिखाने में मदद की जानी चाहिए। ऐसे अनुभव बच्चों को अपने आस-पास अलग-अलग पैटर्न पर ध्यान देने और ऐसे कौशल विकसित करने में मददगार होते हैं, जिन्हें वे स्कूली शिक्षा के आगे के चरणों में डेटा प्रबन्धन के लिए इस्तेमाल कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, आरम्भिक चरण में, डेटा का संग्रह, उसे व्यवस्थित करना और उसे दर्शाना, तुलनात्मक रूप से अधिक अमूर्त रूप ले लेता है – जैसे कि टैली चिह्न [tally marks], ग्राफ़ बार, पाई चार्ट बनाना। इसके साथ ही, इस चरण में ऐसे प्रस्तुतिकरणों को पढ़ने, उनके अर्थ को समझने तथा उनसे नतीजे निकालने की क्षमता का विकास होता है (Shirali, 2016) (10)।

### डेटा प्रबन्धन के बारे में बच्चों की समझ में कमियाँ

जैसे-जैसे बच्चे बड़े होते हैं, और बुनियादी चरण से आरम्भिक चरण और उससे आगे बढ़ते हैं, वैसे-वैसे उन्हें गणित के साथ ज़्यादा अमूर्त रूपों में काम करना पड़ता है। अफ़सोस की बात है कि आरम्भिक गणित में डेटा का प्रबन्धन उपेक्षित क्षेत्र है। अगर शुरुआती सालों में बच्चों ने ठोस रूपों में जानकारियों को छाँटने और उनका वर्गीकरण करने का अभ्यास नहीं किया है, तो उनके लिए तालिका, चार्ट और ग्राफ़ के रूप में अमूर्त डेटा के साथ काम करना ज़्यादा मुश्किल हो जाता है। जैसे हो सकता है कि ऐसा कोई बच्चा, कक्षा 4 का विद्यार्थी होने के बावजूद सामने के पृष्ठ पर दिए गए चार्ट-3 के चित्रलेखों को देखकर निम्नलिखित बातों को समझने में मुश्किलों का सामना करे—

- चित्रलेख का हर हिस्सा किसका प्रतिनिधित्व करता है (जैसे प्रत्येक हरा त्रिकोण 3 बच्चों का प्रतिनिधित्व करता है), चार्ट का शीर्षक और डेटा के बारे में अन्य लेबल।
- कि इस चार्ट को देखकर, हर काम में लगे बच्चों की संख्या और बच्चों की कुल संख्या की गणना की जा सकती है।
- यह कि 'ज़्यादा', 'कम' और 'किसी के बराबर' को इस चार्ट के ज़रिए जाना जा सकता है। उदाहरणस्वरूप, सबसे ज़्यादा बच्चे कौन-सा काम कर रहे हैं?

- कि ये सारी जानकारी इस एक चार्ट में ही दिखाई जा सकती है।
- कि ये सारी जानकारी उनकी रोजमर्रा की ज़िन्दगी से जुड़ी हुई है, और वे खुद भी अपने आस-पास से इस तरह का डेटा इकट्ठा कर सकते हैं और इस प्रकार दिखा सकते हैं।



**चार्ट-3 :** नाटक के लिए किसी कक्षा के बच्चों द्वारा किए जा रहे अलग-अलग कामों को दर्शाता चित्रलेख।

स्रोत : एनसीईआरटी की गणित की पाठ्यपुस्तक; कक्षा 4, अध्याय 14: स्मार्ट चार्ट, हिन्दी पृष्ठ 167, (एनसीईआरटी, 2007/2024)।

जैसे-जैसे बच्चे ऊँची कक्षाओं में जाते हैं, डेटा ज़्यादा जटिल तरीकों से पेश किया जाने लगता है। डेटा को टैली मार्क्स (मिलान चिह्नों), बार ग्राफ़, पाई चार्ट आदि का उपयोग करके प्रस्तुत किया जाता है। बच्चे मिलान चिह्नों का पाँच के समुच्चयों में ग़लत तरह से समूह बना सकते हैं, वे पैमाने के इस्तेमाल में अस्पष्टता के कारण ग्राफ़ की ग़लत व्याख्या कर सकते हैं, या भिन्नो को समझने में मुश्किल की वजह से पाई चार्ट की ग़लत व्याख्या कर सकते हैं।

### सारांश

डेटा प्रबन्धन के बारे में ग़लतफहमियों के कारण लगभग वैसे ही हैं जैसे कि अन्य गणितीय अवधारणाओं के मामले में हैं— पाठ्यपुस्तकों में विषयवस्तु को किस क्रम में रखा गया है और किस तरह से पेश किया गया है; इसके साथ ही शिक्षकों की शिक्षणशास्त्रीय कमियाँ हैं जिनकी वजह से बच्चों को वास्तविक और अर्थपूर्ण स्थितियों में डेटा का संग्रह करने, छाँटने और दर्शाने का व्यावहारिक अनुभव ज़्यादा नहीं मिल पाता है। बाल-साहित्य का उपयोग क्लासरूम में गणितीय अवधारणाओं को विकसित करने और अमल में लाने के लिए ऐसे अर्थपूर्ण प्रसंग उपलब्ध करवाने में मददगार हो सकता है, जो बच्चों के लिए मायने रखते हों। खासतौर पर बड़ी किताबों की बात करें, तो ये नन्हें शिक्षार्थियों के साथ काम के लिए उनके विकास के अनुरूप उपयुक्त साधन हैं – उनके बड़े और देखने में आकर्षक पन्ने डेटा प्रबन्धन की अवधारणाओं को प्रभावी रूप से दर्शाते हैं, और सीखने की प्रक्रिया को आपसी बातचीत और क्रियाओं के साथ सुगम बनाते हैं। जब शिक्षक मौजूदा कहानी की किताबों से बड़ी किताबें बनाते हैं, या बच्चों से बातचीत करते हुए और कहानियों पर उनके साथ मिलकर बड़ी किताबें बनाते हैं, तो इससे शिक्षण के लिहाज़ से समृद्ध और प्रासंगिक सन्दर्भ निकलकर आते हैं। ऐसे सन्दर्भ गणित के शिक्षण तक ही सीमित नहीं होते हैं, बल्कि भाषा और अन्य विषयों, जैसे 'हमारे आस-पास की दुनिया' (पर्यावरण अध्ययन) {*The World Around Us* (EVS)}, के लिए भी हमें ज़रूरी सन्दर्भ मिलते हैं। बच्चे भी अपने फुरसत के समय में बड़ी किताबों को बार-बार पढ़ना पसन्द करते हैं, जो पढ़ने में उनकी दिलचस्पी बढ़ाने और उन्हें उत्कट पाठक बनाने के उद्देश्य को पूरा करता है (कार्गस-बोन, 1992) (3)।

### References:

1. *Didi's Knowledge* (English), written by Rachita Udaykumar, illustrated by Kaveri Gopalakrishnan, published by Pratham Books (© Pratham Books, 2015) under a CC BY 4.0 license on StoryWeaver. Read, create and translate stories for free on [www.storyweaver.org.in](http://www.storyweaver.org.in)

2. Janardhan, A. (2021). *What would you like to drink?* <https://storyweaver.org.in/>. <https://storyweaver.org.in/en/stem-literacy-programme/stories/371579-what-would-you-like-to-drink?language=en>
3. Karges-Bone, L. (1992). Bring on the Big Books. *The Reading Teacher*, 45(9), 743–744. <http://www.jstor.org/stable/20200981>
4. Koellner, K., Wallace, F. H., & Swackhamer, L. (2009). Integrating Literature to Support Mathematics Learning in Middle School. *Middle School Journal*, 41(2), 30–39. <https://doi.org/10.1080/00940771.2009.11461710>
5. English, L. D. (2013). Surviving an Avalanche of Data. *Teaching Children Mathematics*, 19(6), 364–372. <https://doi.org/10.5951/teacchilmath.19.6.0364>
6. National Council for Educational Research and Training (NCERT). (2007/2024). *Math magic (Class 4)*. <https://ncert.nic.in/textbook.php?demh1=0-14>
7. National Council for Educational Research and Training (NCERT). (2022). *Foundational Stage National Curriculum Framework*. [https://ncert.nic.in/pdf/NCF\\_for\\_Foundational\\_Stage\\_20\\_October\\_2022.pdf](https://ncert.nic.in/pdf/NCF_for_Foundational_Stage_20_October_2022.pdf)
8. National Council for Educational Research and Training (NCERT). (2023). *School Education National Curriculum Framework*. [https://ncert.nic.in/pdf/NCFSE-2023-August\\_2023.pdf](https://ncert.nic.in/pdf/NCFSE-2023-August_2023.pdf)
9. National Council for Educational Research and Training (NCERT). (2023). *Joyful mathematics (Class 2)*. <https://ncert.nic.in/textbook.php?bejm1=0-11>
10. Shirali, P. (2016) Teaching data handling. *At Right Angles*, 5(3). pp. 1-16. ISSN 2582-1873 <https://publications.azimpremjiuniversity.edu.in/3142/1/data%20handling.pdf>



**मनीषा गोयल** ने दिल्ली के निजी और सरकारी विद्यालयों में प्राथमिक स्कूल की शिक्षिका के तौर पर 12 साल पढ़ाया है। पढ़ाने के साथ ही उन्होंने तक्ररीबन 5 साल तक अपने प्राथमिक स्कूल के पुस्तकालय का प्रबन्धन भी किया था। उन्होंने साहित्य के साथ-साथ गणित में अपने विद्यार्थियों की दिलचस्पी बढ़ाने के लिए काम किया है। उन्होंने दिल्ली विश्वविद्यालय से आरम्भिक शिक्षा में स्नातक और भारत रत्न डॉ. बी.आर.अम्बेडकर विश्वविद्यालय दिल्ली से शिक्षा में स्नातकोत्तर की डिग्री हासिल की हैं। उनसे [manisha.npv@gmail.com](mailto:manisha.npv@gmail.com) पर सम्पर्क किया जा सकता है।

**रीमा कौर** अजीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलूरु के स्कूल ऑफ़ कंटीन्यूइंग एजुकेशन एंड यूनिवर्सिटी रिसोर्स सेंटर (SCE-URC) में सहायक प्रोफ़ेसर हैं। उन्होंने गुरु गोबिन्द सिंह इन्द्रप्रस्थ विश्वविद्यालय, दिल्ली से बीएड किया है और भारत रत्न डॉ. बी.आर.अम्बेडकर विश्वविद्यालय दिल्ली से शिक्षा में स्नातकोत्तर की डिग्री हासिल की है। आरम्भिक भाषा एवं साक्षरता, और आरम्भिक बाल्यावस्था शिक्षा उनकी रुचि के क्षेत्र हैं। रीमा कहती हैं कि वे स्कूल में गणित से डरती थीं, और उन्हें यकीन नहीं हो रहा है कि अब वे गणित की पत्रिका के लिए लेख लिख रही हैं।

उन्से [rima.kaur@azimpremjifoundation.org](mailto:rima.kaur@azimpremjifoundation.org) पर सम्पर्क किया जा सकता है।

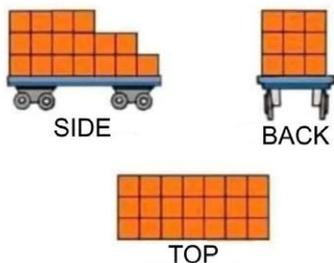


**अनुवाद :** हिमालय तहसीन    **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी    **कॉपी एडिटर :** शहनाज़

## पता लगाएँ!

यह सवाल हमारे व्हाट्सएप ग्रुप पर आया था।

**ट्रक में कितने (घन) गुटके हैं?**



क्या इस सवाल का केवल एक ही सही उत्तर है?

यह उन विद्यार्थियों के लिए भी एक बेहतरीन खोज-बीन का सवाल है जिन्होंने आयतन की अवधारणा नहीं पढ़ी है। वास्तव में, ऐसे विद्यार्थियों से ही बेहतर जवाब मिल सकते हैं। इंटरलॉकिंग क्यूब्स के साथ दी गई जानकारी के आधार पर मॉडल बनाएँ और अपनी रचनात्मकता दिखाएँ! अपने हल हमें [AtRightAngles.editor@apu.edu.in](mailto:AtRightAngles.editor@apu.edu.in) पर भेजें।

# गणितीय विमर्श : सही जवाबों से आगे जाना

## प्राची एम.

सर्दी का एक दिन था। सभी विद्यार्थी प्रार्थना सभा के लिए मैदान में इकट्ठा हो चुके थे। हवा में घुले हुए राष्ट्रगान के मधुर सुर और अन्य जोशीले राग सीखने के लिए दिन का माहौल शानदार बना रहे थे। जैसे ही संगीत के अन्तिम स्वर मद्धम पड़े, शिक्षक ने पूछा, “14 का पहाड़ा कौन सुनाएगा?” कुछ विद्यार्थियों ने अपने हाथ उठा दिए, जबकि कुछ दूसरों के पीछे छिपने लगे। “चलो कक्षा-3 से शुरू करते हैं, आर्यन तुम बताओ कि चौदह-सत्ते (14×7) कितने होते हैं?” आर्यन थोड़ा घबराया हुआ नज़र आया और कोशिश करने के बावजूद भी वह याद नहीं कर सका कि 14×7 कितना होगा।

प्रार्थना सभा के बाद, शिक्षक ने बड़े गर्व से मुझे बताया कि कैसे उनके कुछ विद्यार्थी 30 तक का पहाड़ा सुना सकते हैं। बाद में, चौथे दर्जे की एक कक्षा में एक विद्यार्थी ने दो अंकों वाली संख्या के गुणा को बिना किसी गलती के हल कर दिया, लेकिन यह पूछने पर कि दूसरे अंक से गुणा करते समय उसने ‘0’ क्यों लिखा, उसने माना कि उसने तो मात्र निर्देशों का पालन किया। इन दो वाक्यांतों से मुझे यह स्पष्ट हो गया कि कैसे स्कूली गणित अकसर रटने और सवाल-जवाब की बातचीत तक ही केन्द्रित रहता है और संख्याओं को समझने में निहित आनन्द और रचनात्मकता को दबा देता है।

## गणितीय विमर्श क्या है?

गणित की कक्षा में होने वाले संवाद को ही गणितीय विमर्श के रूप में जाना जाता है। अधिकतर कक्षाओं में अधिकांशतः ‘सुधारात्मक विमर्श’ (correcting discourse) ही होता है, जिसमें संवाद केवल विद्यार्थियों द्वारा शिक्षकों के सवालों के जवाब देने और शिक्षकों द्वारा जवाब सही है या गलत बताने तक ही सीमित रहता है। ‘सही जवाब’ तक पहुँचने के लिए विद्यार्थियों द्वारा केवल निर्धारित विधि का ही पालन किया जाता है, जिससे विद्यार्थियों द्वारा प्रक्रिया को समझने की या उसके विश्लेषण की गुंजाइश समाप्त हो जाती है। हालाँकि, गणित की शिक्षा के लक्ष्यों का मक़सद तार्किक सोच विकसित करना, पैटर्न की व्याख्या करना, अनुमान लगाना, उनका खण्डन करना, पूर्वानुमानों को

की-वर्ड: संचार, अन्वेषण, तर्क, समझ, शिष्टता।

गणितीय प्रमाण के माध्यम से सिद्ध करना, समस्या का समाधान करना, धाराप्रवाह गणना करना और स्पष्टता एवं सटीकता से बात रखना है।

एक अच्छा गणितीय विमर्श तब होता है जब विद्यार्थी अपने विचारों को साझा करते हैं और एक-दूसरे के गणितीय विचारों को सुनते हैं, न कि तब जब बातचीत में केवल शिक्षक ही हावी रहता है। यह गणित को और भी अच्छे से समझने में विद्यार्थियों की मदद करता है क्योंकि वे समस्याओं के बारे में सोचने के अलग-अलग तरीके जान पाते हैं। यह उन्हें उनके गणितीय कौशलों में और ज़्यादा आत्मविश्वासी होने में भी मदद करता है क्योंकि वे गणित की अवधारणाओं को समझने और समझाने में बेहतर हो जाते हैं। इससे शिक्षकों को भी मदद मिलती है क्योंकि वे यह जान पाते हैं कि विद्यार्थी क्या समझते हैं और क्या नहीं। इससे उन्हें पता चल पाता है कि विद्यार्थियों की और भी अच्छे से सीखने में मदद कैसे की जा सकती है।

### गणितीय विमर्श को कक्षा में स्थापित करने का मेरा अनुभव

गणितीय विमर्श को बढ़ावा देने का एक प्रयास प्रारम्भिक कक्षाओं के साथ संख्या बोध (number sense) पर काम करने के दौरान किया गया। हमारी गणित की कक्षा के लिए कुछ नियम और मानदण्ड निर्धारित किए गए थे, जैसे दूसरों की बात सुनना, दूसरों की राय का सम्मान करना, अपनी राय के समर्थन में तर्क देना आदि। विमर्श स्थापित करते समय जो मुख्य नियम तय किया गया था वह था : **केवल सही उत्तर न बताएँ, बल्कि यह भी बताएँ कि आपने समस्या का समाधान कैसे किया।** इस प्रक्रिया में जिन दो रणनीतियों का व्यापक रूप से उपयोग किया गया, वे सवाल उठाना और गणितीय सोच समझाना थीं। अलग-अलग समय पर अलग-अलग तरीकों, जैसे एक-एक बच्चे से (one-to-one) बातचीत, जोड़ियों में काम करना, समूहों में काम करना, पूरी कक्षा का एक साथ विचार-विमर्श करना आदि का उपयोग किया गया। विद्यार्थियों ने अपनी गणितीय सोच को व्यक्त करने के लिए विभिन्न प्रतिरूपों (representations) और मॉडलों का भी उपयोग किया।

कक्षा-1 के विद्यार्थियों के साथ काम करते समय, शुरुआत में विद्यार्थी जो सोच रहे थे उसके बारे में बात करने के लिए उन्हें प्रेरित करना कठिन था। शुरुआती चरण में, एक-एक बच्चे से हमारी बातचीत बहुत अच्छी रही। बाद में, सामूहिक कार्य और पूरी कक्षा के साथ चर्चा के दौरान भी वे बातचीत करने में सक्षम हो गए थे। मैंने गौर किया कि कक्षा-3 के विद्यार्थियों में या तो सही उत्तर देने या फिर निष्क्रिय रूप से सुनने की प्रवृत्ति थी। इसलिए, मैंने हर बार विद्यार्थियों के उत्तर देने के बाद उनसे यह पूछना शुरू कर दिया, “यह उत्तर कैसे मिला?” शुरू में, मैंने पाया कि विद्यार्थी जो सोच रहे थे उन्हें उसे व्यक्त करने में कठिनाई हो रही थी और इसीलिए वे एक शब्द में ही जवाब दे रहे थे। ऐसे मौकों पर चर्चा को आगे बढ़ाने के लिए और ज़्यादा सवाल पूछना, जैसे “क्या तुम इस क्रम को समझ सकते हो?”, “इससे तुम्हारा क्या मतलब है?” वगैरह, सचमुच मददगार रहा। कभी-कभी विद्यार्थी टूटे-फूटे वाक्यों में जो कहना चाहते थे उसे समझकर व्यवस्थित व पूर्ण वाक्य बनाकर उनसे दोबारा यह पूछने से भी कि क्या वे यही कहना चाहते थे, बहुत मदद मिली। इससे विद्यार्थी अपने जवाबों की समीक्षा करके उन्हें सुधार सके और अपनी सोच को और स्पष्ट कर पाए। कुछ दिनों के अभ्यास के बाद, मैं तब बड़ी आनन्दित हुई जब विद्यार्थियों ने अपने सहपाठियों से यह पूछना शुरू कर दिया कि उन्हें उनके जवाब “कैसे?” मिले।

नीचे दिए गए उदाहरणों में, विद्यार्थियों के नज़रिए और सोच को समझने के लिए जाँच-पड़ताल वाला विमर्श (probing discourse) किया गया। इस विमर्श में, जिसका पहले जिक्र किया गया है, शिक्षक कई तरह के सवाल पूछते हैं। इस प्रकार का विमर्श प्रक्रियात्मक प्रवाह (procedural frequency) और वैचारिक समझ को प्रोत्साहित करने में मदद करता है।

### एक-एक बच्चे से बातचीत

कक्षा-1 के साथ जोड़ पर काम करते समय, विद्यार्थियों को ऐसे अलग-अलग प्रतिरूप (representations) बनाने के लिए कहा गया, जो उनके जवाबों को समझाते हों :



चित्र-1

‘रमेश के बगीचे में 5 जामुन के पेड़, 3 आम के पेड़ और 7 अमरूद के पेड़ हैं। बगीचे में कुल कितने पेड़ हैं?’

आप जो कर रहे हैं उसे आप कैसे लिख सकते हैं या चित्रित कर सकते हैं?

अनन्या ने समस्या को कैसे दर्शाया इसे चित्र-1 में दिखाया गया है।

शिक्षक : तुमने कैसे गिना?

अनन्या : मैंने गिना एक, दो, तीन... तेरह, चौदह, पन्द्रह।

शिक्षक तुरन्त ही समझ गए कि उसने ‘सभी को गिनने’ वाली विधि का प्रयोग किया है।

इससे हमें यह समझने में मदद मिलती है कि विद्यार्थी सीखने के ठीक किस स्तर पर हैं और यह उन्हें उस स्तर से आगे बढ़ने में सहायता करता है। इसके बाद, ऐसे सवालों को हल करने के और ज्यादा प्रभावी तरीकों का उपयोग करने में विद्यार्थियों की मदद करने के लिए हमने ‘काउंट-ऑन’ विधि (इसमें आप बड़ी संख्या से शुरू करके उसमें छोटी संख्या जोड़ते जाते हैं, जैसे 7 में 4 जोड़ने के लिए 7 से शुरू करके आगे 4 और गिनते हैं) का उपयोग करते हुए विभिन्न तरीकों पर काम किया।

जोड़ी में काम करते समय संवाद :

विद्यार्थियों ने अपने जोड़ीदार से इबारती सवाल पूछे, जिसे उन्होंने खुद ही गढ़ा था।

आर्यन : अगर मेरे पास 30 चॉकलेट्स हैं और उनमें से 6 मैं विराट को दे देता हूँ, तो मेरे पास कितनी चॉकलेट्स बचेंगी?

हर्ष : 22... (कुछ सोचने के बाद) नहीं, नहीं 24 बचेंगी।

आर्यन : कैसे?

हर्ष : 6 और 4 हुए 10। तो अगर मैं उनमें से 6 विराट को दे देता हूँ, तो मेरे पास 4 बचेंगी। और मेरे पास 30 में से 20 चॉकलेट्स हैं, तो मेरे पास होंगी 20 और 4...24 चॉकलेट्स।

उपरोक्त बातचीत से विद्यार्थी को अपनी सोच को परिष्कृत करने में और अपनी गणितीय रणनीति को आत्मविश्वास के साथ व्यक्त करने में मदद मिली।

प्रश्न : कौन-सी भिन्न बड़ी है :  $\frac{1}{7}$  या  $\frac{1}{4}$  ?





क्यों?

क्योंकि यदि मैं एक कागज़ को 7 हिस्सों में काटता हूँ, तो हरेक हिस्सा  $\frac{1}{7}$  होगा और यदि उसी कागज़ को 4 हिस्सा में काटता हूँ, तो हरेक हिस्सा  $\frac{1}{4}$  बनेगा।



“हाँ, जब हम इसे 4 हिस्सों में काटते हैं, तो हमें कम हिस्से मिलते हैं क्योंकि 4, 7 से छोटा है।”



लेकिन हमें किसकी तुलना करनी है? कितने हिस्से हैं इसकी या हरेक हिस्से के आकार (size) की?

हमें भिन्नो  $\frac{1}{4}$  और  $\frac{1}{7}$  की तुलना करनी है।



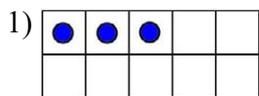
हाँ, विशाल क्या तुम और समझा सकते हो कि तुम्हें क्यों लगता है कि  $\frac{1}{4}$  बड़ा है  $\frac{1}{7}$  से?

तो, यदि इस कागज़ को चॉकलेट मानें और इसे 7 हिस्सों में बाँटें, तो हरेक हिस्सा  $\frac{1}{7}$  होगा। लेकिन यदि हम इसी चॉकलेट को 4 हिस्सों में बाँटें, तो हरेक हिस्सा  $\frac{1}{4}$  होगा। तो जब मैं इसके 7 हिस्से करता हूँ, तो मुझे हरेक हिस्से में कम मिलता है, बनिस्बत इसके जब मैं इसके 4 हिस्से करता हूँ।



ऐसा विमर्श विद्यार्थियों की भ्रान्तियों या ग़लत अवधारणाओं को पहचानने में मदद करता है, जो ऐसे विमर्श की अनुपस्थिति में अनजानी और अनसुलझी ही रह जाती हैं। यह तार्किकता विकसित करने, बेहतर समझ विकसित करने और बातचीत में आत्मविश्वास लाने में मदद करता है।

पूरी कक्षा के साथ चर्चा के दौरान संवाद :



चित्र-2

शिक्षक : आपको क्या दिखाई दे रहा है? (इस अभ्यास के पहले हम संख्याओं के ऐसे जोड़े बनाने पर काम कर चुके थे, जिनका योग 10 होता है।)

आशु : मुझे 3 दिख रहे हैं।

शिक्षक : हाँ, वहाँ 3 नीले बिन्दु हैं। उसके अलावा क्या दिख रहा है?

सौम्या : मुझे  $3+2+5=10$  दिख रहा है।

शिक्षक : कैसे सौम्या? क्या तुम और समझा सकती हो?

सौम्या : क्योंकि यहाँ 3 बिन्दु हैं और यदि हम 2 और जोड़ते हैं तो यह 5 बन जाएगा और बचे हुए 5 मिलकर 10 बनाएँगे।

टीचर : हाँ, तो सौम्या कह रही है कि अगर वह 3 और 2 जोड़ेगी तो 5 होगा और दोबारा 5 जोड़ने पर 10 बनेगा। क्या आप सभी सहमत हैं?

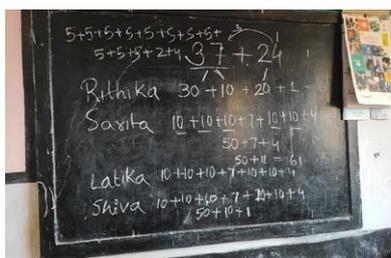
विद्यार्थी : हाँ

शिक्षक : हम और क्या देख सकते हैं?

दीपा : इसे हम  $10 - 7 = 3$  भी कह सकते हैं।

शिक्षक : क्या आप दीपा की बात से सहमत हैं?

2) कक्षा 3 में, हमने दो अंकों को जोड़ने के लिए विभिन्न रणनीतियों का उपयोग करने पर काम किया। विद्यार्थियों से आगे आकर सवाल  $37+24$  को हल करने का अपना तरीका समझाने को कहा गया।



विद्यार्थियों की रणनीति के साथ उनके नाम का उल्लेख करें।

चित्र-3

शिक्षक : क्या आप बता सकते हैं कि आपने सवाल को कैसे हल किया?

ऋतिका : मैंने 37 को 30 और 7 लिखा। इसी प्रकार 24 को 20 और 4 लिखा। फिर मैंने 30 और 20 को जोड़ा जो कि 50 हुए, ऐसे ही 7 और 4 को भी जोड़ा जो कि 11 हुए। फिर 50 और 11 को जोड़ा जो 61 हुए।

सरिता : मैंने 37 को 10, 10, 10 और 7 की तरह देखा। 24 को 10, 10 और 4 की तरह देखा। इसके बाद मैंने सभी 10 जोड़ लिए जो कि 50 हुए। 7 और 4 हुए 11, इसी तरह 50 और 11 को जोड़ा जो 61 हुए।

लतिका ने भी सरिता वाली रणनीति का प्रयोग किया।

शिक्षक : आपको क्या लगता है कौन-सा तरीका सवाल को हल करने का सबसे प्रभावी तरीका था?

राहुल : मुझे लगता है लतिका और सरिता द्वारा उपयोग किया गया  $10+10+10+\dots$  वाला तरीका प्रभावी तरीका है।

शिक्षक : अच्छा, तो राहुल को लगता है कि '10 में तोड़ना' और फिर जोड़ना प्रभावी तरीका है। बाकी लोग क्या सोचते हैं?

सरिता : मुझे लगता है कि ऋतिका का तरीका ज्यादा प्रभावी है।

शिक्षक : तुम्हें ऐसा क्यों लगता है?

सरिता : क्योंकि उसने सीधे ही 30 और 20 को जोड़ लिया, फिर 7 और 4 को जोड़ लिया, जो हर बार 10 को जोड़ने से ज्यादा प्रभावी तरीका है।

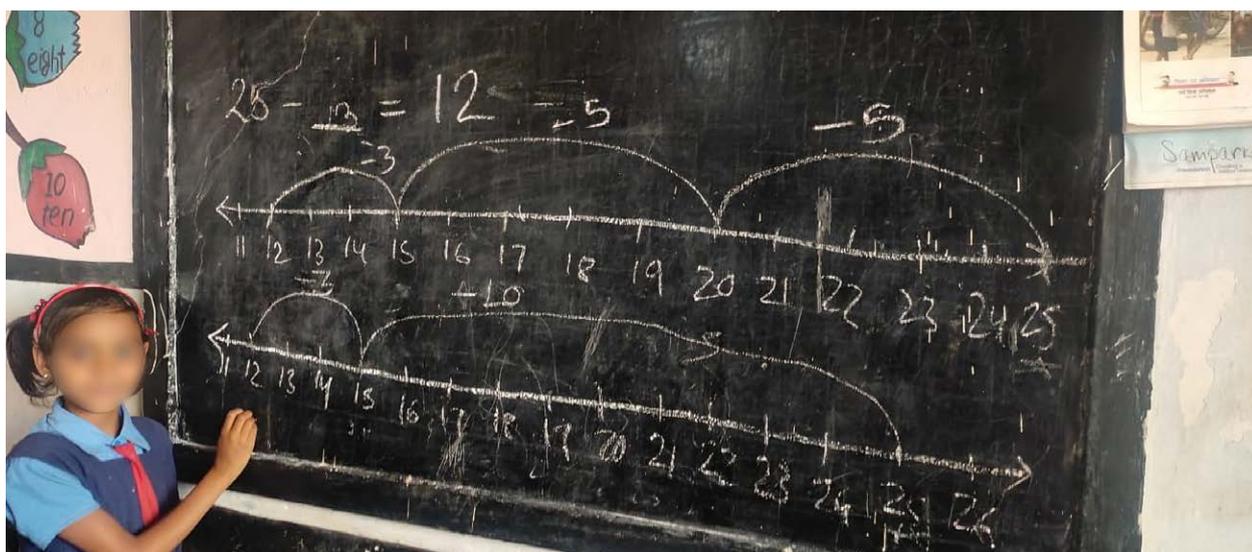
इस पूरी भागीदारी का सबसे अच्छा हिस्सा वह था, जहाँ विद्यार्थी किसी सवाल को हल करने के अलग-अलग तरीके खोजने और निकालने लगे। उन्होंने सीधा-सपाट जवाब देने, जिसे पहले उनकी कक्षा में काफ़ी अहमियत दी जाती थी, के बजाय जवाबों के लिए तर्क दिए। विद्यार्थियों ने अपने सहपाठियों की बातों और उन्होंने सवाल को किस तरह से हल किया, को बड़े धैर्य के साथ सुना। यहाँ तक कि लुप्त संख्या (missing number) वाले सवाल को भी यंत्रवत रूप से हल करने की बजाय, विद्यार्थी उसके बारे में सोच पा रहे थे। नीचे दिया गया चित्र एक विद्यार्थी द्वारा इस्तेमाल की गई लुप्त योज्य वाले एक ही सवाल को हल करने की दो विधियों को दर्शाता है।

### सुझाए गए कुछ सवाल

क्या किसी के पास कोई दूसरी तरकीब है?

क्या आपने इसे करने के किसी दूसरे तरीके के बारे में सोचा?

किसका तरीका आपको ज्यादा प्रभावी लगा?



**कुछ बिन्दु जिन्हें कक्षा में विमर्श को लागू करते समय ध्यान में रखा जाना चाहिए :**

1. किसी गणितीय विमर्श से समृद्ध कक्षा को स्थापित करने में समय तो लगता है, लेकिन यह सारी मेहनत सार्थक होती है। जब सीखने की प्रक्रिया में विद्यार्थी अपनी बात को शामिल होता देखते हैं, तो यह सीखने को और भी अर्थपूर्ण और आनन्ददायी बना देता है।
2. विमर्श में शामिल न होने वाले विद्यार्थियों को पहचानकर उनकी सहायता करने की आवश्यकता होती है क्योंकि शुरुआत में विद्यार्थियों को यह प्रक्रिया बोझिल लग सकती है और उन्हें पर्याप्त प्रोत्साहन और समर्थन की आवश्यकता हो सकती है।

3. ऐसी कक्षा संस्कृति स्थापित करते समय हरेक विद्यार्थी का आकलन करना शुरुआत में कठिन हो सकता है, लेकिन उचित योजना के साथ यह आसान हो जाएगा।

### निष्कर्ष :

गणितीय विमर्श गणित सिखाने की टॉप-डाउन (top-down mathematical learning) प्रक्रिया से गणित सिखाने की सार्थक प्रक्रिया तक जरूरी बदलाव लाने के लिए एक सशक्त साधन है। गणित सिखाने को निष्क्रिय से सक्रिय प्रक्रिया में बदलने के लिए कक्षा में गणितीय विमर्श को बढ़ावा देना अति आवश्यक है, जिसमें विद्यार्थी अपने सीखने की जिम्मेदारी खुद लेते हैं। शिक्षक ऐसा माहौल बनाकर जहाँ विद्यार्थी अपने गणितीय विचारों को व्यक्त करने के लिए मूल्यवान, समर्थित और सशक्त महसूस करें, आत्मविश्वासी, तर्कशील ढंग से सोचने और सुनने वालों को पोषित कर सकते हैं। चुनौतियों के बावजूद, गणितीय विमर्श से होने वाले फायदे इसके लिए किए गए प्रयासों से अधिक होते हैं। इसके फलस्वरूप विद्यार्थी सीखने की गतिविधि में ज्यादा गहराई से शामिल हो पाते हैं, ज्यादा बेहतर समझ हासिल कर पाते हैं और सीखने वाला समुदाय अधिक समावेशी बन पाता है।

### References:

1. National Curriculum Framework, 2023. *National Curriculum Framework for School Education*.
2. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*.



**प्राची एम.** गणित की एक लगनशील शिक्षिका हैं। उन्होंने अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय से एमए (शिक्षा) किया है। वे पिछले 5 सालों से शिक्षा के क्षेत्र में काम कर रही हैं और गणित को मज़ेदार और सभी के लिए सहज-सुलभ बनाने के लिए प्रयासरत हैं। प्राची से [prachimakde5@gmail.com](mailto:prachimakde5@gmail.com) पर सम्पर्क किया जा सकता है।

**अनुवाद :** प्रियेश गुप्ता **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** शहनाज़

# अमूर्त अवधारणाओं से व्यावहारिक उपयोग तक : ज्यामिति का एक अनुभव

अरुणी जोसफ़

यह लेख अजीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के एमए एजुकेशन कार्यक्रम के तहत अक्टूबर से नवम्बर 2022 के बीच ग्रामीण राजस्थान के एक सरकारी स्कूल में मेरी फ़ील्ड प्रैक्टिस के दौरान पढ़ाने के अनुभवों पर आधारित है। फ़ील्ड में हुए अनुभव से मुझे बच्चों को होने वाली कठिनाइयों, विशेषकर गणितीय अवधारणाओं में, को समझने में मदद मिली। बच्चे अलग-अलग दिशाओं में खुले हुए कोणों (angles) को समझने में और उन्हें मापने में जिन चुनौतियों का सामना कर रहे थे, मैंने उनका अवलोकन किया और उन्हें दूर करने की कोशिश की। वहाँ ठोस सामग्रियों का अभाव था, जो ज्यामिति सीखने-सिखाने के लिए बहुत ज़रूरी होती हैं। यहाँ पाठ्यपुस्तकों को ही पढ़ाने के एक मात्र संसाधन के तौर पर इस्तेमाल किया जा रहा था। इन समस्याओं को दूर करने के लिए सीखने-सिखाने के जिन कुछ तरीकों को आजमाया गया और जिन्हें प्रभावी पाया गया, उनकी चर्चा यहाँ की गई है।

## बच्चे ज्यामिति कैसे सीखते हैं?

ज्यामिति के माध्यम से बच्चों में कल्पना करने तथा उन तत्वों को पहचानने की शक्ति विकसित होती है जो दिखाई नहीं पड़ते हैं, वस्तुओं को गतिशील/परिवर्ती रूप में देखने तथा तथ्यों को पहचानने और विभिन्न ज्यामितीय आकारों के बीच सम्बन्धों को समझने की क्षमता विकसित होती है (Johnston-Wilder, 2005)। पियरे और डीना वैन हीले के सिद्धान्त के अनुसार, बच्चों में ज्यामितीय चिन्तन चरण-दर-चरण विकसित होता है (van Hiele, 1986)। शुरुआत में बच्चे किसी आकृति को उसके बाहरी रूप से पहचानते हैं, फिर वे उन आकृतियों के विशिष्ट गुणों की पहचान करना सीखते हैं। इसके बाद वे इन विशिष्ट गुणों के बीच सम्बन्ध स्थापित करते हैं और अतिरिक्त गुणों का अन्दाज़ा लगाते हैं। आखिर में, बच्चे औपचारिक गणितीय तरीके से तर्क करना सीखते हैं। **तालिका-1** वैन हीले के ज्यामिति सीखने के चरणों के बारे में बताती है।

की-वर्ड: ज्यामिति, कोण, अवधारणात्मक समझ, गणित के टीएलएम, खेल

## तालिका-1

चरण	नाम	वर्णन	उदाहरण
1	दृश्य स्तर पर	बच्चे बुनियादी आकृतियों को उनके बाहरी स्वरूप से पहचानते हैं और उन्हें नाम देते हैं।	इस चरण पर कोई बच्चा किसी आयत को उसके बाहरी रूप से पहचानेगा।
2	विवरणात्मक स्तर	बच्चे बुनियादी आकृतियों की खासियतों को पहचानते हैं और उनका वर्णन कर सकते हैं।	कोई बच्चा किसी आयत को एक ऐसी आकृति के रूप में पहचान पाएगा, जिसकी आमने-सामने वाली भुजाएँ (opposite sides) बराबर होती हैं और सभी कोण समकोण (right angles) होते हैं।
3	अमूर्त स्तर	बच्चे आकृतियों के विशिष्ट गुणों के बीच में सम्बन्ध स्थापित करना शुरू कर देते हैं।	एक वर्ग को एक आयत के रूप में देखा जा सकता है क्योंकि इसे अतिरिक्त विशेषताओं वाला एक आयत माना जा सकता है।
4	औपचारिक निगमन	बच्चे अपने खुद के प्रमाण बनाते हैं जिसमें उनके निष्कर्ष को तार्किक रूप से सही साबित करने वाले कथनों की शृंखला होती है।	कोई बच्चा यह साबित कर पाएगा कि किसी समानान्तर चतुर्भुज (parallelogram) के विकर्ण (diagonal) इसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों (congruent triangles) में बाँटते हैं और चरणों को तर्क के साथ प्रमाणित कर सकेगा।
5	सावधानी और बारीकी से कुछ करना	विद्यार्थी विभिन्न स्वयंसिद्ध प्रणालियों (postulate systems) में प्रमेय (theorems) स्थापित करते हैं और इन प्रणालियों का विश्लेषण/तुलना करते हैं।	विद्यार्थी साबित कर सकेगा कि किसी चतुर्भुज (quadrilateral) को बनाने के लिए आवश्यक और पर्याप्त शर्तें क्या होती हैं।

### कोणों को पढ़ाने का मेरा अनुभव

मैंने सातवीं के 35 बच्चों की एक कक्षा में 40 मिनट के 25 से ज्यादा सत्र लिए। यह स्कूल राजस्थान के सिरोही जिले के पालड़ी-एम का महात्मा गाँधी सरकारी स्कूल था। कोणों की परिभाषा, उनके प्रकार जैसे कि अधिक कोण, चाँदे का इस्तेमाल करके कोणों को मापना और उन्हें बनाना बच्चों को पहले ही सिखाया जा चुका था। शुरुआती दिनों में मेरे ये अवलोकन रहे :

- 25% बच्चों को विभिन्न दिशाओं में खुले हुए (या विभिन्न स्थितियों में रखे हुए) कोणों को समझने में कठिनाई हो रही थी।
- 70% बच्चों को चाँदे (protractor) का इस्तेमाल करके कोणों को मापने में मुश्किल हो रही थी।
- 5 बच्चे ऐसे पाए गए, जिन्हें कक्षा में कागज़-कलम का काम करने में रुचि नहीं थी।
- बच्चों को कोण पढ़ाने के लिए सीखने-सिखाने की किसी सामग्री (टीएलएम) का इस्तेमाल नहीं किया जा रहा था।

### जिन शिक्षाशास्त्रीय पद्धतियों को आजमाया गया

बच्चे जिन कठिनाइयों का सामना कर रहे थे, उन्हें दूर करने

के लिए कुछ शिक्षाशास्त्रीय पद्धतियों का इस्तेमाल किया गया। इनमें ठोस सामग्रियों का इस्तेमाल और पाठ्यपुस्तक में दी गई गतिविधियों और अभ्यास का विस्तार शामिल था। इन तरीकों से कोण को दर्शाने, कोण को मापने, कोण के युग्मों जैसे पूरक और सम्पूरक कोणों (complementary and supplementary angles) और समानान्तर रेखाओं के एक युग्म को किसी तिर्यक रेखा (transversal) के द्वारा काटे जाने पर बनने वाले कोणों के युग्मों के बारे में प्रभावी तरीके से सिखाने में मदद मिली।

### (अ) सीखने-सिखाने की सामग्रियों (टीएलएम) का इस्तेमाल करना

टीएलएम गणित की अमूर्त अवधारणाओं को समझने में बच्चों की मदद के लिए कारगर साबित हो सकते हैं। छोटे बच्चों की रोज़मर्रा की जिन्दगी में हर जगह कोण (कोने) दिखाई देने के बावजूद भी कोणों को गणितीय रूप में दर्शाना सीखना उनके लिए आसान नहीं होता (Watson, 2013)। कक्षा में आजमाई गई कुछ सामग्रियों के बारे में आगे दिया गया है, इनमें से अधिकतर अखबार जैसी जुगाडू या दोबारा इस्तेमाल की जा सकने वाली सामग्रियों से बनी थीं।

## कागज़ के पंखे

हमारा शिक्षण अधिकतर समय दो रेखाओं/रेखा खण्डों के एक-दूसरे को काटने से बनने वाले कोणों पर केन्द्रित होता है। इस बात के प्रमाण हैं कि बच्चे अन्य सन्दर्भों की तुलना में गति करने (या घुमाने) वाले सन्दर्भ में कोण को ज्यादा जानते हैं और इस सन्दर्भ में गणित के बारे में अपेक्षाकृत ज्यादा आसानी से सीखते हैं (Nunes, 2009)।



चित्र-1

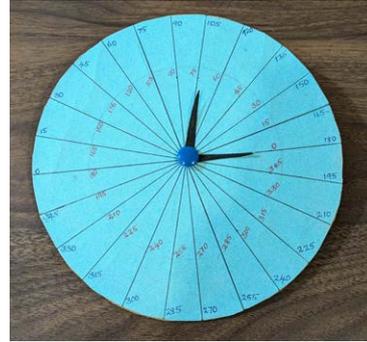
आइसक्रीम की डण्डियों और अखबारों का इस्तेमाल करके कागज़ के पंखे (चित्र-1) बनाए गए और इनका इस्तेमाल गति करने या घुमाने के सन्दर्भ में कोण दर्शाने के लिए किया गया। बच्चों ने 5 सदस्यों वाले समूहों में गतिविधि की। उनसे यह पूछा गया कि पंखे का इस्तेमाल करते समय उन्होंने क्या देखा। उन्होंने अलग-अलग प्रकार के कोण बनाए और उनका वर्णन किया। “यह  $90^\circ$  से ज्यादा है और यह एक अधिक कोण है।”

पंखों का इस्तेमाल करते समय अनजाने में उन्होंने अलग-अलग स्थितियों में (पंखे का खुला हिस्सा अलग-अलग दिशाओं में) रखकर कोणों का इस्तेमाल किया। उन्होंने क्या सीखा इसका आकलन करने के लिए उनसे कुछ सवाल पूछे गए। उदाहरण के लिए, कक्षा के बच्चों को एक अधिक कोण दिखाया गया। बच्चों ने उसे अधिक कोण के रूप में पहचाना। उसके बाद कोण की माप को बदले बिना उसकी स्थिति बदल दी और फिर उनसे कोण का प्रकार पूछा। कक्षा में काफ़ी शान्त रहने वाली एक बच्ची सुमन ने कहा कि वह एक अधिक कोण था। जब उससे उसके उत्तर की वजह पूछी गई, तो उसका जवाब था, “आपने डण्डियों की स्थितियों को नहीं बदला, आपने केवल इसे उल्टा कर दिया। इसलिए यह पहले वाला कोण ही है।” सामूहिक गतिविधि से बच्चे गतिविधि में सक्रिय रूप से भागीदारी और उस पर आपस में

चर्चा करने के लिए प्रोत्साहित हुए। कक्षा में दिए जाने वाले कार्यों का इस्तेमाल बच्चों को व्याख्या करने, अपनी बात को सही साबित करने और खुद की व अपने हमउम्र साथियों की व्याख्याओं को लेकर आलोचनात्मक होने के अवसर देने के लिए किया जा सकता है (Watson, 2013)।

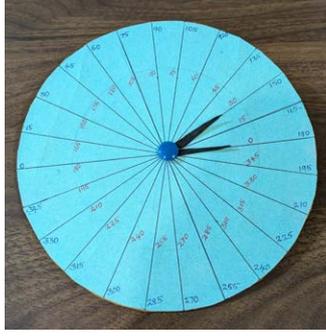
## 360° का चाँदा

कई बच्चों को दी गई आकृति या चित्र में बने कोण को मापने में समस्या होती है, खासकर तब जब वह आकृति कुछ अलग-सी स्थिति में रखी हो। कोणों को बनाने और उनको मापने के लिए स्वयं अपने हाथ से बनाए  $360^\circ$  के चाँदे का इस्तेमाल एक दृश्य साधन के तौर पर किया गया। इसने  $180^\circ$  से अधिक अंश वाले कोणों को मापने का मौक़ा भी दिया, जिनको पारम्परिक चाँदे का इस्तेमाल करके मापना सम्भव नहीं था। दो सुइयों वाली इस सामग्री को चार्ट पेपर्स से बनाया गया था और सुइयों को पिन और स्पंज के टुकड़े की मदद से एक जगह टिकाया गया था। बच्चों ने चार-चार के समूहों में इस सामग्री का इस्तेमाल किया, और उनसे अलग-अलग प्रकार के और अलग-अलग माप वाले कोण बनाने को कहा गया।

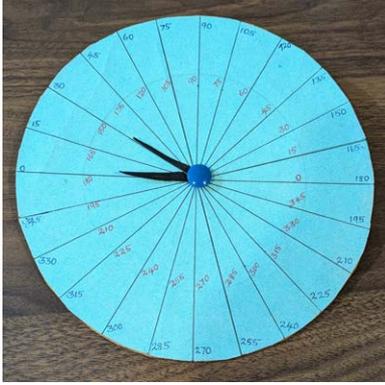


चित्र-2

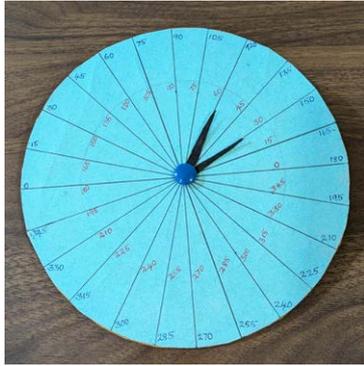
उन्होंने अपनी बनाई हुई आकृतियों के बारे में बताया। “यह  $120^\circ$  का है और एक अधिक कोण है”, “जब हम कोई अधिक कोण या न्यून कोण (acute angle) बनाते हैं, तो हमें दूसरे हिस्से पर प्रतिवर्ती कोण (reflex angle) भी मिलता है।” जब उनसे  $30^\circ$  के कोणों को तीन अलग-अलग तरीकों से दर्शाने को कहा गया तो उन्होंने जो जवाब दिए, उन्हें चित्र-3, 4 और 5 में दर्शाया गया है। इन गतिविधियों के बाद, चाँदे का इस्तेमाल करके कोणों को बनाने और उन्हें मापने में स्पष्ट सुधार नज़र आया।



चित्र-3



चित्र-4



चित्र-5

### रंगीन स्ट्रॉ

समूहों में बच्चों से दो रेखाओं को काटने वाली तिर्यक रेखा (transversal) से बनने वाले कोणों को ढूँढने और पहचानने को कहा गया। बच्चों ने नतीजा निकाला कि इस तरह आठ कोण बन रहे थे।



चित्र-6

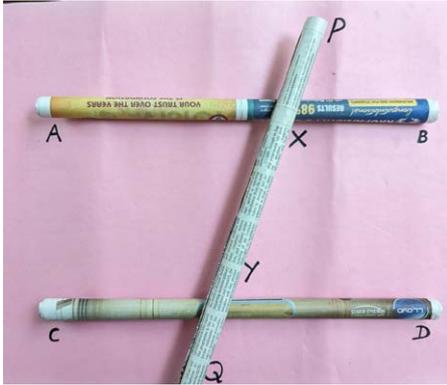
### दो समानान्तर रेखाओं (parallel lines) को काटती हुई तिर्यक रेखा का मॉडल

चित्र-7 में दिए गए मॉडल का इस्तेमाल समानान्तर रेखाओं के एक युग्म को किसी तिर्यक रेखा द्वारा काटे जाने पर बनने वाले कोणों के बीच के सम्बन्धों का पता लगाने के लिए किया गया। उदाहरण के लिए, हम  $\angle AXP$  और  $\angle CYX$  की माप के बारे में क्या कह सकते हैं?  $\angle AXY$  और  $\angle DYX$  की माप क्या होगी? बच्चों द्वारा एक बार सम्बन्ध स्पष्ट कर दिए जाने के बाद, हम उनके सार्वभौमिक रूप से स्वीकृत नामों को सीखने की दिशा में आगे बढ़ें, जैसे क्रमशः संगत कोण (corresponding angles) और एकान्तर अन्तःकोण (alternate interior angles)।



चित्र-7

बच्चों ने जिन कोणों के युग्मों के साथ पहले काम किया था, उन्होंने उन कोणों और उनके बीच के सम्बन्ध को बखूबी समझा था या नहीं इसे जाँचने के लिए मॉडल को रखने का तरीका बदल दिया गया (चित्र-8)। बच्चे यह समझ गए थे कि मॉडल को रखने का तरीका बदलने से कोणों के माप या कोणों के विशिष्ट युग्मों के बीच का सम्बन्ध नहीं बदला था।



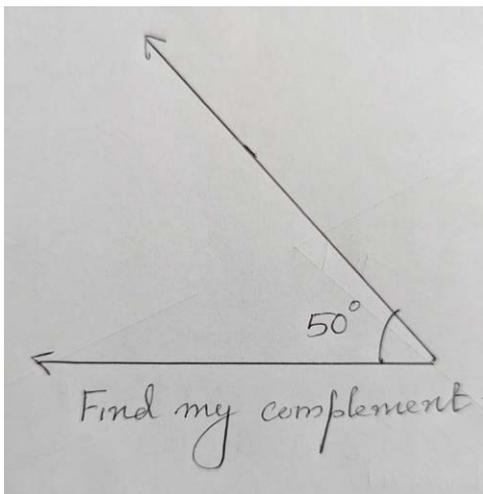
चित्र-8

### (ब) पाठ्यपुस्तकों की सामग्री का विस्तार

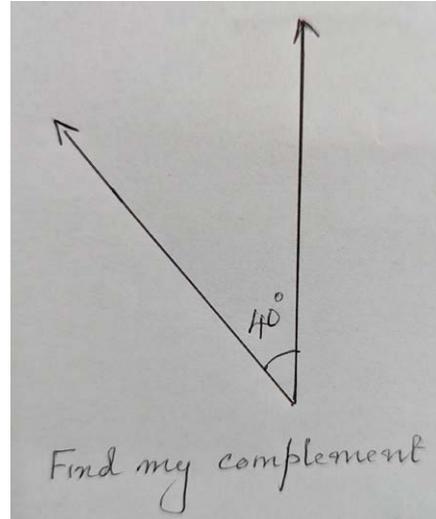
एनसीईआरटी की किताबों का इस्तेमाल करके कुछ गतिविधियों और मार्गदर्शक सवालों को तैयार किया गया।

### पाठ्यपुस्तक की सामग्रियों को खेल का रूप देना

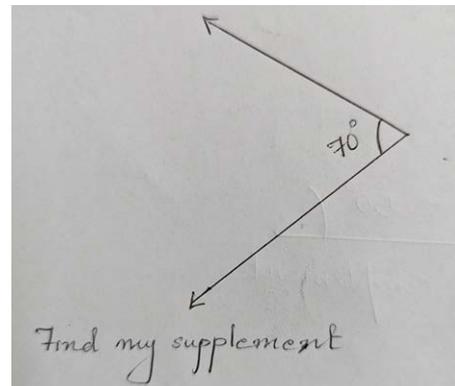
ऐसी एक गतिविधि पूरक और सम्पूरक कोणों पर आधारित थी। बच्चों को दो समूहों में बाँटा गया। एक समूह के बच्चों को अलग-अलग माप के चित्र दिए गए (चित्र-9, 10, 11, 12)। उन्हें हरेक कोण के पूरक और सम्पूरक कोण का पता लगाना था, जो कि दूसरे समूह के बच्चों के पास था।



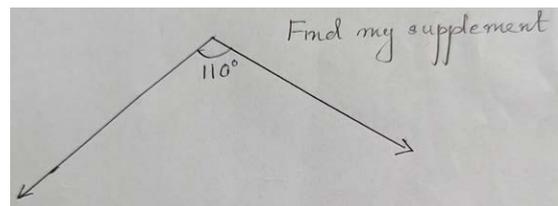
चित्र-9



चित्र-10



चित्र-11



चित्र-12

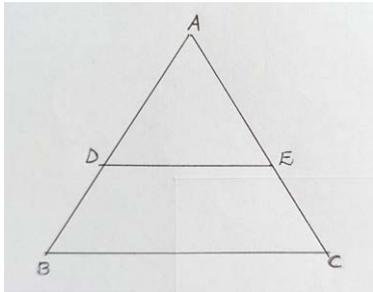
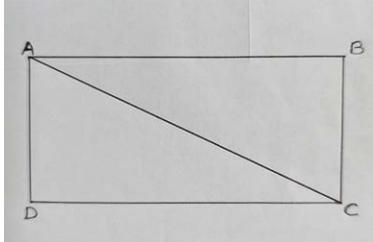
बच्चे गणना करते हुए, अन्दाज़ लगाते हुए और चित्रों के साथ अपने नतीजों का मिलान करते हुए गतिविधि में लीन थे। यह गतिविधि उन बच्चों के लिए मददगार साबित हुई, जिन्हें कागज़-कलम के काम में दिलचस्पी नहीं थी। गतिविधि के बाद, बच्चों से विस्तार से बताने के लिए कहा गया कि उन्होंने कोणों के युग्मों में क्या-क्या देखा। ऐसा यह समझने के लिए पूछा गया कि उन्होंने कोणों के युग्मों के योग को  $180^\circ$  और  $90^\circ$  के रूप में देखा या नहीं, और क्या वे क्रमशः पूरक और सम्पूरक कोणों के बीच फ़र्क को समझ पा रहे थे या नहीं।

### मार्गदर्शक प्रश्न

उच्चतर स्तर के संज्ञानात्मक कौशलों को लागू करने में बच्चों को सक्षम बनाने के लिए और उन्हें माध्यमिक स्कूल में औपचारिक गणितीय चिन्तन के लिए तैयार करने के लिए मार्गदर्शक सवालों का इस्तेमाल किया गया। जब बच्चों ने विभिन्न सन्दर्भों में कोणों का इस्तेमाल देखा, तो इस प्रकार जीवन्त हुए कोण अधिक सार्थक हो गए। तालिका-2 में

कक्षा नौवीं की एनसीईआरटी की किताब की सामग्री को आधार बनाकर सातवीं कक्षा में आजमाए गए कुछ परिदृश्य दिए गए हैं। इन्हें करने के लिए, विद्यार्थियों को कोणों के निरूपण और प्रकार, कोण के युग्मों जैसे कि पूरक और सम्पूरक कोणों, साथ ही समानान्तर रेखाओं के किसी युग्म को किसी तिर्यक रेखा द्वारा काटे जाने पर बनने वाले कोणों के युग्मों को जानने की ज़रूरत होगी।

तालिका-2

उच्च कक्षाओं की पाठ्यपुस्तकों के अंश	मार्गदर्शक सवाल
	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. तिर्यक रेखाओं को पहचानें।</li> <li>2. संगत कोणों को पहचानें।</li> </ol>
	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. तिर्यक रेखाओं को पहचानें।</li> <li>2. एकान्तर अन्तःकोणों को पहचानें।</li> <li>3. एक ओर बने अन्तःकोणों को पहचानें।</li> </ol> <p><i>टिप्पणी</i> अधिकतर बच्चों ने AC को तिर्यक रेखा के रूप में पहचाना। कमल ने यहाँ तक कहा कि आयत की भुजाएँ भी तिर्यक रेखाएँ हैं। इससे बच्चों में चर्चा शुरू हुई, जिसमें बच्चों ने अपनी बात रखी, बहस की और नतीजा निकाला, जिसने मुझे तीसरा सवाल पूछने के लिए प्रेरित किया। इस चित्र में सम्पूरक कोणों की पहचान करने की भी सम्भावना है, जिसे आगे की चर्चा के लिए इस्तेमाल किया जा सकता है।</p>

बच्चों को उच्च स्तर के कौशलों का इस्तेमाल करने का अवसर मिलेगा, जैसे इस तरह की गतिविधियों को करना और उनका मूल्यांकन करना। जब बच्चों से समूहों में समाधान निकालने को कहा जाता है तो यह एक खोजपूर्ण गतिविधि बन जाती है, जो उन्हें सोचने, विचार प्रस्तावित करने, गलतियाँ करने और सीखने का अवसर देती है। इस प्रकार वैन हीले मॉडल में ज्यामिति का एक शिक्षक बच्चों की सीखने की प्रगति को गति दे सकता है। कक्षा के कार्यों को विद्यार्थियों को समस्या समाधान के कौशलों के विकास के और समस्या सामने रखने के अवसर देने चाहिए (Watson, 2013)।

### मुख्य निष्कर्ष

- कागज़ के पंखों और  $360^\circ$  के चाँदे सरीखी जुगाड़ करके बनाई गई सामग्रियाँ बच्चों को गति के सन्दर्भ में, अलग-अलग स्थितियों में रखे होने पर और सम्बन्धपरक मापों के रूप में कोणों से बच्चों को परिचित कराने में उपयोगी पाई गई। इस गतिविधि के बाद चाँदे का इस्तेमाल करके कोणों को बनाने और उन्हें मापने में काफ़ी सुधार देखा गया।
- पारम्परिक चाँदे की खामियों को दूर करने के लिए, जिनसे  $180^\circ$  से अधिक के कोणों को नहीं दर्शाया जा सकता था,  $360^\circ$  के चाँदे का इस्तेमाल किया जा सकता

- है। अगर इसे पारदर्शी शीट्स से बनाया जाए, तो इसे कोणों को मापने और बनाने के लिए भी इस्तेमाल किया जा सकता है।
- खेलों और मार्गदर्शक प्रश्नों को शामिल करने से बच्चों में जिज्ञासा को बढ़ावा मिला, जिससे सीखना मजेदार बना और बच्चों ने इसमें भागीदारी की।
  - ठोस सामग्रियों और पाठ्यपुस्तक के प्रभावी तरीके से इस्तेमाल द्वारा बच्चों को सीखने के अवसर देने से वैन हीले के ज्यामिति सीखने के मॉडल में उन्होंने प्रगति की।

#### References

1. Clements, D. H. (2003). Chapter 11. Teaching and Learning Geometry. In *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM
2. Johnston-Wilder, S., & Mason, J. (2005). *Developing thinking in geometry* (pp. 209-211). Open University in Association with Paul Chapman Pub.
3. Nunes, T., Bryant, P., & Watson, A. (2009). Paper 5. Understanding space and its representation in mathematics. In *Key understandings in mathematics learning*. Nuffield Foundation. London.
4. Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight: a theory of mathematics education*. Academic Press. Orlando.
5. Watson, A., Jones, K and Pratt, D. (2013). Chapter 5. Spatial and geometrical reasoning. In *Key ideas in teaching mathematics: research-based guidance for ages 9-19* (pp. 92-116). OUP.
6. NCERT Mathematics textbooks for grades 7 and 9.



**अरुणी जोसफ़** ने आईटी पेशेवर के रूप में अपने करियर की शुरुआत की। इस पेशे में एक दशक बिताने के बाद, स्कूल के बाद ट्यूशन लेकर गणित पढ़ाने की अपनी रुचि की दिशा को आगे बढ़ाया। उन्होंने 2023 में अजीम प्रेमजी विश्वविद्यालय से एमए एजुकेशन पूरा किया। उसके बाद उन्होंने बेंगलूर में गुब्बाची लर्निंग कम्युनिटी के साथ काम किया, वहाँ उन्होंने प्रवासी श्रमिकों के स्कूल न जाने वाले बच्चों को गणित पढ़ाया। वर्तमान में वे बेंगलूर के प्रक्रिया ग्रीन विज़डम स्कूल में पढ़ाती हैं। उनसे [arunipradeep@gmail.com](mailto:arunipradeep@gmail.com) पर सम्पर्क किया जा सकता है।

**अनुवाद :** शहनाज़ **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता

## यूक्लिड की ज्यामिति से गैर-यूक्लिडीय ज्यामिति तक का सफ़र

यूक्लिड के स्वयंसिद्ध सिद्धान्त, ज्यामिति की 'एलीमेंट' किताब, हैं मूल तत्व समान, इनको हासिल ज्यामिति के 'ग्रन्थ' का खिताब। यूक्लिड के पाँच स्वयंसिद्ध सिद्धान्त, नींव हैं ज्यामिति की, जैसे प्रकृति के हों प्रतिबिम्ब, दिखलाते हैं सममिति आकृति की।

दो बिन्दु एक अद्वितीय सीधी रेखा दर्शाते हैं, अनन्त तक चली जाती रेखा का आदि-अन्त बताते हैं। भिन्न-भिन्न आकार और स्थान में वृत्त बन सकते हैं, समरूप समकोण यूक्लिड ज्यामिति की नींव रखते हैं।

पाँचवें, समानान्तर स्वयंसिद्ध, सिद्धान्त पर गणित ने रास्ता बदल लिया, इसने गैर-यूक्लिडीय ज्यामिति का मार्ग प्रशस्त किया। समानान्तर रेखाओं पर पारम्परिक ज्यामिति बदली, दीर्घवृत्त और अतिपरवलय के क्षेत्र में ज्यामिति उभरी।

यूक्लिड ने यूक्लिड की ज्यामिति को आधार दिया, रीमैन ने दीर्घवृत्तीय ज्यामिति में इसे विस्तार दिया। लोबाचेव्स्की, बोल्याई और गॉस ने अतिपरवलय में ज्यामिति को फैलाया, परिणाम है कि इन्होंने पारम्परिक ज्यामिति पर सवाल उठाया।

### रवीन्द्र के. बिष्ट

गणित विभाग, एनडीए, खड़कवासला, पुणे, भारत

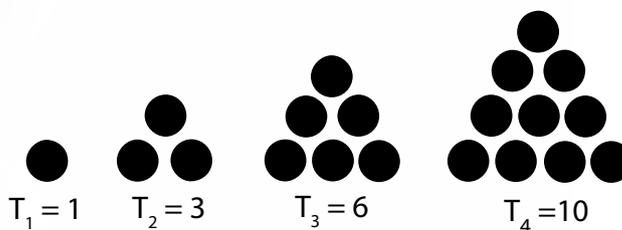
**अनुवाद :** प्रतिका गुप्ता

# 6 क्यों?

## चतुष्फलकीय संख्याओं को चतुष्फलक से जोड़ना

जेम्स मेदज़ और ब्रैड यर्ड

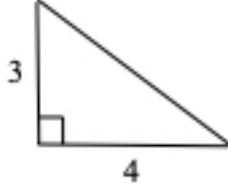
**त्रि**कोणीय संख्या (Triangular numbers) नाम इसलिए पड़ा, क्योंकि किसी भी त्रिकोणीय संख्या जिसमें वृत्तों के समूह को एक समबाहु त्रिभुज के आकार में जमाया जा सकता है, जैसा कि **चित्र-1** में दिखाया गया है।



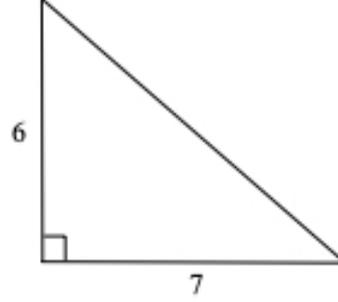
**चित्र-1** : वृत्तों द्वारा दर्शाई गई त्रिकोणीय संख्याएँ

त्रिकोणीय संख्याएँ हैं 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... पहली त्रिकोणीय संख्या है 1, दूसरे चरण में हम इसमें 2 और वृत्त जोड़ते हैं, तीसरे चरण में हम 3 और वृत्त जोड़ते हैं, इस प्रकार सामान्यतया चरण क्रमांक  $n$  पर हम  $n$  वृत्त और जोड़ते हैं। इस तरह हम त्रिकोणीय संख्याएँ बनाते हैं। पर अगर हमें दसवीं त्रिकोणीय संख्या पता करनी है तो हमें नौवीं त्रिकोणीय संख्या ज्ञात होना ज़रूरी है। पिछली संख्या जाने बिना  $n$  वीं ( $n^{\text{th}}$ ) त्रिकोणीय संख्या ज्ञात करने के लिए हमें एक सामान्य सूत्र की ज़रूरत है।  $n$  वीं त्रिकोणीय संख्या के लिए सामान्य सूत्र  $T_n = n(n+1)/2$  है। (उदाहरण के लिए,  $T_{10} = 10(9)/2 = 45$ )।  $n$  और  $n+1$  भुजाओं वाले एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल इस सूत्र का एक अच्छा ज्यामितीय निरूपण है। **चित्र-2** देखें। चूँकि  $n(n+1)/2 = (n^2+n)/2$  है,  $n$  वीं त्रिकोणीय संख्या  $n$  और  $n^2$  की औसत भी है।

**की-वर्ड** : विशेष संख्याएँ, त्रिकोणीय संख्याएँ, चतुष्फलकीय (टेट्राहेड्रल) संख्याएँ, ज्यामिति, विज्ञान अलाइजेशन (दृश्यावलोकन)



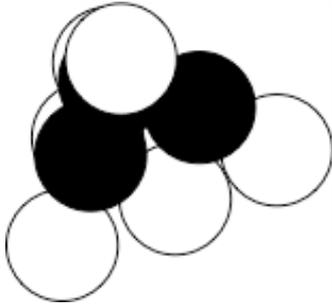
$$\text{क्षेत्रफल} = 3 \cdot 4 / 2 = 6 = T_3$$



$$\text{क्षेत्रफल} = 6 \cdot 7 / 2 = 21 = T_6$$

**चित्र-2 :** समकोण त्रिभुज जिनकी समकोण बनाने वाली भुजाएँ क्रमागत धनात्मक पूर्णांक हैं

जिस प्रकार त्रिकोणीय संख्याओं को त्रिभुज के आकार में व्यवस्थित वृत्तों के रूप में दर्शाया जा सकता है, उसी प्रकार चतुष्फलकीय (tetrahedral) संख्याओं को चतुष्फलक (tetrahedron) - एक त्रिभुजीय आधार वाले पिरामिड - के रूप में देखा जा सकता है, जैसा कि **चित्र-3** में दिखाया गया है। हम गोलों को एक के ऊपर एक रखकर चतुष्फलकीय संख्या बनाते हैं, जिसकी प्रत्येक सतह में गोलों की संख्या त्रिकोणीय संख्या होती है। **चित्र-3** में पहली तीन त्रिकोणीय संख्याओं का योग दिखाया गया है,  $1 + 3 + 6 = 10$ , तीसरी चतुष्फलकीय संख्या।

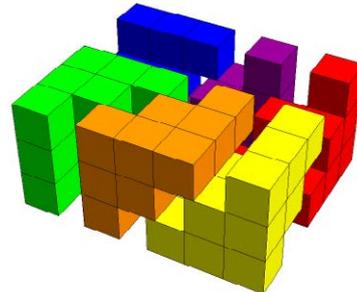


**चित्र-3 :** तीसरी चतुष्फलकीय संख्या 10 को दर्शाने वाले ढेरनुमा जमे गोलें

शुरुआती चतुष्फलकीय संख्याएँ 1, 4, 10, 20, 35, 56, ... हैं। हालाँकि मॉडल गोलों की कुल संख्या को चतुष्फलकीय संख्याएँ कहने के लिए प्रेरित करता है। यह त्रिकोणीय संख्याओं और चतुष्फलकीय संख्याओं के बीच के सम्बन्ध का एक अच्छा दृश्य निरूपण (visual representation) है, लेकिन यह हमें  $n$  वीं चतुष्फलकीय संख्या पता करने में मदद नहीं करता है जब तक कि हमें इससे ठीक पहले वाली संख्या पता न हो। त्रिकोणीय संख्याओं की तरह,  $n$  वीं चतुष्फलकीय संख्या के लिए हमें एक सामान्य सूत्र चाहिए।  $n$  वीं चतुष्फलकीय संख्या पता करने के लिए यह सूत्र  $T_n = n(n+1)(n+2)/6$  है। (उदाहरण के लिए,

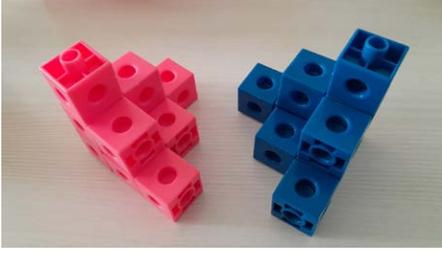
$T_5 = 5(6)(7)/6 = 35$ )। क्या यह अच्छा नहीं होगा अगर हम इस सूत्र को चतुष्फलक का इस्तेमाल करके ज्यामितीय रूप से चित्रित कर सकें?

चतुष्फलकीय संख्याएँ बताने वाले सूत्र का अंश तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल होता है, जो दरअसल एक ऐसे आयताकार ठोस का आयतन (लम्बाई  $\times$  चौड़ाई  $\times$  ऊँचाई) भी होता है जिसकी भुजाएँ तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णांक होते हैं। इस प्रकार, ऐसे आयताकार ठोस के आयतन का  $1/6$ वाँ भाग हमेशा एक चतुष्फलकीय संख्या होती है। उदाहरण के लिए,  $3 \times 4 \times 5$  भुजाओं वाले एक आयताकार ठोस का आयतन 60 होगा, इसलिए तीसरी चतुष्फलकीय संख्या  $60/6 = 10$  होगी। **चित्र-4** में 10 घनों के 6 सेट दिखाए गए हैं, जिनमें से प्रत्येक सेट के लिए एक अलग रंग है। ये 6 सेट एक साथ मिलकर  $3 \times 4 \times 5$  भुजाओं वाला एक आयताकार ठोस बनाते हैं। यह ज़रूरी नहीं है कि एक सेट में घन जुड़े हुए हों या फिर एक रंग के घन एक साथ रहें (घन ठोस में कहीं भी हो सकते हैं), लेकिन यह विन्यास त्रिकोणीय संख्या 1, 3 और 6 को अच्छी तरह से प्रकट करता है जिसका इस्तेमाल चतुष्फलकीय संख्या 10 को बनाने के लिए किया जाता है। **चित्र-5** में एक वैकल्पिक मॉडल दिखाया गया है, जो कि अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के मैथ स्पेस की स्वाती सरकार द्वारा सुझाया गया है।

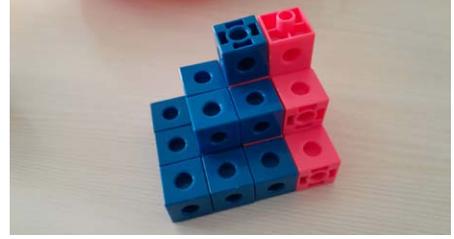


**चित्र-4 :** 6 समान टुकड़े, प्रत्येक में 10 घन हैं

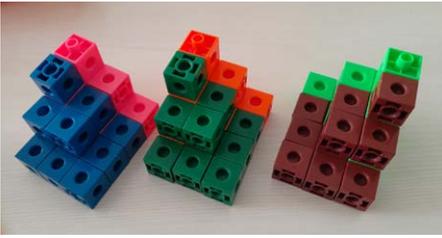
**चरण-1 :** दो सेटों में से प्रत्येक में  $6 + 3 + 1 = 10$  ब्लॉक हैं, यानी कुल 20 ब्लॉक हैं।



**चरण-2 :** प्रत्येक सेट में नीचे के 6 ब्लॉक जुड़कर  $3 \times 4$  का आयत बनाते हैं; बीच के 3 जुड़कर  $2 \times 3$  का आयत बनाते हैं; प्रत्येक सेट में सबसे ऊपर के ब्लॉक जुड़कर  $1 \times 2$  का आयत बनाते हैं।



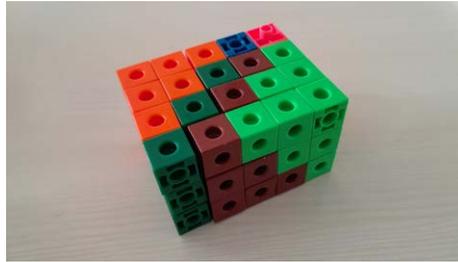
**चरण-3 :** 20 ब्लॉकों के तीन समान सेट।



**चरण-4 :** दो सेट जुड़े हुए हैं।



**चरण-5 :** तीनों सेट जुड़कर  $3 \times 4 \times 5$  का आयताकार ठोस बनाते हैं।



**चित्र-5 :** स्वाती का मॉडल

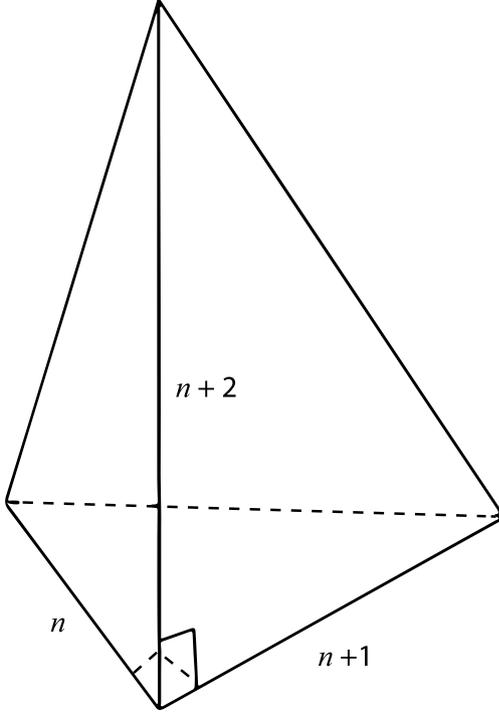
यह मॉडल सूत्र से शुरू होता है और मॉडल को सूत्र में फिट करता है, इसलिए यह विधि इस सवाल का जवाब नहीं देती है, कि “6 क्यों?”

अब हम अपना ध्यान चतुष्फलक के इस्तेमाल से इस पद को ज्यामितीय रूप से चित्रित करने की सम्भावना पर केन्द्रित करते हैं। हमें यह स्पष्ट रहना चाहिए कि यह  $n$  वीं चतुष्फलकीय संख्या के लिए सूत्र विकसित करने की कोशिश नहीं है, बल्कि चतुष्फलक में सूत्र को देखने का एक तरीका दर्शाने के लिए है, और विशेष रूप से सूत्र में संख्या 6 को ध्यान में रखना है। हम फिर से देखते हैं कि  $n$  वीं चतुष्फलकीय संख्या पहली  $n$  त्रिकोणीय संख्याओं का योग है। उदाहरण के लिए, पहली पाँच त्रिकोणीय संख्याओं,  $1 + 3 + 6 + 10 + 15$  का योग 35 है, जो पाँचवीं टेट्राहेड्रल संख्या है।

चतुष्फलक के आयतन का सूत्र  $Bh/3$  है, जहाँ  $B$  आधार का क्षेत्रफल है और  $h$  ऊँचाई है। अगर चतुष्फलक का आधार समकोण त्रिभुजाकार है, जिसकी भुजाएँ  $n$  और  $n+1$  हैं तो आधार का क्षेत्रफल  $n(n+1)/2$  होगा, जो एक त्रिकोणीय संख्या है। यदि चतुष्फलक की ऊँचाई  $n+2$  है, तो चतुष्फलक का आयतन  $[(n(n+1)/2)(n+2)]/3$  या  $n(n+1)(n+2)/6$  होगा। **चित्र-6** देखें। इस प्रकार, जब  $n$  वीं चतुष्फलकीय संख्या पता करने के लिए कहा जाता है, तो हम सिर्फ चतुष्फलक के आयतन की गणना कर रहे होते हैं। उदाहरण के लिए, पाँचवीं चतुष्फलकीय संख्या  $Bh/3 = [(5)(6)/2]7/3 = 35$  है।

अब हम जवाब दे सकते हैं, “6 क्यों?” हमारे पास त्रिभुजाकार आधार के क्षेत्रफल के सूत्र से 2 विभाजक है और चतुष्फलक

के आयतन के सूत्र से 3 विभाजक है और इसलिए विभाजक 6 है।



चित्र-6 : इस चतुष्फलक का आयतन  $n$  वीं चतुष्फलकीय संख्या है

हम एक आखिरी विचार के साथ निष्कर्ष पर पहुँचते हैं। दुनिया के कुछ हिस्सों में एक लोकप्रिय गीत है “क्रिसमस के बारह दिन (The Twelve Days of Christmas)”, जिसके पहले तीन छन्द हैं :

क्रिसमस के पहले दिन  
मेरे सच्चे प्यार ने मुझे दिया  
नाशपाती के एक पेड़ में एक तीतर।

क्रिसमस के दूसरे दिन  
मेरे सच्चे प्यार ने मुझे दिए  
दो जंगली कबूतर,  
और नाशपाती के एक पेड़ में एक तीतर।

क्रिसमस के तीसरे दिन  
मेरे सच्चे प्यार ने मुझे दिए  
तीन फ्रांसीसी मुर्गियाँ,  
दो जंगली कबूतर  
और नाशपाती के एक पेड़ में एक तीतर।

यह क्रम कुल 12 दिनों तक जारी रहता है। हर दिन मिले उपहारों की संख्या एक त्रिकोणीय संख्या है। इस तरह उपहारों की कुल संख्या बारहवीं चतुष्फलकीय संख्या है, जो पहली 12 त्रिकोणीय संख्याओं का योग है, यानी 364। ये गीत और गीत के बोल आसानी से कहीं भी मिल जाएँगे, और ये समस्या से बखूबी परिचय करवाते हैं।

## Reference

1. Jim Delaney “Geometric Proof of the Tetrahedral Number Formula” [https://demonstrations.wolfram.com/GeometricProofOfTheTetrahedralNumberFormula/Published March 7 2011](https://demonstrations.wolfram.com/GeometricProofOfTheTetrahedralNumberFormula/Published%20March%207%202011)



ब्रेड युई हवाई के खूबसूरत द्वीपों के रहने वाले हैं एक रचनात्मक व खुशदिल शिक्षक हैं। उन्होंने 15 साल तक गणित और अंग्रेजी विषय पढ़ाए हैं। वे टीचर्स अक्रॉस बॉर्डर्स – दक्षिणी अफ्रीका के साथ वालंटियर के तौर पर 8 दौरों में शामिल हुए हैं। फिलहाल वे ओआहु (O’ahu) के कामेहामेहा (Kamehameha) स्कूल कपालामा (Kapalama) में बीजगणित-1 पढ़ाते हैं, जो मूल हवाईयन बच्चों की सेवा के लिए समर्पित एक शैक्षणिक संस्थान है। मनोरंजन के लिए, ब्रेड को पढ़ना, टेनिस खेलना, खाना बनाना और कॉफी पीना पसन्द है। ब्रेड से [Brad.uy@gmail.com](mailto:Brad.uy@gmail.com) पर सम्पर्क किया जा सकता है।

जेम्स मेट्ज़ एक सेवानिवृत्त गणित प्रशिक्षक हैं। वे हर साल एक महीने के लिए टीचर्स अक्रॉस बॉर्डर्स – दक्षिणी अफ्रीका के लिए वालंटियर के रूप में काम करते हैं। उन्हें गणित का अध्ययन करना बहुत पसन्द है। जेम्स से [metz@hawaii.edu](mailto:metz@hawaii.edu) पर सम्पर्क किया जा सकता है।



अनुवाद : सीमा पुनरीक्षण : प्रतिका गुप्ता कॉपी एडिटर : अफसाना पठान

# गुणन: एक बेहतर कलन विधि

मैथ स्पेस

हम  $84 \times 67$  जैसी दो अंकों वाली दो संख्याओं का गुणा कैसे करते हैं? पहले चरण में हम  $84 \times 7$  को हल करते हैं। इसमें 'हासिल' लगाया जाता है या पुनर्समूहीकरण किया जाता है, अर्थात्  $84 \times 7 = (4 + 80) \times 7 = 4 \times 7 + 80 \times 7$  तो,

चित्र-1

- हम हल करने की शुरुआत  $4 \times 7 = 28$  से करते हैं
- और 28 के 8 को नीचे लिख देते हैं
- हमें यह भी याद रखना होगा कि हासिल आए 2 को अगले गुणनफल में जोड़ना है
- अब,  $80 \times 7$  या यूँ कहें कि  $8 \times 7 = 56$  को ज्ञात करें।
- और इस गुणनफल में हासिल 2 जोड़ दें, अर्थात्  $56 + 2 = 58$
- अब  $84 \times 7$  का गुणा करें यानी  $84 \times 7 = 588$

और यह सिर्फ चरण-1 है (चित्र-1)!

आपने देखा कि यह कितना जटिल है! जब हम 'जोड़' करते हैं तब हम केवल एक ही संक्रिया लागू कर रहे होते हैं और इसमें सभी अंकों को जोड़ना होता है। लेकिन यहाँ दो अंकों वाली संख्या का गुणा करने के लिए पहले हमें 8 और 7 का गुणा करना पड़ता है फिर इसके गुणनफल में हासिल का 2 जोड़ना पड़ता है। दूसरे शब्दों में कहें तो, इस चरण में दो संक्रियाएँ होती हैं – गुणा और जोड़। इसीलिए, इन दोनों संक्रियाओं का क्रम मायने रखता है क्योंकि  $(7 \times 8) + 2 \neq 7 \times (8 + 2)$ । लेकिन यह स्वाभाविक है कि कोई भी सीखने वाला इससे भ्रमित

की-वर्ड : गुणन, कलनविधि, दो अंकीय, लेटिस, अवधारणात्मक समझ

हो सकता है कि पहले (7 से) गुणा करें और फिर (2) जोड़ें या इसका उल्टा करें (यानी पहले 2 जोड़ें और फिर 7 से गुणा करें)। इसके अलावा जोड़ के सवाल हल करने के विपरीत गुणा में आमतौर पर हल करने की प्रक्रिया में 'हासिल' को कहीं लिखा नहीं जाता है। ऐसे में काफ़ी चीज़ें हल करने वाले को ध्यान में रखनी पड़ती हैं।

यही चरण  $84 \times 60$  या  $84 \times 6 = 504$  के लिए दोहराए जाते हैं। इसमें भी 'हासिल' देना पड़ता है। चूँकि ऐसे कई हासिल के अंक लिखने से भ्रम हो सकता है, इसलिए आमतौर पर कोई भी अंक लिखा नहीं जाता है। लेकिन शुरुआत में ऐसा करना बमुश्किल ही सीखने वालों के लिए मददगार होता है।

इसके अलावा, इकाई का स्थान अकसर खाली छोड़ा जाता है या वहाँ 'x' लिखा जाता है (देखें चित्र-2)। फिर हम 588 और 504 x जोड़ देते हैं। किसी को भी  $8 + x$  जोड़ना नहीं सिखाया जाता है लेकिन यहाँ इन्हें जोड़ने की अपेक्षा की जाती है। यह आश्चर्य की बात है कि

$$\begin{array}{r} 84 \\ \times 67 \\ \hline 588 \\ 504x \end{array}$$

चित्र-2

यह अभी भी कक्षाओं में जारी है जबकि पाठ्यपुस्तकों में बदलाव हुए कम-से-कम 20-25 साल गुजर चुके हैं। चूँकि हम 10 के गुणज, जो इस उदाहरण में 60 है, से गुणा करते हैं तो हम  $84 \times 60$  के आंशिक गुणनफल को 5040 क्यों नहीं लिख सकते हैं? हम उम्मीद करते हैं कि शिक्षक इस जड़ता को तोड़कर 'x' का प्रयोग करना बन्द कर देंगे और अपने शिक्षाशास्त्र को अधिक सार्थक बनाएँगे।

ऐसी समस्याओं से बचने के लिए अन्य क्या तरीके हैं? सौभाग्य से, एक तरीका है। और यह तरीका किन्हीं भी दो पूर्ण संख्याओं के गुणा के लिए इस्तेमाल किया जा सकता है चाहे वे संख्याएँ कितनी भी बड़ी संख्या क्यों न हों।

ऊपर बताई गई मानक विधि केवल एक ही बार वितरण गुण का उपयोग करती है अर्थात्,

$$84 \times 67 = 84 \times (7 + 60) = 84 \times 7 + 84 \times 60$$

जिसके परिणामस्वरूप दो आंशिक गुणनफल 588 और 5040 प्राप्त होते हैं जो अन्त में जोड़ दिए जाते हैं।

हालाँकि, हम वितरण गुण का दो बार उपयोग कर सकते हैं, यानी दोनों संख्याओं के लिए, और चार आंशिक गुणनफल प्राप्त कर सकते हैं।

$$\begin{aligned} 84 \times 67 &= (80 + 4) \times (60 + 7) \\ &= (80 \times 60) + (4 \times 60) + (80 \times 7) + (4 \times 7) \end{aligned}$$

इसे द्वि-आयामी तालिका में अच्छे-से सारणीबद्ध किया जा सकता है (चित्र-3)। और फिर प्राप्त आंशिक गुणनफल को जोड़ा जा सकता है। ध्यान दें कि यह तरीका पहले वाली विधि से पूरी तरह से भिन्न नहीं है। ये कॉलम-वार योग वही आंशिक गुणनफल हैं जो हमें पहले मिले थे।

x	60	7
80	4800	560
4	240	28

चित्र-3

तीन-तीन अंकों वाली संख्याओं, मसलन  $379 \times 825$ , के गुणनफल के लिए, तालिका चित्र-4 की तरह होगी। हालाँकि, जब और भी अधिक अंकों वाली संख्याओं के गुणा की तरफ बढ़ेंगे, इतने सारे शून्य लिखना बोझिल हो सकता है। लेकिन इसका भी एक हल है।

x	800	20	5
300	240000	6000	1500
70	56000	1400	350
9	7200	180	45

चित्र-4

हम एक लघु जाली बना सकते हैं, जैसा कि  $84 \times 67$  के लिए चित्र-5 में दर्शाया गया है। लेकिन आंशिक गुणनफल के शून्यों (जैसे कि चित्र-3 की दीर्घ तालिका में दिखाया गया है) को ध्यान रखने के लिए प्रत्येक खाने को चित्र-6 की तरह विकर्ण से बाँटने में मदद मिलती है।

x	6	7
	दहाई	इकाई
8	48	56
	दहाई	दहाई
4	24	28
	इकाई	इकाई

चित्र-5

x	6	7
	दहाई	इकाई
8	4 8	5 6
	दहाई	दहाई
4	2 4	2 8
	इकाई	इकाई

चित्र-6

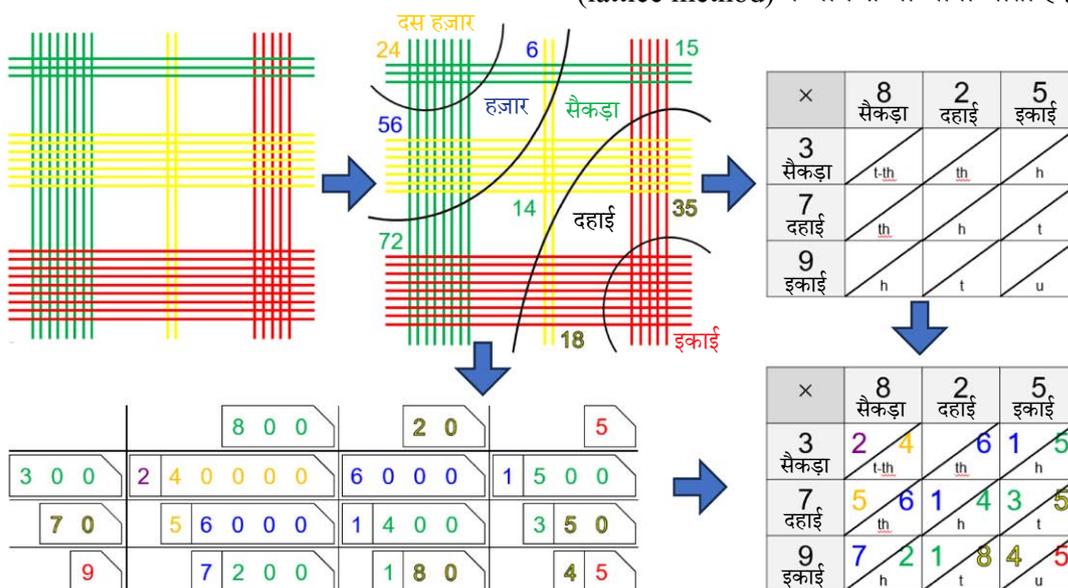
ध्यान दें कि प्रत्येक विकर्ण के अंक (निचले बाएँ से ऊपरी दाएँ तक) किस तरह आंशिक गुणनफल के योग (दाएँ से बाएँ) के अनुरूप हैं, जैसा कि चित्र-7 में दिखाया गया है।



ध्यान दें कि जब हम इस विधि से गुणा करते हैं, तो पहले केवल अंक-दर-अंक गुणा होता है, जिसमें कोई जोड़ नहीं होता और इसलिए गुणा के बीच में कोई हासिल या पुनर्समूहन नहीं होता है। और एक बार जब सारा गुणा पूरा हो जाता है तब हम जोड़ते हैं। इसीलिए यह पिछली प्रक्रिया की तरह लिखित प्रक्रिया ही है। लेकिन बार-बार गुणा फिर जोड़, फिर गुणा, फिर जोड़ पर आए-जाए बगैर। और 0 के स्थान पर (स्थान भरने के लिए) कोई 'x' नहीं होता।

हालाँकि, शैक्षिक दृष्टि से देखें तो शुरुआत बड़ी जाली से करनी चाहिए और उसके बाद तीर कार्ड के माध्यम से छोटी जाली पर आना चाहिए। इस पत्रिका के मार्च 2024 के अंक

में हमने इस बात की समीक्षा की थी कि कुछ 2D बेस-10 ब्लॉक यानी फ्लैट्स-लॉन्स-यूनिट्स (FLU) दो अंकों से दो अंकों वाली संख्या के गुणा के लिए काफी मददगार होती हैं। लेकिन बड़ी संख्याओं के लिए रेखाएँ खींचने और उनको प्रतिच्छेद करने वाले बिन्दुओं की संख्या गिनने से मदद मिलती है। दहाइयों और इकाइयों में अन्तर करने के लिए रेखाओं को तयशुदा रंग से रंगना चाहिए, वगैरह-वगैरह। द्वि-आयामी तालिका के विकर्णों को प्रत्येक प्रतिच्छेदी बिन्दु की संख्याओं को गिनकर भरा जा सकता है। उदाहरण के लिए इसे हम  $379 \times 825$  से समझते हैं (चित्र-11)। (गुणन के लिए प्रतिच्छेदी रेखा खींचने के तरीके को जाली विधि (lattice method) के नाम से भी जाना जाता है।)



चित्र-11

वास्तविक जीवन में खुद हाथ से गुणा करने की ज़रूरत निश्चित रूप से कम हो गई है और इसका श्रेय तकनीकी को जाना है। लेकिन स्कूल में और बोर्ड परीक्षाओं में, विद्यार्थियों को बड़े अंकों की संख्याओं का गुणा हाथ से ही करना पड़ता है। प्रतिशत और क्षेत्रमिति के विभिन्न सवाल में ऐसे गुणा की आवश्यकता पड़ सकती है। हमें उम्मीद है कि यह विधि मानक विधि की तुलना में गुणा करने में आसानी लाएगी।

## References

1. Initiating multiplication (ppt): <https://bit.ly/3L8CGgs>
2. Lattice multiplication (ppt): <https://bit.ly/3W6NjGY>
3. Flats-Longs-Units (review): <https://bit.ly/3RM3W87>

**मैथ स्पेस** अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय की एक गणित प्रयोगशाला है जो स्कूलों, शिक्षकों, अभिभावकों, बच्चों, स्कूली शिक्षा और शिक्षक प्रशिक्षकों के साथ काम करने वाले गैर-सरकारी संगठनों को सेवाएँ प्रदान करती है। यह गणित के लिए सीखने-सिखाने की विभिन्न सहायक सामग्री [mat(h)erials] और साथ-साथ कम लागत वाले संस्करणों की सम्भावना की खोज करती है जिन्हें कबाड़ से बनाया जा सकता है। यह दोनों, गणित से डरने या नफ़रत करने वालों, साथ-ही-साथ गणित प्रेमियों, को सम्बोधित करने का प्रयास करती है। यह एक ऐसा स्थान है जहाँ कई लोगों के साथ चर्चा के माध्यम से विचार उत्पन्न होते हैं और विकसित होते हैं। मैथ स्पेस को आप [mathspace@apu.edu.in](mailto:mathspace@apu.edu.in) पर लिख सकते हैं।

अनुवाद : मेलोडी खलखो पुनरीक्षण : प्रतिका गुप्ता कॉपी एडिटर : अनुज उपाध्याय

# अनुमान लगाने की कला : भाग 2

## कक्षा में फर्मी समस्याओं का उपयोग

मोहन आर.

**मा**र्च 2024 के अंक में प्रकाशित इस लेख के प्रथम भाग में हमने फर्मी समस्याओं के बारे में जाना और इसके कुछ उदाहरण भी देखे। फर्मी समस्याएँ हमें सीमित जानकारी वाले जटिल सवालों को हल करने के लिए कुछ सोचे-समझे अनुमान लगाने की चुनौती देती हैं। हमारे ये अनुमान सहज बुद्धि (intuition) और सामान्य ज्ञान (common sense) पर आधारित होते हैं, जिसके चलते समस्याएँ प्रासंगिक हो जाती हैं और हम उनसे जुड़ पाते हैं। प्रायः वास्तविक जीवन से जुड़ी होने के चलते ये हमें बुनियादी गणितीय अवधारणाओं को व्यवहार में लाने का मौका देती हैं। नतीजतन, कक्षा में ये शिक्षण का उपयोगी साधन बन जाती हैं। लेख के इस दूसरे भाग में हम कक्षा के लिए उपयुक्त फर्मी समस्याओं की और अधिक मिसालों का विश्लेषण करेंगे तथा विद्यार्थियों की रुचि और भागीदारी के लिहाज से इन्हें प्रस्तुत करने के प्रभावी तरीकों पर बात करेंगे।

### कक्षा की गतिविधियों की योजना बनाना

जैसा कि हमने पहले भाग में देखा, फर्मी समस्याओं को हल करने में विभिन्न रणनीतियाँ, मान्यताएँ व अनुमान शामिल होते हैं। कक्षा में, इन समस्याओं को चर्चा-आधारित गतिविधियों के बतौर करना कारगर होता है। इस तरीके के लिए चौकस योजना बनाना होता है और ऐसी समस्याओं का चयन करने की ज़रूरत होती है, जो शिक्षार्थी की उम्र, स्थानीय सन्दर्भ और गणितीय सवालों को हल करने की उसकी तैयारी के लिहाज से उपयुक्त हों। इस हिस्से में, हम नमूने के तौर पर ली गई एक गतिविधि को जाँचेंगे-परखेंगे और कुछ सुझाव भी देंगे।

की-वर्ड : फर्मी विधि, अनुमान, रचनात्मक समस्या-समाधान, तर्क

हर अच्छी गतिविधि एक आकर्षक भूमिका के साथ शुरू होती है। चर्चा शुरू करने के लिए, शिक्षक एक ऐसा पहेलीनुमा, मनोरंजक या हैरतअंगोज सवाल पूछ सकते हैं, जिसके जवाब के लिए विद्यार्थियों को अनुमान लगाना पड़े।

उदाहरण के लिए, इन संकेतों (prompts) पर विचार करें :

- ‘आपकी आँखें एक साल में कितने सेकंड्स के लिए बन्द रहती हैं?’
- ‘यदि आप अपने सिर के सारे बालों के सिरे को सिरे से जोड़कर लम्बाई में बिछाएँ, तो यह लम्बाई कितनी होगी?’

एक अच्छी भूमिका सरल व स्पष्ट होती है, जो यह सुनिश्चित करती है कि प्रत्येक विद्यार्थी अपने खुद के अन्दाज़े लगाकर और उन्हें उचित ठहराकर तुरन्त उसमें रम जाएगा। दिए गए उदाहरणों से, विद्यार्थी यह जानने को उत्सुक हो सकते हैं कि क्या पलक झपकना भी इसमें गिना जाएगा, प्रतिदिन वे कितनी देर तक सोते हैं, उनकी नींद की औसत अवधि क्या है; एक बाल की औसत लम्बाई कितनी है या उनके सिर पर कितने बाल हैं। ऐसे सवाल फ़ौरी प्रयोगों (instant experiments) को और भी प्रोत्साहित कर सकते हैं!

इसके बाद, शिक्षक विद्यार्थियों को सोचे-समझे अनुमान लगाने और आकलन करने में मार्गदर्शन दे सकते हैं। इसके लिए पहले भाग में प्रस्तुत कुछ मानक उदाहरणों (standard examples) और उनकी समाधान-प्रक्रिया की बात करते हुए फर्मी समस्याओं की अवधारणा का परिचय दिया जा सकता है। एनरिको फर्मी की कहानी पर संक्षिप्त चर्चा भी रोचक और ज्ञानवर्धक हो सकती है। इसके बाद, कक्षा को दो-दो या तीन-तीन विद्यार्थियों के छोटे-छोटे समूहों में बाँटा जा सकता है। प्रत्येक समूह को हल करने के लिए एक विशिष्ट समस्या दी जा सकती है।

गतिविधि को आगे बढ़ाते हुए शिक्षक समस्या को पढ़कर सुनाएँगे और इस पर चर्चा में मदद करेंगे कि सवाल का मतलब क्या है और विद्यार्थी इसकी किस-किस तरह से व्याख्या कर सकते हैं। यहाँ इस बात पर चर्चा करना उपयोगी होगा कि सवाल के कई जवाब स्वीकार्य हो सकते हैं। विद्यार्थी अपने फ़ौरी अनुमान लगा सकते हैं, जिन्हें उन्हें लिखना होगा। फिर उनसे बेहतर अनुमान लगाने की रणनीति बनाने के लिए कहा जा सकता है। इसमें छोटे-छोटे अनुमानों वाली समस्याओं की एक ऐसी शृंखला हो सकती है, जिनमें दैनिक जीवन के अनुभवों और सामान्य ज्ञान के आधार पर तर्क करने व गणना करने की ज़रूरत हो। यह देखना सीखने का एक मूल्यवान अनुभव हो सकता है कि विभिन्न समूह समस्या को कैसे हल कर रहे हैं और प्रत्येक चरण पर वे क्या धारणाएँ बना रहे हैं। और अगर ऐसी समस्याएँ चुनी जाएँ ताकि विभिन्न समूहों द्वारा सवाल को हल करने के लिए अपनाए जा रहे कुछ चरणों को प्रयोगात्मक रूप से सत्यापित किया जा सके (जैसे मापना), तो इससे मदद मिलेगी।

शिक्षक चर राशियों (variables) को परिभाषित करने और उनके चरणों को बेहतर ढंग से हल करने के सूत्र बनाने में समूहों की मदद कर सकते हैं। फिर वे सम्भावित जवाबों की शृंखला दिखाने के लिए समूहों से उनके अनुमान पूछ सकते हैं, और समय-समय पर कक्षा के साथ सवाल को हल करने के अलग-अलग तरीके साझा कर सकते हैं। विद्यार्थियों के लिए यह समझना ज़रूरी है कि हम परिमाण की कोटि/स्तर का (मोटा-मोटा) क्रयास लगा रहे हैं, न कि एक सटीक संख्या तलाश रहे हैं, जो कि फर्मी समस्याओं के सन्दर्भ में सम्भव नहीं है।

विद्यार्थियों को उन संख्याओं की पहचान करनी चाहिए, जो जवाब के लिहाज़ से सम्भवतः बहुत छोटी या बहुत बड़ी हैं। इसके बाद, उन्हें वे अनुमान लगाने चाहिए जो उन्हें सही जवाब के करीब लगते हैं। अन्तिम चर्चा के दौरान, विद्यार्थियों को अपनी धारणाएँ और अपने अनुमान साझा करने चाहिए। वे अपने अनुमानों की तुलना उन्हें मिले जवाबों और उनके द्वारा जुटाए गए आँकड़ों / उनके जवाबों के लिए प्रस्तुत प्रमाण से कर सकते हैं। यह चर्चा करना उपयोगी रहेगा कि क्या प्रयोग दोहराए जाने पर जवाब बदल सकता है, और कौन-से कारकों की वजह से अलग-अलग जवाब मिल सकते हैं। अन्त में, कक्षा उन खुले सवालों पर चर्चा कर सकती है, जिनसे जाँच के लिए और अधिक सवाल सामने आते हैं।

### नमूने के तौर पर गतिविधि

आइए एक उदाहरण देखें कि कक्षा के लिए एक आदर्श गतिविधि कैसे सामने आ सकती है। फर्मी समस्याओं से परिचित कराने

और विद्यार्थियों को समूहों में विभाजित करने के बाद, शिक्षक अब उन्हें समस्या समाधान की गतिविधि में सक्रियता से शामिल करते हैं। यह दृश्य 7वीं कक्षा का है।

**शिक्षक :** अब जब हम यह समझ गए हैं कि फर्मी समस्याएँ क्या होती हैं और उन्हें कैसे हल किया जाता है, तो आपके लिए एक सवाल यह रहा : यदि लोग एक-दूसरे का हाथ थामकर खड़े हों, तो मध्य प्रदेश राज्य के चारों तरफ एक घेरा बनाने के लिए कितने लोगों की आवश्यकता होगी?

**(विद्यार्थी फुसफुसाते हैं, कुछ उत्सुक नज़र आते हैं, तो कुछ हैरान।)**

**शिक्षक :** इससे पहले कि हम अनुमान लगाना शुरू करें, आइए एक आसान समस्या को हल करने का प्रयास करें। मान लीजिए कि हम सब एक-दूसरे का हाथ पकड़कर एक-दूसरे के बगल में खड़े हो जाएँ और एक वृत्त बनाएँ, तो वह वृत्त कितना बड़ा होगा?

इस सवाल का जवाब देने का एक तरीका यह है कि अपनी बाँहों को अपने दोनों ओर पूरा फैलाकर 'I' का आकार बनाते हुए उनकी लम्बाई का पता लगाएँ। फिर हम इस लम्बाई को कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या से गुणा कर सकते हैं। इससे हमें वृत्त की परिधि (*perimeter*) मिल जाएगी। क्या आपको इस विधि में कोई गड़बड़ लगती है?

**विद्यार्थी 1 :** हाँ सर, दिक्कत तो है। कुछ विद्यार्थियों के हाथ लम्बे होते हैं इसलिए जवाब इस पर निर्भर करेगा कि किसकी बाँहों की लम्बाई ली गई है।

**शिक्षक :** बढ़िया अवलोकन! मैं एक नापने का फीता लाया हूँ। आइए हम तुरन्त पाँच बच्चों की बाँहों की लम्बाई नापें और जाँचें कि इन लम्बाइयों में कितना अन्तर है।

**(शिक्षक लम्बाई नापते हैं और बोर्ड पर लिखते हैं।)**

**शिक्षक :** जैसा कि आप देख सकते हैं, हम लम्बाई मीटर में नाप रहे हैं। नाप किसका लिया गया है, इस आधार पर अन्तिम जवाब बदल जाता है। तो, 0.9 मीटर को 25 (व्यक्तियों) से गुणा करने पर 22.5 मीटर आएगा, और 1.1 मीटर को 25 से गुणा करने पर 27.5 मीटर आएगा। चूँकि हम अन्ततः एक बहुत बड़ी संख्या की गणना करने जा रहे हैं इसलिए हम दशमलव या इकाई के स्थान की इतनी चिन्ता नहीं करेंगे, केवल दहाई के स्थान की चिन्ता करेंगे। तो मोटेतौर पर कहें तो आपकी बाँहों की लम्बाई लगभग 1 मीटर होगी, और इसे विद्यार्थियों की कुल संख्या से गुणा करने पर यह 20-30 मीटर के बीच आएगी, ठीक है?

अब, आइए थोड़े सम्बन्धित, लेकिन अलग सवाल का जवाब देने का प्रयास करें : मान लीजिए कि हम अपनी आयताकार कक्षा के अन्दर एक-दूसरे के हाथ पकड़कर दीवारों से सटे खड़े हैं। कमरे को पूरी तरह से घेरने के लिए कितने विद्यार्थियों की आवश्यकता होगी?

**विद्यार्थी 2 :** यह पता करने के लिए हमें कक्षा की परिधि नापनी चाहिए।

**शिक्षक :** बिल्कुल! (यह मानते हुए कि कक्षा एक आयताकार कमरा है, शिक्षक कमरे की लम्बाई और चौड़ाई नापते हैं और विद्यार्थियों से उसकी परिधि की गणना करने के लिए कहते हैं।) अब चूँकि हम कमरे की परिधि मीटर में जानते हैं और मानते हैं कि प्रत्येक विद्यार्थी की बाँहों की लम्बाई 1 मीटर है, तो हम लम्बाई की इकाई का उल्लेख व्यक्तियों की संख्या के हिसाब से कर सकते हैं। यानी कि हम 25 मीटर की जगह 25 व्यक्ति कह सकते हैं।

क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि स्कूल की इमारत को घेरने में कितने विद्यार्थी लगेंगे?



चित्र-1 : लम्बाई नापे बिना विद्यार्थी अनुमान लगाते हैं।

**शिक्षक :** आइए, अब हम अपने सवाल को थोड़ा दिलचस्प बनाते हैं। स्कूल के मैदान को घेरने में कितने लोग लगेंगे? और स्कूल परिसर को घेरने में? और गाँव को घेरने की बात करें, तब कितने लोग लगेंगे?

(विद्यार्थी अनुमान लगाते हैं और अपने तर्क साझा करते हैं।)

**शिक्षक :** क्या आप लोगों को लगता है कि गाँव को घेरने में हमें कोई समस्या होगी? क्या ज़मीन की सतह समतल है?

**विद्यार्थी 3 :** नहीं, पास में एक झील है और कुछ जगहें दूसरों की तुलना में अधिक ऊँचाई पर हैं।

**शिक्षक :** हाँ, यह एक ऐसी समस्या है जिसका समाधान हमें फिर से यह मानकर करना होगा कि गाँव के चारों ओर की ज़मीन का स्तर समान है। इसके अलावा, जब हम बड़ी दूरियाँ नापते हैं तो यह नाप हमें आमतौर पर किलोमीटर में मिलती है, इसलिए हमें उन्हें मीटर में बदलना होगा।

अब हम अपनी मूल समस्या पर वापस आते हैं, यह मध्य प्रदेश का नक्शा है। जैसा कि आप देख सकते हैं कि राज्य की सीमा एक वृत्त की तरह भी नहीं है, इसलिए हमें कुछ मान्यताएँ लेकर राज्य की परिधि की गणना करनी होगी। चूँकि ज़्यादातर लोग वयस्क हैं, जिनकी बाँहों की लम्बाई बच्चों की तुलना में अधिक होती है, तो आइए यह भी मान लें कि बाँहों की लम्बाई 1 मीटर से 1.5 मीटर के बीच है। इन अतिरिक्त मान्यताओं के साथ, आइए अब यह पता करने का प्रयास करें कि राज्य के चारों तरफ़ घेरा बनाने में कितने लोगों की आवश्यकता होगी।

(गतिविधि जारी रहती है।)

कुछ ज़रूरी सुझाव :

- यह गतिविधि विद्यार्थियों के लिए अपने लिखित व मौखिक सम्प्रेषण कौशलों का अभ्यास करने का भी एक शानदार अवसर है। गतिविधि के अन्त में अकसर विद्यार्थियों को अपने निष्कर्षों को अन्य विद्यार्थियों के साथ साझा करने में आनन्द आता है।
- फर्मी समस्याओं को हल करने में अकसर इकाइयों को परिवर्तित करना शामिल होता है और इसलिए एक हिसाब-किताब रखने की युक्ति के रूप में *विमीय विश्लेषण (dimensional analysis)* से परिचित कराना उपयोगी हो सकता है।
- विद्यार्थियों को साधारण कैलकुलेटर उपलब्ध कराने से भी गणना में तेज़ी आ सकती है।

संक्षेप में, विद्यार्थियों से केवल कुछ तुक्के लगवाने के बजाय एक सुगठित प्रक्रिया के द्वारा उनका मार्गदर्शन करना बेहतर होता है। चरण-दर-चरण प्रक्रिया को यहाँ दोहराया गया है—

1. प्रश्न से शुरुआत करें और यह सुनिश्चित करें कि हर कोई उसे समझ गया है।
2. बिना कोई गणना किए एक मोटा-मोटा अनुमान लगाएँ।
3. रोजमर्रा के अनुभवों व आकलनों के आधार पर तर्क और गणना के साथ एक सोचा-समझा अनुमान लगाएँ।
4. चर राशियों को परिभाषित करें और समस्या को हल करने के लिए सूत्र बनाएँ।
5. प्रयोग करें, चीजों को नापें, आकलनों को बेहतर बनाने के लिए जानकारी ढूँढ़ें और जवाब के लिए सबसे छोटे, सबसे बड़े और सबसे सम्भावित मूल्यों का पता लगाएँ।
6. निष्कर्षों का सारांश दें, सम्भावित त्रुटियों और सीखी गई दिलचस्प बातों को नोट करें, और भविष्य में की जाने वाली छान-बीन के लिए दिशा-निर्देश सुझाएँ।

नीचे हम आयु के अनुसार वर्गीकृत, फर्मी समस्याओं का एक संग्रह दे रहे हैं। इसे इंटरनेट से लिया गया है। अपनी कक्षा के माहौल और स्थानीय सन्दर्भों के लिहाज से शिक्षक इन समस्याओं में फेरबदल कर सकते हैं।

#### 4-8 वर्ष आयु वर्ग के लिए फर्मी समस्याएँ

किशोर विद्यार्थियों के पास ठोस फर्मी समस्याएँ होनी चाहिए, जिन्हें वे समझ सकें और पूरा कर सकें। उन्हें रुकने और अपने अनुमानों की जाँच करने के लिए दो अवसरों का चयन करना चाहिए – एक शुरू-शुरू में और दूसरा बीच में। कार्य पूरा कर लेने के बाद, विद्यार्थियों को यह दिखाने के लिए चित्रों, संख्याओं या समीकरणों और शब्दों या वाक्यों का उपयोग करना चाहिए कि उन्होंने क्या किया और क्या सीखा।

इस आयु स्तर के फर्मी सवालों के लिए यहाँ कुछ सुझाव दिए गए हैं।

1. आपकी लम्बाई तक पहुँचने के लिए हमें कितने गुटकों का गट्टर लगाना होगा?
2. इस नोटबुक को ढँकने के लिए कितने स्टिकर चाहिए होंगे?
3. इस किताब में कितने विराम चिह्न (या अक्षर आदि) हैं?
4. इस हॉल के फ़र्श को कितनी रंगोलियाँ ढँक लेंगी?
5. हम एक सप्ताह में कितने केले खाते हैं?
6. पूरे कमरे में यहाँ से यहाँ जाने के लिए आपको कितनी छलाँगें लगानी होंगी?
7. मेरी कलाई पर बिल्कुल फिट बैठने वाला कंगन बनाने में कितने मोतियों की आवश्यकता होगी?
8. इस बर्तन में कितने बड़े चम्मच पानी भरेगा?
9. एक मिनट में स्कूल बस स्टॉप से कितनी कारें गुज़रती हैं?
10. आप एक मिनट में कितनी बार पलकें झपकाते हैं?

#### 9-11 आयु वर्ग के लिए फर्मी समस्याएँ

अगर इस आयु वर्ग के विद्यार्थियों को इन सवालों में शामिल चीजों को छूने और उन्हें उलटने-पलटने दिया जाए, तो वे आमतौर पर फर्मी सवालों को बेहतर ढंग से समझते हैं। उन्हें कम-से-कम सवाल में जो पूछा गया है उसे करने की कोशिश करनी चाहिए, भले ही उसे पूरा करना व्यावहारिक न हो।

इस आयु स्तर के फर्मी सवालों के लिए कुछ नुस्खे यहाँ दिए गए हैं।

1. आपकी ऊँचाई, स्कूल की ऊँचाई, दुनिया की सबसे ऊँची इमारत, माउंट एवरेस्ट और बाहरी अन्तरिक्ष की ऊँचाई के बराबर की ऊँचाई प्राप्त करने के लिए एक रुपए के कितने सिक्कों की ज़रूरत होगी?
2. आपके वज़न, कार के वज़न, स्कूल के भवन के वज़न, पृथ्वी के वज़न की बराबरी के लिए कितने अंगूरों की ज़रूरत होगी?
3. हॉल में यहाँ से वहाँ तक घूमने के लिए एक रुपए का सिक्का कितनी बार लुढ़केगा?
4. इस कमरे को भरने के लिए कितने लड्डुओं की ज़रूरत होगी?
5. एक-दूसरे का हाथ पकड़कर मध्य प्रदेश के चारों ओर घेरा बनाने के लिए कितने लोगों की ज़रूरत पड़ेगी?
6. यदि आप अपने लिए एक दिन में साँस लेने के लिए आवश्यक हवा से भरा हुआ एक टैंक तैयार करते हैं, तो वह टैंक कितना बड़ा होगा?
7. हमारे स्कूल के मैदान में घास के कितने तिनके हैं?
8. एक विद्यार्थी प्रति सप्ताह कितने सेकंड सोता है?
9. हमारे स्कूल की दीवार की पूरी लम्बाई घेरने वाला एक भित्तिचित्र /म्युरल बनाने में क्या-क्या (कितना समय, लागत, लोग, सामग्री) लगेगा?
10. टपकते पानी वाले नल से एक दिन में कितना पानी बर्बाद होता है?

### किसी फर्मी समस्या को हल करने में विद्यार्थियों की मदद करना

एक अच्छी फर्मी समस्या विद्यार्थियों को ज़्यादा सार्थक गणितीय सवाल पूछने और उन्हें हल करने के लिए प्रेरित करती है। उदाहरण के लिए, यदि हम किसी राहत शिविर में लोगों को एक सप्ताह के लिए रखने की लागत पूछें, तो विद्यार्थियों को इन सवालों के बारे में सोचने की ज़रूरत होगी कि भोजन, कपड़े और अन्य ज़रूरी वस्तुएँ कहाँ से प्राप्त की जाएँगी। इसके साथ ही, वे इन चीज़ों को प्राप्त करने, इनका भण्डारण करने और इन्हें एक जगह से दूसरी जगह ले जाने की लागत और उसमें लगने वाले समय पर भी विचार करेंगे, जिसमें ज्यामिति, अनुपात सहित विभिन्न अध्यायों से सीखी गई अवधारणाएँ शामिल होती हैं।

इंटरनेट अनेक फर्मी समस्याएँ खोजने का एक बेहतरीन संसाधन है। इन्हें स्थानीय परिवेश के हिसाब से ढाला जा सकता है। साथ ही, विद्यार्थियों को स्थानीय परिवेश के ऐसे उदाहरणों की याद दिलाना भी उपयोगी होता है, जिनमें फर्मी-क्रिस्म के अनुमानों का उपयोग किया जाता है। मिसाल के लिए, कोई किसान अपने खेत में आम की उपज का अनुमान लगाना चाहता है, कोई मछुआरा उसके द्वारा किसी विशेष मौसम में पकड़ी जाने वाली मछली की मात्रा का अनुमान लगाना चाहता है, या एक विक्रेता त्यौहारी मौसम के दौरान खरीदारों की संख्या का अनुमान लगाना चाहता है, वगैरह। यह भी सुझाव है कि विद्यार्थी अपनी स्वयं की फर्मी समस्याएँ बनाएँ, उन्हें हल करने के तरीके ढूँढ़ें और कक्षा में उन्हें साझा करें।

### निष्कर्ष

एनसीएफ-एसई-2023 में गणित शिक्षा के अन्तर्गत सूचीबद्ध उद्देश्यों में से एक यह है-

“गणित में क्या सच होना चाहिए या क्या नहीं, इसके लिए सहजबोध (intuition) विकसित करना अक्सर उतना ही महत्वपूर्ण होता है जितना कि अधिक औपचारिक ‘कागज़-कलम’ वाला गणित करना। गणित के विभिन्न क्षेत्रों में तर्क के सामान्य विषयों और पैटर्न पर ध्यान केन्द्रित करना, सटीक जवाबों पर काम करने से पहले सही जवाबों का अनुमान लगाना (उदाहरण के लिए, ‘परिमाण की कोटि’ के सन्दर्भ में), और सुदृढ़ प्रमाणों को सिद्ध करने से पहले अनौपचारिक तर्क-वितर्क करना, ये सभी ऐसा गणितीय अन्तर्ज्ञान विकसित करने के प्रभावी तरीके हैं।”

फर्मी समस्याएँ विद्यार्थियों को न केवल अनुमान लगाने के कौशल के सन्दर्भ में अन्तर्ज्ञान के विकास का अवसर प्रदान करती हैं, बल्कि उन्हें उनकी गणितीय अभिव्यक्ति को निखारने का अवसर भी देती हैं।

इसके अलावा, एनसीएफ़-एसई-2023 में गणित सीखने के सन्दर्भ में मौजूदा चुनौतियों को सूचीबद्ध किया गया है। ये कुछ इस प्रकार हैं :

- “गणितीय सीखना पारम्परिक रूप से रचनात्मक और सौन्दर्यपूर्ण होने की बजाय ज्यादा ‘यांत्रिक’ व ‘प्रक्रियात्मक’ रहा है। यह गणित की प्रकृति की एक मिथ्या प्रस्तुति है जिसे स्कूली पाठ्यक्रम में ही सम्बोधित किया जाना चाहिए।
- अक्सर, पाठ्यपुस्तकों में गणितीय अवधारणाओं को प्रस्तुत करने वाली सामग्री उस परिवेश से बहुत दूर होती है, जिस परिवेश से शिक्षार्थी आते हैं। छोटे बच्चों को ऐसी गणितीय अवधारणाएँ आत्मसात करना आसान लगता है, जो सीधे उनके अनुभवों से जुड़ी होती हैं। पाठ्यपुस्तकों, कक्षा की गतिविधियों और उदाहरणों को यथासम्भव विद्यार्थियों के जीवन से प्रेरित और जुड़ा चाहिए।
- गणित सीखने-सिखाने में गणितीय खोज के लिए बहुत महत्वपूर्ण गणितीय अन्तर्ज्ञान व अनौपचारिक तर्क के विकास पर जोर दिए जाने की बजाय प्रतीकात्मक भाषा और औपचारिक प्रक्रियाओं के सटीक और व्यवस्थित उपयोग पर ग़लत और विशेष जोर दिया जाता है।

फर्मी समस्याएँ गणित के शिक्षकों को रचनात्मक रूप से ऐसे सार्थक गणितीय प्रश्न पूछने के अवसर प्रदान करती हैं, जिनका विद्यार्थियों की रोज़मर्रा की जिन्दगी से सीधा सम्बन्ध होता है। वे गणित को देखने और अन्वेषण करने का एक अलग नज़रिया पेश करती हैं। हम आपसे आग्रह करते हैं कि आप अपनी कक्षा में कुछ फर्मी समस्याओं को आजमाएँ और अपने अनुभव हमसे साझा करें।



**मोहन आर. अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय में गणित पढ़ाते हैं। मूलतः वे बीजगणितज्ञ हैं और गणित शिक्षा व गणित सम्प्रेषण में भी रुचि रखते हैं। वे कर्नाटक के गणित ओलम्पियाड के क्षेत्रीय समन्वयक हैं।**  
उनसे [mohan.r@apu.edu.in](mailto:mohan.r@apu.edu.in) पर सम्पर्क किया जा सकता है।

**अनुवाद : मनोहर नोतानी पुनरीक्षण : सुशील जोशी कॉपी एडिटर : शहनाज़**

### विजय रविकुमार, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय द्वारा सुझाई गई एक मज़ेदार फर्मी समस्या :

पृथ्वी पर रहने वाले प्रत्येक व्यक्ति के बारे में सोचें। मान लीजिए कि प्रत्येक व्यक्ति  $p$  के सिर के बालों की संख्या  $H_p$  है। ऐसे सभी  $H_p$  का गुणनफल कितना होगा?



विज्ञान प्रसारण केन्द्र, एन सी एफ़, एन सी ई-2023 में गणित सीखने के सन्दर्भ में मौजूदा चुनौतियों को सूचीबद्ध किया गया है। ये कुछ इस प्रकार हैं :

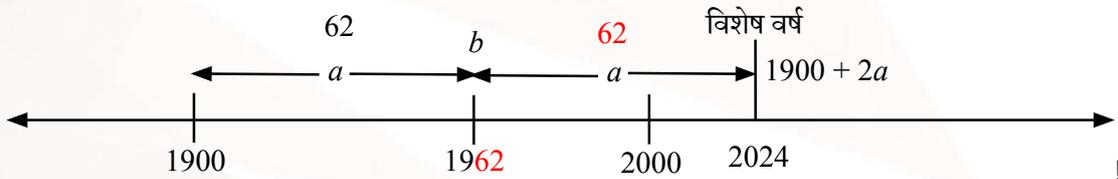
# विशेष वर्ष

## जेम्स मेटज़ और ब्रैड युई

हमारी दोस्त लॉरी का जन्म वर्ष 1962 में हुआ था और इस साल वे 62 साल की हो जाएँगी। हमें यह दिलचस्प लगा। हमने उन्हें बताया कि यह उनका 'विशेष वर्ष' है। फिर हमने सोचा कि हर व्यक्ति अपना विशेष वर्ष कैसे पता कर सकता है; यानी वह वर्ष जिसमें उसके जन्म के वर्ष के अन्तिम दो अंक उसकी आयु बताते हों। माना कि किसी का जन्म का वर्ष  $b$  है। जिनकी रुचि हो वे आगे पढ़ने से पहले खुद इसे पता करने की कोशिश कर सकते हैं।

लॉरी के मामले में, किसी को भी यह काफी आसानी से समझ आ जाता है कि उनके 'विशेष वर्ष' में उनकी आयु उनके जन्म के वर्ष (1962) और 1900 के बीच के अन्तर के बराबर है। उनका विशेष वर्ष पता करने के लिए हम केवल इस अन्तर को (उनके जन्म के वर्ष के अन्तिम 2 अंक) उनके जन्म के वर्ष में जोड़ देते हैं। इस प्रकार, हम फ़ौरन पता लगा सकते हैं कि चूँकि लॉरी का जन्म 1962 में हुआ था, इसलिए उनका विशेष वर्ष  $1962 + 62$  यानी 2024 होगा और इस वर्ष वे 62 वर्ष की होंगी।

साधारणतः, मान लीजिए कि कोई व्यक्ति 1900 और 1999 के बीच वर्ष  $b$  में जन्मा था। अगर अपने विशेष वर्ष  $S$  में किसी व्यक्ति की उम्र  $a$  वर्ष है, तो उस व्यक्ति के जन्म के वर्ष के अन्तिम दो अंक  $b - 1900 = a$  होंगे और चूँकि  $S = b + a$  है, इसलिए प्रतिस्थापन द्वारा  $S = b + (b - 1900)$  होगा। 1949 में जन्मा व्यक्ति 1998 में 49 वर्ष का होगा, इस प्रकार 1998 उसका विशेष वर्ष है। 1900 से 1999 के बीच जन्मे किसी व्यक्ति, जिसकी उम्र  $a$  वर्ष है, के विशेष वर्ष  $S$  की गणना  $1900 + 2a$  से की जा सकती है। चूँकि 1900 और  $2a$  दोनों ही सम संख्याएँ (even numbers) हैं, इसलिए विशेष वर्ष  $S$ , हमेशा कोई सम संख्या वाला साल होना चाहिए। (देखें चित्र-1)



चित्र-1 : लॉरी का विशेष वर्ष

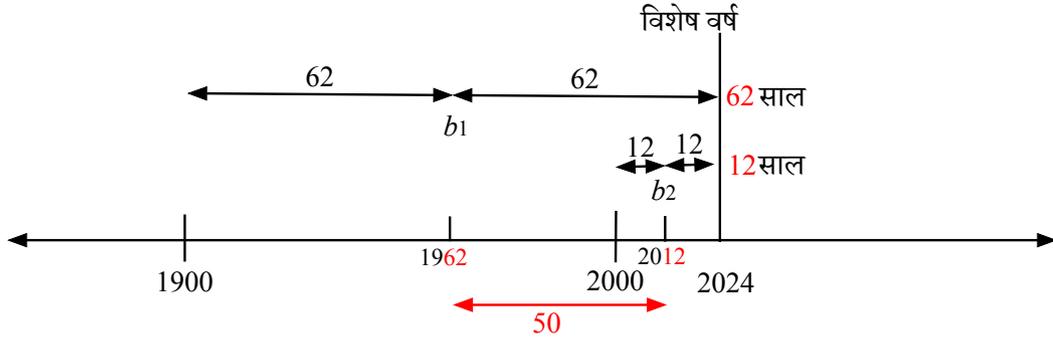
इसके अलावा, यदि उनका विशेष वर्ष  $S$  है, तो उनकी आयु  $a = \frac{S - 1900}{2}$  होगी।

की-वर्ड : आयु, पैटर्न, रिश्ता

1900 में जन्मे व्यक्ति के लिए, उनके जन्म का वर्ष यानी 1900, विशेष वर्ष होगा। 2000 से 2099 के बीच जन्मे व्यक्ति का विशेष वर्ष  $S = b + (b - 2000)$  होगा। यदि 1900 से 1999 के बीच जन्मे व्यक्ति का विशेष वर्ष  $S_1$  है और 2000 से 2099 के बीच जन्मे दूसरे व्यक्ति का विशेष वर्ष  $S_2$  है, तो उन दोनों का विशेष वर्ष एक ही है, अर्थात् यदि  $S_1 = S_2$  है, तो  $b_1 + (b_1 - 1900) = b_2 + (b_2 - 2000)$  होगा,

इसलिए  $b_2 - b_1 = 50$ , और इस प्रकार  $a_1 - a_2 = 50$  होगा।

सामान्य तौर पर, कहा जा सकता है कि यदि दो अलग-अलग लेकिन एक के बाद आने वाली सदियों में जन्मे दो व्यक्तियों की उम्र का अन्तर 50 वर्ष है, तो उन दोनों का विशेष वर्ष एक ही होगा। इस प्रकार, लॉरी (या 1962 में जन्मे सभी लोगों) और 2012 में जन्मे सभी लोगों का विशेष वर्ष 2024 होगा। ये कॉमन एरा (जिसे ईसवी सन भी कहते हैं) में विशेष वर्ष होते हैं। (देखें चित्र-2)



चित्र-2 : साझा विशेष वर्ष

पायथागोरस का जन्म 570 ई.पू. में हुआ था। अपने विशेष वर्ष में वे  $a$  वर्ष के थे, इसलिए उनके जन्म के साल के अन्तिम दो अंक  $b - 500 = a$  होते। चूंकि  $S = b - a$ , इसलिए प्रतिस्थापन से,  $S = 500$  होता। है न आश्चर्य की बात! केवल पायथागोरस ही नहीं, बल्कि 599 से 500 ई.पू. के बीच पैदा हुए सभी लोगों का विशेष वर्ष एक ही यानी 500 ई.पू. होता। ज़ाहिर है ईसवी (कॉमन एरा) से पहले पैदा हुए किसी भी व्यक्ति को यह पता नहीं होगा कि उनका कोई विशेष वर्ष है, जब तक कि वे 1 ईसवी के बेंचमार्क का उपयोग न करते, जैसा कि हम करते हैं। (देखें चित्र-3)



चित्र-3 : पायथागोरस के लिए विशेष वर्ष



**जेम्स मेट्ज़** गणित के एक सेवानिवृत्त प्रशिक्षक हैं। वे हर साल एक महीने के लिए टीचर्स एक्रॉस बॉर्डर्स – दक्षिणी अफ्रीका में स्वेच्छा से सेवा प्रदान करते हैं। उन्हें गणित के सवालों को हल करने में आनन्द आता है। जेम्स से [metz@hawaii.edu](mailto:metz@hawaii.edu) पर सम्पर्क किया जा सकता है।

**ब्रेड युई** खूबसूरत हवाई के निवासी हैं। वे एक रचनात्मक और खुशमिजाज शिक्षक हैं। उन्होंने 15 वर्षों तक गणित और अँग्रेजी पढ़ाने का काम किया है, और उन्होंने टीचर्स एक्रॉस बॉर्डर्स – दक्षिणी अफ्रीका के साथ स्वेच्छा से 8 यात्राएँ की हैं। वे वर्तमान में ओआहू के कामेहामेहा स्कूल कपालामा में बीजगणित-1 पढ़ाते हैं, यह हवाई के देशज बच्चों की सेवा के लिए समर्पित एक शैक्षणिक संस्थान है। दिल बहलाने के लिए ब्रेड को पढ़ना, टेनिस खेलना, खाना पकाना और कॉफी पीना पसन्द है। ब्रेड से [Brad.uy@gmail.com](mailto:Brad.uy@gmail.com) पर सम्पर्क किया जा सकता है।



अनुवाद : प्रियेश गुप्ता पुनरीक्षण : सुशील जोशी कॉपी एडिटर : शहनाज

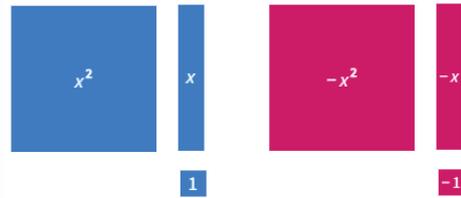
# बीजगणितीय टाइल्स की समीक्षा

## मैथ स्पेस

**बी**जगणितीय टाइल्स द्विमीय आधार आधार-10 ब्लॉक्स का सामान्य रूप हैं। ये फ्लैट्स-लॉन्ग्स-यूनिट्स (flats-longs-units) या एफ़एलयू (FLU) के नाम से लोकप्रिय हैं। एट राइट एंगल्स के मार्च, 2024 अंक में इनकी समीक्षा की गई थी [5]। आसान शब्दों में कहें तो, दस का सामान्यीकरण “ $x$ ” के रूप में निम्नांकित ढंग से होता है, जिससे तीन बुनियादी बीजगणितीय टाइलें बनती हैं (अनुशंसित माप :  $x \rightarrow 2$  इंच और  $1 \rightarrow 2$  सेमी) :

- बड़ा वर्ग, यानी फ्लैट या 100,  $x^2$  बन जाता है ( $x \times x$  या 2 इंच  $\times$  2 इंच)
- आयत, यानी लॉन्ग या 10,  $x$  बन जाता है ( $x \times 1$  या 2 इंच  $\times$  2 सेमी)
- छोटा वर्ग, यानी यूनिट या 1 वैसा ही रहता है ( $1 \times 1$  या 2 सेमी  $\times$  2 सेमी)

लेकिन एक महत्वपूर्ण अन्तर यह है कि बीजगणितीय टाइलें दो (अलग-अलग) रंगों में आती हैं ताकि धनात्मक और ऋणात्मक रूपों, यानी कि  $x^2$  और  $-x^2$ ,  $x$  और  $-x$ , 1 और  $-1$  को दर्शाया जा सके, जैसा कि चित्र-1 में दिखाया गया है। अधिकांश आभासी [virtual] (और ऑनलाइन) रूप माप के आधार पर धनात्मक टाइलों को अलग-अलग रंगों में दिखाते हैं, लेकिन सभी ऋणात्मक टाइलों को एक ही रंग में दिखाते हैं। तार्किक नज़रिए से देखें तो, यदि सभी ऋणात्मक टाइलें एक ही रंग की हैं, तो सभी धनात्मक टाइलें भी एक ही रंग की होनी चाहिए। मैथिगोन पॉलीपैड (Mathigon Polypad) में आप सभी धनात्मक टाइलों को समान रंग का बना सकते हैं (चित्र-1)। एक और विकल्प यह है कि टाइलों को दुतरफ़ा (double-sided) बनाया जाए ताकि उनके एक तरफ़ की सतह धनात्मक टाइल को दर्शाए, जबकि दूसरी सतह ऋणात्मक टाइल को। दुतरफ़ा टाइलों के कई फ़ायदे हैं, जैसे कि :



चित्र-1

1. इन्हें ऐसे किसी भी डिब्बे से आसानी-से बना सकते हैं, जिसकी अन्दर की सतह बाहरी सतह से स्पष्ट रूप से अलग हो।
2. धनात्मक और ऋणात्मक टाइलों के लिए दो अलग-अलग सेट बनाने की बजाय टाइलों का एक ही सेट बनाना होता है।

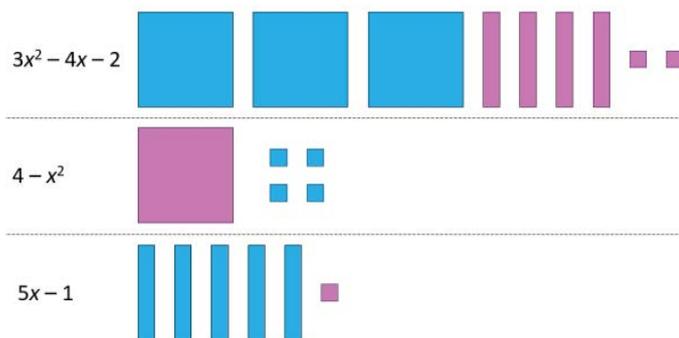
की-वर्ड : TLM; मॉडलिंग; बीजगणितीय टाइल्स; प्रस्तुतीकरण; गणितीय संक्रियाएँ

3. शिक्षण के दृष्टिकोण से देखें, तो ये काफ़ी प्रभावी होती हैं क्योंकि किसी टाइल को पलटने या उलटने से उसका चिह्न धनात्मक से ऋणात्मक या ऋणात्मक से धनात्मक में बदल जाता है। इसलिए टाइल को पलटना चिह्न बदलने के समान होता है। यह घटाव को समझाने के लिए बहुत उपयोगी होता है।

चूँकि बीजगणितीय टाइलों में ऋणात्मक टाइलें भी शामिल होती हैं, इसलिए पूर्णाकों (integers) की समझ बहुत महत्वपूर्ण है (देखें [6]), खासकर इन बातों की :

- क. शून्य-युग्म (zero-pairs) : 1 और 1-,  $x$  और  $-x$ ,  $x^2$  और  $-x^2$  जिन्हें ज़रूरत के हिसाब लाया या हटाया जा सकता है, क्योंकि ऐसा करने से व्यंजक (expression) नहीं बदलता।
- ख. किसी राशि को घटाना उस राशि के योज्य प्रतिलोम (additive inverse) को जोड़ने के तुल्य होता है। उदाहरण के लिए, 13,  $-7$ ,  $5x$  और  $-2x^2$  को घटाना क्रमशः  $-13$ ,  $7$ ,  $-5x$  और  $2x^2$  को जोड़ने के समान ही है।
- ग. धनात्मक  $\times$  ऋणात्मक और ऋणात्मक  $\times$  धनात्मक दोनों ही ऋणात्मक होते हैं।
- घ. ऋणात्मक  $\times$  ऋणात्मक, धनात्मक होता है।

तीन मापों की इन 6 टाइलों के ज़रिए हम (i) एक चर (variable) वाले (ii) 2 की घात (degree) वाले (iii) पूर्णांक गुणांकों (integer coefficients) वाले किसी भी बहुपद (polynomial) को दर्शा सकते हैं। चित्र-2 में ऐसे कई बहुपदों को दर्शाया गया है, जहाँ नीला रंग धनात्मक टाइलों को और गुलाबी रंग ऋणात्मक टाइलों को इंगित करता है। ध्यान दीजिए कि  $4 - x^2$  असल में  $4 + (-x^2)$  और  $5x - 1$  दरअसल  $5x + (-1)$  है। इसीलिए हमें ऋणात्मक टाइलों की ज़रूरत होती है।



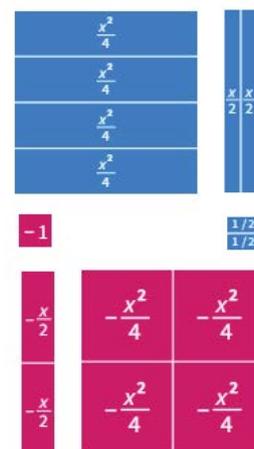
चित्र-2

अलबत्ता, सामान्य बीजगणितीय टाइलों से भिन्न संख्याओं को नहीं दर्शाया जा सकता। हालाँकि मैथिगॉन पॉलीपैड में टाइलों को आधा करके  $x/4$ ,  $x^2/2$ ,  $1/8$  आदि को दर्शाया जा सकता है। लेकिन टाइलों को केवल आधा (आड़े या खड़े में) किया जा सकता है। इसलिए  $x/3$ ,  $x^2/5$ ,  $6/1$  आदि को दर्शाना सम्भव नहीं है (चित्र-3)।

FLU और बीजगणितीय टाइलों के बीच एक और महत्वपूर्ण अन्तर यह है कि बीजगणितीय टाइलों में लेन-देन नहीं किया जा सकता। FLU के मामले में, यह एक जाना-माना तथ्य है कि 10 इकाइयाँ मिलकर एक लॉन्ग बनाती हैं और 10 लॉन्स मिलकर एक फ्लैट बनाते हैं। हालाँकि बीजगणितीय टाइलों के मामले में, चूँकि  $x$  एक अज्ञात राशि है या इसके कई मान हो सकते हैं और हम नहीं जानते कि कितने 1 मिलकर  $x$  के बराबर हैं। इसलिए टाइलों के बीच किसी तरह का लेन-देन नहीं हो सकता। यह ऐसा ही है जैसे कि किसी बहुपद के पदों को एक पद में नहीं बदला जा सकता। इस प्रकार, टाइलों का उपयोग इस अवधारणा को पुख्ता करता है कि बहुपदों, जैसे कि  $3x^2 - 2x - 5$  को और सरलीकृत नहीं किया जा सकता।

जब हम बीजगणितीय टाइलों का उपयोग करके बहुपदों को दर्शाते हैं, तो कुछ चीज़ें अपने-आप स्पष्ट हो जाती हैं :

- $x^2$  को ' $x$  का वर्ग' क्यों कहते हैं और यह ज्यामितीय वर्ग से कैसे सम्बन्धित है।

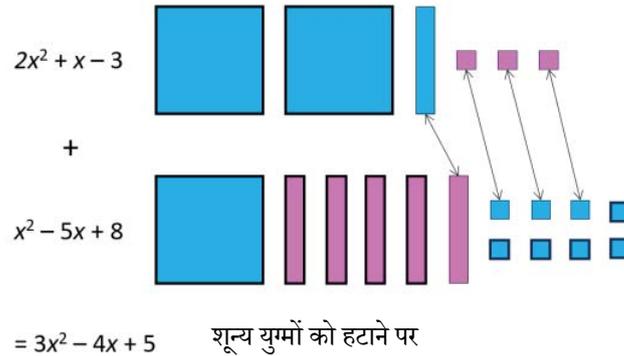


चित्र-3

- $x^2$  और  $2x$  के बीच का अन्तर। चूँकि  $x^2$  यानी कि  $x \times x$  को एक वर्गाकार टाइल से दर्शाया जाता है और  $2x$  यानी कि  $x + x$  को दो आयताकार टाइलों से।

- समान पदों की अवधारणा – एक ही माप की टाइलों को गिना जा सकता है, यहाँ तक कि शून्य-युग्मों (zero pairs) को हटाया भी जा सकता है, लेकिन अलग-अलग मापों की टाइलों को मिलाकर एक पद के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता।

चूँकि  $x$  और  $1$  के बीच का सम्बन्ध अज्ञात है, इसलिए बीजगणितीय टाइलों के ज़रिए दो बहुपदों की तुलना करने का कोई तरीका नहीं है। अलबत्ता, हम दो बहुपदों का जोड़ या घटाव कर सकते हैं, बशर्ते कि उन्हें टाइलों द्वारा दर्शाना सम्भव हो।



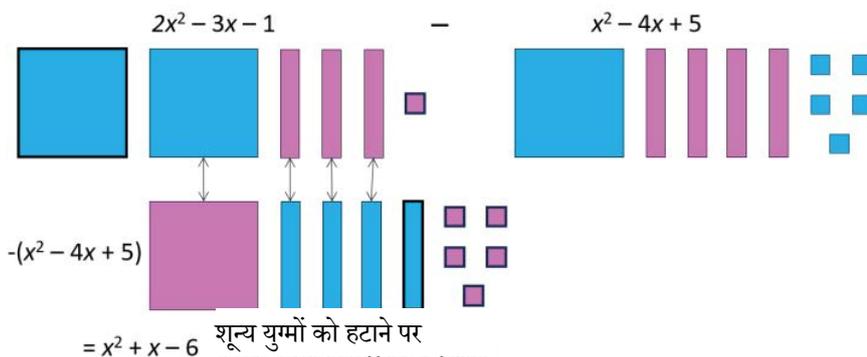
चित्र-4

बीजगणितीय टाइलों का उपयोग करके बहुपदों को जोड़ने के नियम वही हैं, जो FLU का इस्तेमाल करके पूर्ण संख्याओं को जोड़ने के हैं :

1. प्रत्येक बहुपद को टाइलों के माध्यम से दर्शाएँ।
2. समान माप वाली टाइलों को मिला दें और शून्य युग्मों को हटा दें।
3. शेष टाइलें योगफल को दर्शाती हैं।

इसी तरह घटाव यानी  $p(x) - q(x)$  के चरण हैं :

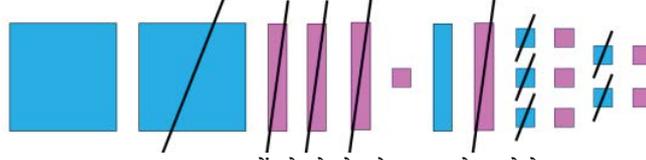
1. बहुपद  $p(x) - q(x)$  को टाइलों के माध्यम से दर्शाएँ।
2.  $-q(x)$  को दर्शाने के लिए  $q(x)$  की टाइलों को पलट दें।
3.  $p(x)$  और  $-q(x)$  को जोड़ें, यानी कि समान माप की टाइलों को मिला दें और शून्य युग्मों को हटा दें।
4. शेष टाइलें  $p(x) - q(x) = p(x) + [-q(x)]$  को दर्शाती हैं।



चित्र-5

$p(x) - q(x)$  को एक अन्य तरीके से भी किया जा सकता है, जो पूर्ण संख्याओं (whole number) के लिए इस्तेमाल किए गए तरीके जैसा ही है :

1. बहुपद  $p(x)$  को टाइलों के माध्यम से दर्शाएँ।
2. मान लें कि कोई बहुपद  $q(x)$  है।
3.  $p(x)$  में ज़रूरत के अनुसार शून्य-युग्म जोड़ें ताकि  $q(x)$  को घटाने (यानी कि  $x^2$ ,  $-4x$  और  $5$  को हटाने) के लिए पर्याप्त राशि हो।
4.  $q(x)$  को  $p(x)$  में से घटाएँ, यानी कि ऊपर बताए तरीके से टाइलों को हटाएँ। जो बचता है वह  $p(x) - q(x)$  को दर्शाता है।

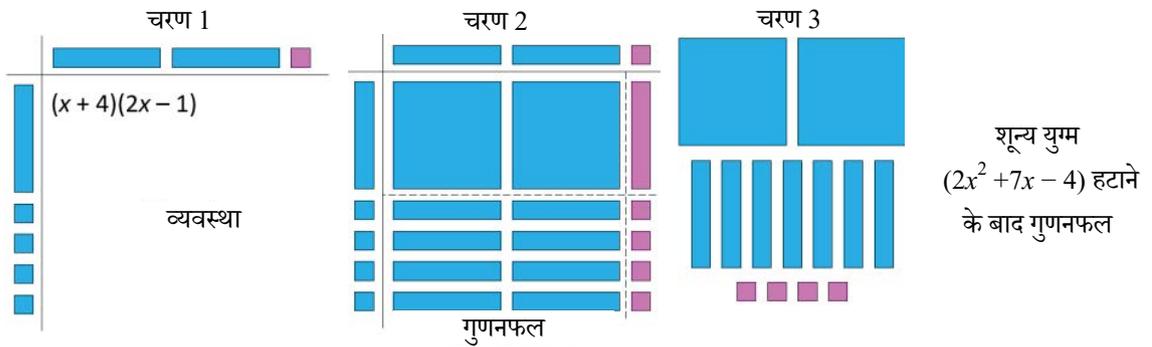


आवश्यक शून्य-युग्मों को जोड़ने और  $q(x)$  को हटाने के बाद  
 $(2x^2 - 3x - 1) - (x^2 - 4x + 5) = x^2 + x - 6$

चित्र-6

चित्र-4 दो बहुपदों के जोड़ को दर्शाता है और चित्र-5 व 6 दो बहुपदों के घटाव को दर्शाते हैं।

हालाँकि, यह काफी कठिन हो सकता है क्योंकि इसमें एक से अधिक प्रकार के शून्य-युग्मों ( $1$  और  $-1$ ,  $x$  और  $-x$ ,  $x^2$  और  $-x^2$ ) की ज़रूरत हो सकती है। इसके अलावा, जैसा कि हमने ऊपर बिन्दु ख में बताया था कि किसी पद को घटाना उसके योज्य प्रतिलोम को जोड़ने के बराबर होता है, तो प्रत्येक घटाव को एक प्रकार का जोड़ माना जा सकता है। इसलिए,  $q(x)$  को पलटना बहुपद के घटाव को समझने का आसान विकल्प है।

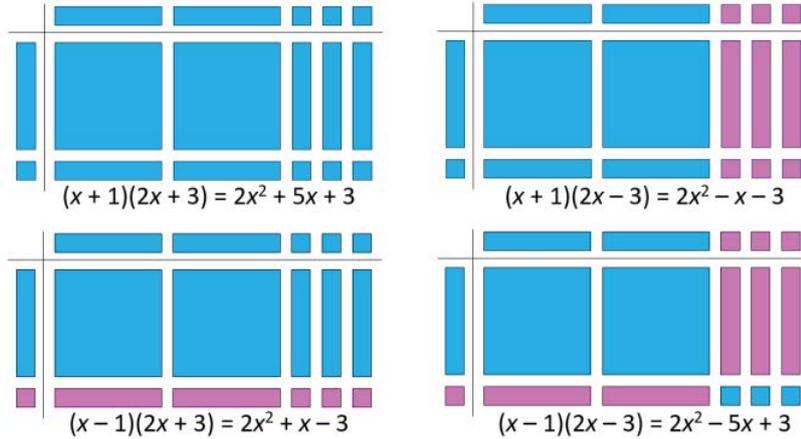


चित्र-7

गुणा व भाग के लिए बीजगणितीय टाइलों का उपयोग अधिकतम 2 की घात वाले बहुपदों के लिए ही किया जा सकता है। बीजगणितीय टाइलों का इस्तेमाल करके दो रैखिक बहुपदों (linear polynomials) का गुणन 2 अंकों वाली संख्या के गुणन के समान ही होता है। चित्र-7 के चरण 2 'गुणनफल' में बड़े और छोटे वर्गों और क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर आयतों वाले चार क्षेत्रों को देखें। गुणा करने के चरण इस प्रकार हैं :

1. गुणा किए जाने वाले बहुपदों में से एक को दर्शाने वाली बीजगणितीय टाइलों को बाएँ किनारे पर और दूसरे बहुपद को दर्शाने वाली टाइलों को ऊपरी किनारे पर जमाएँ।
2. प्रत्येक टाइल की प्रत्येक विमा (dimension) का किनारों के साथ मिलान करते हुए क्रमविन्यास (array) को भरें।
3. शून्य-युग्मों को हटा दें (गुणनफल में शून्य-युग्म कहाँ हो सकते हैं? चित्र-8 देखें)।

**चित्र-8** उच्चतम घात के पदों को धनात्मक रखते हुए चिह्नों (धनात्मक व ऋणात्मक) के संयोजनों को दर्शाता है। इसमें इस बात पर ध्यान केन्द्रित किया गया है कि चिह्न आपस में कैसे क्रिया करते हैं। उन स्थितियों पर ध्यान दें जिनमें शून्य-युग्म होते हैं। इन चारों स्थितियों के बीच की समानताओं और विभिन्नताओं पर गौर करें। मध्य पद के गुणनखण्डन (middle term factorization) के लिए यह समझना महत्वपूर्ण है। और हाँ, बीजगणितीय टाइलें इसे समझने में काफ़ी अच्छे से मदद से करती हैं!



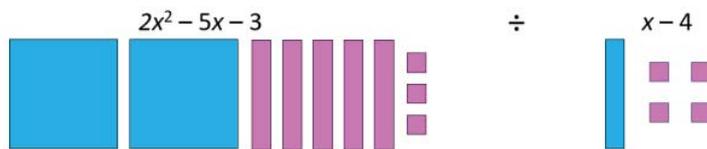
**चित्र-8**

बीजगणितीय टाइलों के माध्यम से 2 की घात वाले बहुपद में 1 की घात वाले बहुपद से भाग देना (चित्र-9) FLU की मदद से 3 अंकों वाली संख्या में 2 अंकों वाली संख्या से भाग देने से भी काफ़ी मिलता-जुलता है। (देखें सन्दर्भ [5])

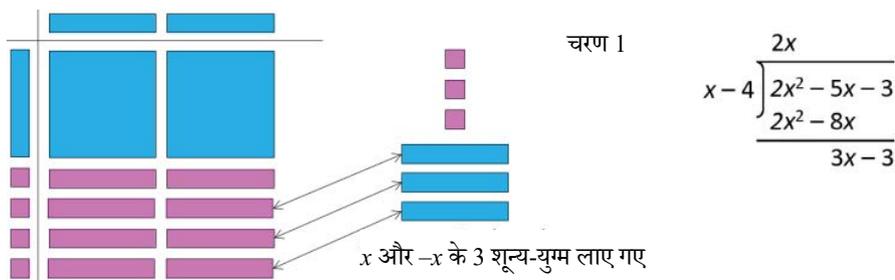
**चरण 1 :**  $x^2$  के लिए टाइलें रखें और आंशिक भागफल के रूप में  $2x$  प्राप्त करें।  $x$  और  $-x$  के तीन शून्य-युग्म लाएँ और इस चरण को पूरा करें। बचेगा  $3x - 3$  (चित्र-10)।

**चरण 2 :**  $x$  टाइलें रखें और बचे हुए आंशिक भागफल के रूप में 3 प्राप्त करें। 1 और  $-1$  के नौ शून्य-युग्म लाएँ और इस चरण को पूरा करें। यहाँ 9 शेषफल होगा और  $2x + 3$  भागफल (चित्र-11)।

ध्यान दें कि अन्त में भाज्य (dividend) दो भागों में है- क्रमविन्यास (array) और शेषफल, यानी कि

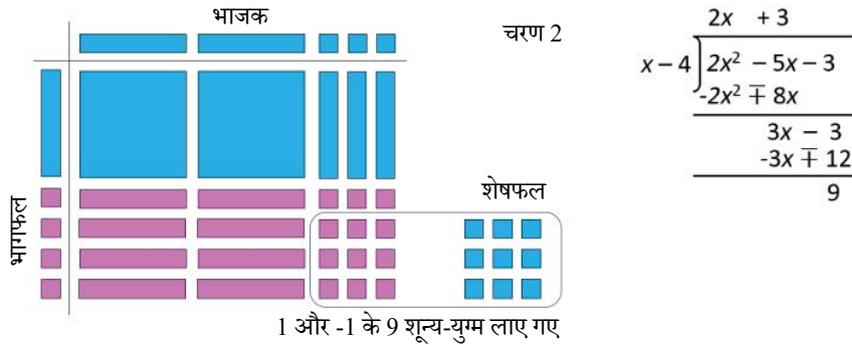


**चित्र-9**



**चित्र-10**

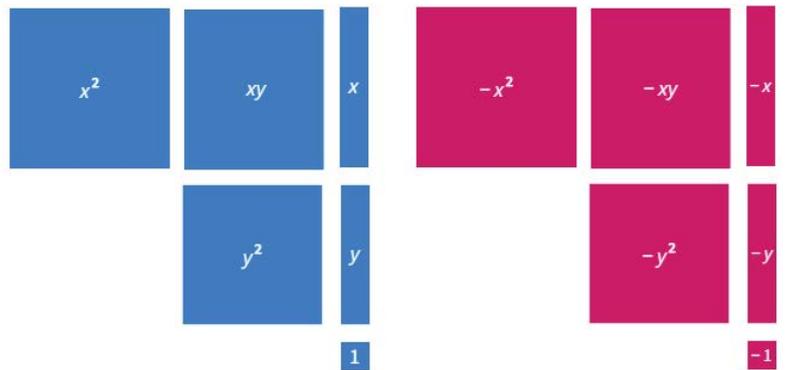
भाज्य = क्रमविन्यास + शेषफल = भाजक × भागफल + शेषफल, ठीक वैसे ही जैसे कि FLU में होता है (चित्र-11)



चित्र-11

इसके अलावा, बीजगणितीय टाइलों का इस्तेमाल सभी द्विघात सर्वसमिकाओं (quadratic identities) को दर्शाने के लिए किया जा सकता है :

- $(a + b)^2$  और सम्बन्धित
- $(a - b)^2$  और सम्बन्धित
- $(a + b)(a - b)$
- $(a + b)^2 + (a - b)^2$
- $(a + b)^2 - (a - b)^2$



चित्र-12

तो जहाँ तक बहुपदों की बात है, बीजगणितीय टाइलों इन्हें समझने में काफी मददगार हैं। हालाँकि भौतिक (या आभासी) टाइलों का माप निश्चित होता है। इसलिए यह समीकरणों को समझने के लिए अच्छी नहीं होती। बीजगणितीय टाइलों का उपयोग करके रैखिक व एक चर वाले द्विघातीय समीकरणों की पड़ताल करना सम्भव हो सकता है। पर इसकी गहराई से छान-बीन करना अभी बाक़ी है।

बीजगणितीय टाइलों के कुछ संस्करणों में एक और चर  $y$  व तीन और माप की टाइलों शामिल होती हैं, जैसे कि  $y^2$ ,  $xy$  और  $y$  (चित्र-12)। इनसे दो चर वाले बहुपदों को दर्शाया जा सकता है, लेकिन घात और गुणांक की सीमाएँ पहले ही की तरह बनी रहती हैं। अभी तक हम यह नहीं जाँच पाए हैं कि क्या ये विस्तारित बीजगणितीय टाइलों, विशेषकर  $x$  और  $1$  के साथ  $y$ , दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के युग्म (simultaneous linear equations) को समझने में मदद कर सकती हैं।

3 की घात वाले बहुपदों को घनाभों (cuboids) के माध्यम से दर्शाया जा सकता है। लेकिन यह काफी मुश्किल होगा और निश्चित रूप से इसके लिए घनाभों के दो सेट की आवश्यकता होगी— धनात्मक और ऋणात्मक—क्योंकि 3-विमाओं वाली चीज़ों में 'पलटने' का फ़ायदा नहीं मिल पाता। इसके अलावा, घनाभ शिक्षण-सम्बन्धी ऐसा कोई अतिरिक्त लाभ प्रदान नहीं करते, जो इस प्रयास को उचित ठहराए।

अन्तिम बात, यदि विद्यार्थी FLU से परिचित न हों तो भी बीजगणितीय टाइलों से उनका परिचय कराना बिलकुल ठीक है। ये टाइलों FLU का सामान्यीकरण हैं और FLU के इस्तेमाल के बाद बीजगणितीय टाइलों का उपयोग यह समझने में मदद कर सकता है कि पूर्ण संख्याएँ महज़ '10 के आधार वाले बहुपद' हैं, जिनके अंक गुणांक के रूप में होते हैं। लेकिन बीजगणितीय टाइलों के इस्तेमाल से पहले FLU से परिचित होना कोई ज़रूरी शर्त नहीं है। हालाँकि, बीजगणितीय टाइलों के साथ काम करने से पहले पूर्णाकों के लिए रंगीन काउंटर्स के इस्तेमाल से वाक़िफ़ होना आवश्यक है (देखें सन्दर्भ [6])।

## References

1. How to make algebra tiles: <https://bit.ly/4buTsky>
2. How to use algebra tiles: <https://bit.ly/3zrFVNu>
3. Explore algebra tiles virtually: <https://bit.ly/3W7x3Wn>
4. Algebraic identities with algebra tiles: <https://bit.ly/3RSzvt0>
5. FLU review: <https://bit.ly/3XO1RMX>
6. Integers: <https://bit.ly/4bneWQw>
7. Mathigon Polypad: <https://bit.ly/3XLzU8o>

**मैथ स्पेस** अजीम प्रेमजी विश्वविद्यालय की गणित प्रयोगशाला है, जो स्कूलों, शिक्षकों, अभिभावकों, बच्चों और स्कूली शिक्षा में कार्य करने वाले गैर-सरकारी संगठनों व शिक्षक प्रशिक्षकों को सेवाएँ प्रदान करती है। यह गणित की विभिन्न शिक्षण सहायक सामग्रियों की पड़ताल करती है और उनके उपयोग की सम्भावनाओं के साथ-साथ कबाड़ से उनके कम लागत के संस्करणों को बनाने की सम्भावनाओं को भी तलाशती है। यह गणित से डरने वालों या नफ़रत करने वालों के साथ-साथ गणित प्रेमियों को भी सम्बोधित करने की कोशिश करती है। यह एक ऐसी जगह है जहाँ नए विचार पैदा होते हैं और कई लोगों के साथ चर्चा के फलस्वरूप विकसित होते हैं। मैथ स्पेस से [mathspace@apu.edu.in](mailto:mathspace@apu.edu.in) पर सम्पर्क किया जा सकता है।

**अनुवाद :** कविता तिवारी **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** शहनाज़

### सवाल को उलटा कटके देखना!

अगर हम विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों – जैसे वर्ग, आयत, समचतुर्भुज, समान्तर चतुर्भुज, पतंग, समलम्ब चतुर्भुज, समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज, अवतल पतंग (dart) आदि पर विचार करें, तो हम आसानी-से बता सकते हैं कि इनमें से प्रत्येक प्रकार में किस तरह की सममिति होती है। उदाहरण के लिए, समचतुर्भुज और आयत, दोनों में रैखिक सममिति और क्रम 2 की घूर्णन सममिति होती है।

लेकिन यदि हम सवाल को उलट दें, तो क्या होगा :

1. अगर किसी चतुर्भुज में रैखिक सममिति है, तो वह किस प्रकार का चतुर्भुज है?
2. अगर किसी चतुर्भुज में घूर्णन सममिति है, तो वह किस प्रकार का चतुर्भुज है?

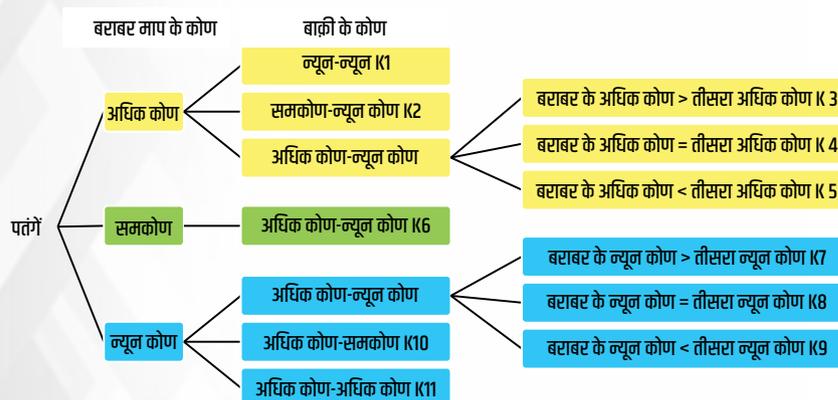
सवाल को उलटकर देखने से गणितीय पड़ताल की गुंजाइश पैदा होती है, जिससे विद्यार्थियों को अवलोकन, दस्तावेजीकरण और विश्लेषणात्मक क्षमताओं को विकसित करने के अवसर मिलते हैं। साथ ही इससे उनकी अवधारणात्मक समझ भी बेहतर होती है। हम पाठकों को आमंत्रित करते हैं कि वे अपने जवाब हमें [AtRightAngles.editor@apu.edu.in](mailto:AtRightAngles.editor@apu.edu.in) पर भेजें। हम इस बारे में अपने विचार नवम्बर, 2024 के अंक में प्रस्तुत करेंगे!

# पतंग परिवार : एक वंशवृक्ष की जाँच-पड़ताल!

पीछे दिए गए पोस्टर के मुताबिक पतंगों 11 प्रकार (समचतुर्भुज के अलावा) की होती हैं।

यह पोस्टर आपके विद्यार्थियों को पतंग के इन 11 प्रकारों से दोस्ती करने में मदद करेगा। विद्यार्थियों को इसका अध्ययन करने और K1, K2... K11 में से प्रत्येक पतंग के गुणों को खोजने के लिए समय दें। कुछ महत्वपूर्ण बिन्दु नीचे दिए गए हैं। चर्चा के दौरान विद्यार्थी निश्चित रूप से इन या अन्य बिन्दुओं के बारे में बताएँगे, अगर वे नहीं बताते हैं, तो अपने विवेक के अनुसार इन्हें साझा करें।

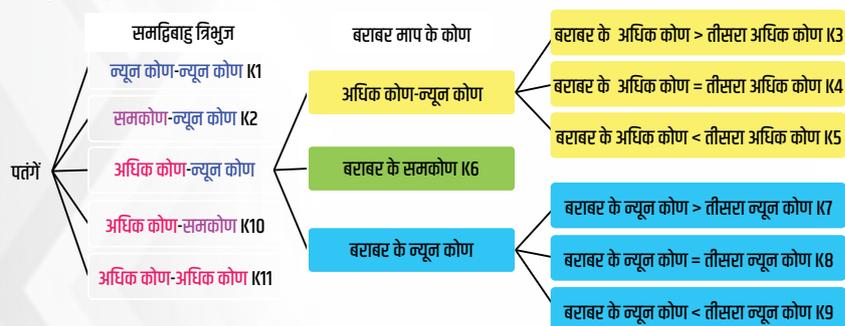
## क. सममिति रेखा के दोनों ओर



समचतुर्भुज के लिए दो सम्भावनाएँ :

- अधिक कोण-न्यून कोण, अर्थात एक गैर-वर्गाकार समचतुर्भुज
- समकोण, अर्थात वर्गाकार

## ख. दो समद्विबाहु त्रिभुजों के योग के रूप में



समचतुर्भुज : विकर्ण के चयन के आधार पर अधिक कोण-अधिक कोण या न्यून कोण-न्यून कोण।

वर्ग : समकोण-समकोण।

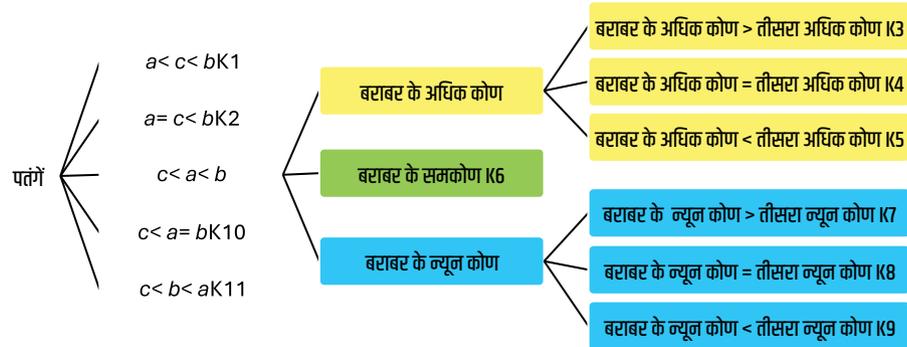
की-वर्ड : समचतुर्भुज, पतंग, गुण, कोण, वर्गीकरण, जाँच-पड़ताल

### ग. कोण के आधार पर

यह वर्गीकरण हूबहू 'क' जैसा ही होता है।

K6 एक मात्र चक्रीय पतंग है जिसके चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित हैं।

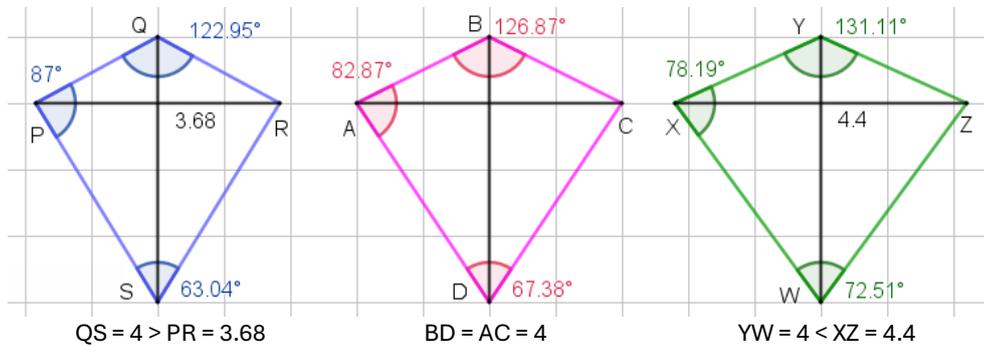
### घ. विकर्ण के आधार पर



K1, K2... K6 के मामले में पतंग को दो भागों में विभाजित करने वाला विकर्ण लम्बा है।

K8 (यदि वर्गाकार न हो), K9 ... K11 में विकर्ण छोटा है।

K7 बराबर के न्यून कोण > तृतीय न्यून कोण के साथ, ABCD, PQRS, XYZW चतुर्भुज हैं।



चित्र-1

प्रमाण (Proof) :

AB = BC और AD = DC वाली पतंग ABCD पर विचार जिसमें विकर्ण AC = BD, बिन्दु O पर काटते हों।

$\angle BCD < 90^\circ$  दर्शाने के लिए BD व्यास वाला वृत्त बनाइए।

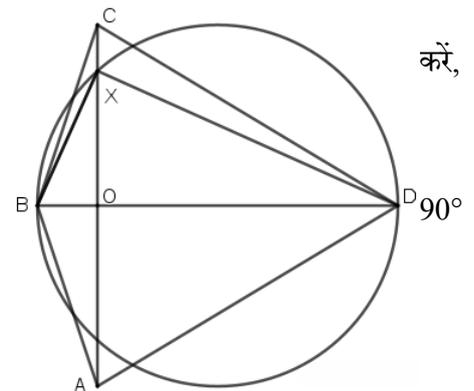
मान लीजिए यह वृत्त, रेखा OC को बिन्दु X पर काटता है।  $\angle BXD =$  क्योंकि यह अर्धवृत्त में बनने वाला एक कोण है।

$\angle BCO + \angle XBC = \angle BXO$  (दो विपरीत आन्तरिक कोणों का योग बाह्य कोण के बराबर होता है)

$$\Rightarrow \angle BCO < \angle BXO$$

इसी प्रकार,  $\angle DCO < \angle DXO$

$$\therefore \angle BCD = \angle BCO + \angle DCO < \angle BXO + \angle DXO = \angle BXD = 90^\circ$$



चित्र-2

करें,

## लेख आमंत्रित हैं...

**एट राइट एंगल्स** भारत की सार्वजनिक शिक्षा प्रणाली में गणितीय शिक्षा को समर्पित एक गुणवत्तापूर्ण संसाधन है। इसे विशेषकर बुनियादी, प्राथमिक और माध्यमिक पाठशालाओं के शिक्षक और शिक्षकों के प्रशिक्षकों के लिए तैयार किया गया है।

हम गणित के शिक्षकों, शिक्षाविदों, अभ्यासकर्ताओं (प्रेक्टिसनर्स), अभिभावकों और विद्यार्थियों से लेख आमंत्रित करते हैं। यदि आप एक ऐसा मंच तलाश रहे हैं जो खासतौर से लगभग 6-14 साल के विद्यार्थियों के गणित के सीखने के अनुभव को समृद्ध करता हो और बढ़ाता हो, तो यह पत्रिका आपके लिए है। आपके लेखों का स्वागत है।

### विषय एवं थीम के लिए सुझाव

भेजे जाने वाले लेख कक्षा-1 से 8 की पाठ्यक्रम सामग्री पर केन्द्रित होना चाहिए। लेखों से अपेक्षा है कि वे :

- स्कूली शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा, 2023 (NCF-SE-2023) में उल्लेखित विषय और थीम को विस्तारपूर्वक समझा सकें और दर्शा सकें।
- खासकर NCF-SE-2023 में चर्चित चुनौतियों को सम्बोधित करते हों।
- गणितीय इतिहास या गणितीय सोच के इतिहास का प्रमाणित विवरण हों।
- विद्यार्थियों को प्रशिक्षण और अभ्यास में तल्लीन रखने के लिए नवाचारी वर्कशीट या तरीकों को शामिल कर सकें।
- बच्चों के सन्दर्भ में प्रासंगिक, गणित के रोजमर्रा जीवन में उपयोग का वर्णन कर सकें।
- अन्तःविषय गतिविधियों और परियोजनाओं (प्रोजेक्ट) का वर्णन कर सकें।
- पाठ्यक्रम से जुड़ी पहेलियों और खेलों की समीक्षा कर सकें।
- ऑनलाइन रिसोर्स सहित प्रासंगिक सामग्री के चयन पर मार्गदर्शन कर सकें।

- बुनियादी संख्या ज्ञान के साथ-साथ गणनात्मक सोच के लिए शैक्षणिक रणनीतियाँ विकसित कर सकें।
- विभिन्न शैक्षणिक पद्धतियों को लागू करने में शिक्षकों की सहायता कर सकें।
- टीचर्स लर्निंग मैटेरियल (टीएलएम) की समीक्षा कर सकें या गणित की कक्षा में स्थानीय सन्दर्भ और स्थानीय टीएलएम का उपयोग कैसे करें इसके बारे में बता सकें।
- विद्यार्थियों में अवधारणात्मक समझ की खाई को पाटने में सहायता करने के लिए सामग्री प्रदान कर सकें।
- आकलन में आने वाली परेशानियों का समाधान कर सकें।
- गणित सीखने के दौरान होने वाली गलतफ़हमियों को पहचानने और समझने के लिए उपाय सुझा सकें।
- समस्याओं की सूची, उनके हल पर चर्चा एवं समस्या-समाधान की रणनीतियों सहित दे सकें, जो कि सामान्यतौर पर पाठ्यपुस्तकों में नहीं मिलती।

बड़े लेखों के अलावा हम छोटे लेखों का भी स्वागत करते हैं जिनमें विविध तरह की रोचक सामग्री शामिल हो। जैसे किसी किताब या गणित के सॉफ्टवेयर की समीक्षा या गणितीय थीम पर आधारित यूट्यूब की कोई क्लिप। प्रूफ विदाउट वर्ड्स (proofs without words), गणितीय अन्तर्विरोध (mathematical paradoxes), असिद्धीकरण (false proofs) पर आधारित लेख हो सकते हैं। गणितीय विषयों पर आधारित कविता, कार्टून या तस्वीरों (photographs) जैसी रचनात्मक अभिव्यक्तियों को शामिल करते लेख हो सकते हैं। आप किसी गणितज्ञ से जुड़े क्लिप्स या 'हस्तशिल्प में गणित, फ़िल्मों में गणित' जैसे रोचक विषयों पर भी लेख भेज सकते हैं।

लेख [AtRightAngles.editor@apu.edu.in](mailto:AtRightAngles.editor@apu.edu.in) पर भेजें।

कृपया आगे दी गई सम्पादकीय नीतियों और दिशा-निर्देशों को भी देखें।

## लेखों को स्वीकार करने की नीति

**एट राइट एंगल्स** प्रारम्भिक गणित और गणितीय शिक्षा से सम्बन्धित मुद्दों पर पूर्णतः केन्द्रित पत्रिका है। इसलिए लेखों का प्रयास होना चाहिए कि वे गणित के आम मिथकों, धारणाओं और भ्रान्तियों से परे हों।

पत्रिका में कहीं और से नक़ल या चोरी करके भेजे गए लेखों के लिए बिल्कुल भी जगह नहीं है। लेखक द्वारा लेख को प्रकाशन के लिए भेजे जाने पर माना जाता है कि यह मौलिक है और प्रकाशन के लिए इस पर किसी भी तरह का कानूनी प्रतिबन्ध नहीं है (जैसे किसी अन्य का कॉपीराइट स्वामित्व)। लेख में जहाँ भी उपयुक्त हो वहाँ प्रासंगिक सन्दर्भ और स्रोतों का उल्लेख किया जाए।

**एट राइट एंगल्स** पत्रिका अन्य भारतीय भाषाओं में भी अनूदित होती है। इसलिए, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय को पत्रिका में प्रकाशित सभी लेखों का अन्य भाषाओं में अनुवाद और प्रसार करने का अधिकार होगा।

यदि भेजा गया लेख पहले कहीं प्रकाशित हो चुका है, तो लेखक से अनुरोध है कि वे पूर्ववर्ती प्रकाशक से अन्यत्र पुनर्प्रकाशन के लिए अनुमति अवश्य प्राप्त कर लें। और लेख के अन्त में 'लेखक का नोट' के तहत इसका उल्लेख करें। इसके अलावा, यह अपेक्षा भी की जाती है कि लेखक हमारे रिकॉर्ड के लिए अनुमति पत्र की एक कॉपी लेख के साथ भेजें। इसी तरह, यदि लेखक **एट राइट एंगल्स** में प्रकाशित अपना लेख पुनः प्रकाशन के लिए कहीं और भेज रहे हैं तो उनसे अपेक्षा है कि वे **एट राइट एंगल्स** को यथोचित श्रेय अवश्य दें।

**एट राइट एंगल्स** में विविध तरह के लेखों का स्वागत है। ऐसे लेख जो गुणवत्ता की दृष्टि से अच्छे हैं लेकिन इस पत्रिका में प्रकाशन के लिए उपयुक्त नहीं हैं, उनका उपयोग लेखक की सहमति से विश्वविद्यालय की अन्य पत्रिकाओं में किया जा सकता है।

# लेखकों के लिए विशेष दिशा-निर्देश

अगर आप *एट राइट एंगल्स* के लिए लिख रहे हैं तो कृपया इन दिशा-निर्देशों पर ध्यान दें :

- 1. रोचक परिचय :** शुरुआत से ही पाठक का ध्यान आकर्षित करने के उद्देश्य से पठनीय और रोचक शैली में लिखें। लेख के पहले पैराग्राफ से ही स्पष्ट हो जाना चाहिए कि लेख किस विषय के बारे में है। उदाहरण के तौर पर, शुरुआती पैराग्राफ एक अप्रत्याशित निष्कर्ष हो सकता है, एक चुनौती हो सकती है, एक मजेदार सवाल के साथ चित्र हो सकता है या एक प्रासंगिक किस्सा हो सकता है। खासतौर से ये आगे पढ़ते जाने की रुचि पैदा करने वाला होना चाहिए।
- 2. लुभावना शीर्षक :** लेख का शीर्षक एक उपयुक्त और लुभावने वाक्यांश से दिया जाए, जिसमें लेख की भावना और सत्व झलके।
- 3. शैली :** प्रमाण-सिद्ध प्रारूप (Theorem-Proof Format) में लेख लिखने से परहेज करें। इसकी बजाय, अनौपचारिक तरीके से प्रमाणों (Proofs) को लेख में एकीकृत करें।
- 4. सन्तुलन :** लम्बी-लम्बी गणनाओं को दर्शाने से बचें। बहुत अधिक विवरण देने और छिपी हुई (अ-उल्लेखित) गणनाओं पर निर्भर चरण को छोड़कर अगले चरण पर चले जाने, के बीच सन्तुलन बनाकर रखें।
- 5. सुलभ भाषा :** उन विशिष्ट शब्दावली और संकेत शब्दों के उपयोग को टालें जिनसे सिर्फ विशेषज्ञ ही परिचित होते हैं। यदि तकनीकी शब्दों का उपयोग ज़रूरी हो तो उन्हें परिभाषित कर दें।
- 6. दृश्यों का प्रयोग :** जहाँ सम्भव हो वहाँ ऐसे रेखाचित्र या फ़ोटो दें जिनमें गणितीय विचार का सार हो। यदि कोई चित्र या रेखाचित्र गणित की किसी अवधारणा को स्पष्ट करते हों तो उन्हें अवश्य रखें।
- 7. संक्षिप्त सन्दर्भ :** संक्षिप्त अनुशंसाओं के साथ सन्दर्भों (reference) की एक संक्षिप्त सूची दें।
- 8. अभ्यास और सवाल :** लेख की शुरुआत या अन्त में विचार करने के लिए कुछ सवाल और कुछ अभ्यास उपलब्ध कराएँ।
- 9. उद्धरण प्रारूप (Citation Format) :** लेख के अन्त में, स्रोतों और सन्दर्भों को जिस क्रम में वे आएँ हैं उस ही क्रम में उन्हें उद्धृत (cite) करें। फुटनोट से बचें। यदि फुटनोट की आवश्यकता है, तो उनका क्रम डालकर अलग से लिखें।
- 10. संक्षिप्ताक्षर और परिवर्णी शब्द (Abbreviations and Acronyms) :** लेख में जब पहली बार किसी शब्द का लघु रूप (यानी संक्षिप्ताक्षर) और कई शब्दों के शुरुआती अक्षर का प्रचलित लघु रूप (यानी परिवर्णी) आए तब वहीं उनका अर्थ बता दें। ऐसे सभी शब्दों की एक शब्दावली बनाकर उसे लेख के अन्त में प्रस्तुत करें।
- 11. चित्रों को नामांकित करना :** लेख में आने वाले सभी चित्रों, रेखाचित्रों, तस्वीरों पर चित्र क्रमांक डालें और उनका विवरण लिखें। इन सभी चित्रों, रेखाचित्रों, तस्वीरों को स्पष्ट निर्देशों के साथ ईमेल में अलग से अटैच करें। (ध्यान दें कि खीची गई तस्वीरों या स्कैन तस्वीरों की गुणवत्ता 300dpi से कम नहीं होना चाहिए।)
- 12. चित्रों का विवरण स्पष्टता से दें :** तस्वीरों, चित्रों, डायग्राम्स और तालिकाओं का उल्लेख उनके उचित क्रमांक से करें। 'यहाँ', 'वहाँ', 'दाईं ओर', 'बाईं ओर', 'ऊपर', 'नीचे' इस तरह से उल्लेख करने से परहेज करें।
- 13. लेखक का परिचय :** लेखक अपनी हाई रिज्योल्यूशन फ़ोटो भी भेजें। साथ ही, अपने बारे में संक्षिप्त में (जो 50 शब्दों से ज्यादा का नहीं हो) जानकारी भेजें, जो पाठकों को आपके अनुभव व विशेष योग्यता वाले कार्यक्षेत्र के बारे में बताती हो।
- 14. ब्रिटिश वर्तनी (Spellings) :** ब्रिटिश वर्तनी का पालन करें। जैसे organise लिखें न कि organize; colour लिखें न कि color, neighbour लिखें न कि neighbor आदि।
- 15. आप अपने लेख हिन्दी में भी भेज सकते हैं।** उपयुक्त होने पर हम उन्हें अंग्रेज़ी में अनूदित करके प्रकाशित करेंगे।
- 16. लेख भेजने का प्रारूप :** लेखों को MS Word या LaTeX में लिखकर ही भेजें।

मुद्रक तथा प्रकाशक शरद सुरे, रजिस्टार द्वारा अजीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के लिए आदर्श प्रा.लि., 4 शिखरवार्ता, प्रेस काम्पलेक्स, जोन-1,

एम.पी.नगर, भोपाल 462 011 से मुद्रित

एवं अजीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, सर्वे नम्बर 66, बुरुंगटे विलेज, बिक्कनाहल्ली मेन रोड, सरजापुरा, बेंगलूरु, कर्नाटक- 562 125 से प्रकाशित

सम्पादक : स्नेहा टाइटस

# दूषित नमूनों को पहचानना : बाइनरी अंकगणित पर आधारित एक कम्प्यूटेशनल चिन्तन गतिविधि

कुमार गन्धर्व मिश्र

प्रस्तावना

**क**ल्पना करें कि आप एक लैब तकनीशियन हैं और महामारी फैली हुई है। समस्या गम्भीर है और आपके पास संसाधन भी कम हैं। आपको यह पता लगाना है कि 15 नमूनों में से कौन-सा नमूना वायरस (विषाणु) से दूषित है। इसमें पेंच क्या है? आपके पास केवल चार परखनली (टेस्ट ट्यूब) हैं और आपको केवल इन चार परखनलियों का ही उपयोग करके किफ़ायती तरीके से 'दूषित' नमूने का पता लगाना है। क्या आप यह कर सकते हैं?

यह लेख एक परिकल्पित सिमुलेशन गतिविधि पर आधारित है, जहाँ आपको कुछ दी गई बोतलों में से दूषित बोतल (नमूना) का पता लगाना है। यह स्थिति दिलचस्प है क्योंकि कुल नमूनों की संख्या दूषित नमूनों का पता लगाने के लिए उपलब्ध परखनलियों की संख्या से अधिक है। यह सिमुलेशन, स्प्रेडशीट का उपयोग करके या कागज़-कलम की मदद से किया जा सकता है। इस प्रकार का सिमुलेशन बाइनरी अंकगणित सीखने और दूषित नमूनों को पहचानने से सम्बन्धित विभिन्न स्थितियों का अन्वेषण करने का अवसर प्रदान करता है।

**कक्षा में कम्प्यूटेशनल चिन्तन**

'राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020' और 'स्कूली शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा 2023', कक्षा में कम्प्यूटेशनल चिन्तन कौशल पर ज़ोर देती है। इसे दैनिक जीवन में 21वीं सदी के प्रमुख कौशलों में से एक बताया गया है। सरल शब्दों में (देखें [2]), कम्प्यूटेशनल चिन्तन में, किसी समस्या को बताना; इस समस्या को हल करने के लिए आवश्यक महत्त्वपूर्ण जानकारीयों को पहचानना;

की-वर्ड: बाइनरी अंकगणित, कम्प्यूटेशनल चिन्तन, तार्किक चिन्तन, नमूना छँटाई

समस्या को छोटे और तार्किक चरणों में तोड़ना; इन चरणों का उपयोग करके एक ऐसी प्रक्रिया बनाना जो समस्या को हल करे; और इस प्रक्रिया का मूल्यांकन करना शामिल है। कम्प्यूटेशनल चिन्तन, समस्या को हल करने के लिए कलन-विधि आधारित चिन्तन, अमूर्तन, छोटे-छोटे हिस्सों में तोड़ना, पैटर्न पहचान एवं सामान्यीकरण, मूल्यांकन और तर्क का उपयोग करता है।

कम्प्यूटेशनल चिन्तन एक कम्प्यूटर वैज्ञानिक के चिन्तन जैसा ही है। और जब कम्प्यूटर का जिक्र आता है, तो बाइनरी संख्या कैसे पीछे रह सकती हैं? कम्प्यूटर बाइनरी अंकों (बिट्स) के रूप में जानकारी संग्रहित करते हैं। बाइनरी निरूपण को समझने से हमें कम्प्यूटर के क्रियान्वयन को समझने में मदद मिल सकती है, क्योंकि बुनियादी स्तर पर कम्प्यूटर बाइनरी अंकों को चालू और बन्द करने के लिए एक मशीन की तरह है। कम्प्यूटेशनल चिन्तन के परिचय के रूप में बाइनरी संख्याओं को पढ़ाना विद्यार्थियों को कलन-विधि और किसी समस्या को छोटे-छोटे हिस्सों में तोड़ने से रूबरू कराता है। इस प्रक्रिया के दौरान वे बाइनरी संख्याओं की गणना करने और बाइनरी व दशमलव संख्याओं के बीच रूपान्तरण की समस्याओं को चरण-दर-चरण छोटे-छोटे हिस्सों में तोड़ना सीखते हैं। यह अमूर्तन या कल्पना करने की क्षमता भी लाता है, क्योंकि इससे विद्यार्थी सीखते हैं कि मात्र दो अलग-अलग संकेतों (0 और 1) से किसी भी तरह की और सभी सूचनाओं को दर्शाया जा सकता है (देखें [2])।

इन बिन्दुओं को ध्यान में रखते हुए, यह लेख एक ऐसी गतिविधि की चर्चा कर रहा है जिसमें नमूनों के एक बड़े समूह में से दो प्रकार के नमूने – पॉजिटिव (positive) और नेगेटिव (negative) – को अलग-अलग करना है। इस गतिविधि के दौरान, शिक्षार्थी विभिन्न नमूनों को दर्शाने के लिए बाइनरी संख्याओं का उपयोग करके और समस्या को छोटे चरणों में तोड़कर कम्प्यूटेशनल चिन्तन करते हैं। वे परखनली में उभरे रंग पैटर्न के आधार पर प्रत्येक नमूने की वस्तु-स्थिति पहचानने के लिए तार्किक सोच का इस्तेमाल करते हैं। इस गतिविधि में एक्सेल (Excel) की स्प्रेडशीट के उपयोग के माध्यम से कम्प्यूटर पर काम करना भी शामिल है।

### गतिविधि के बारे में

सरलता के लिए, मान लें कि हमारे पास एक रासायनिक संकेतक है जो नमूने का रंग बदलकर विषाणु से सन्दूषित होने या न होने का संकेत देता है। यदि नमूना लाल हो जाता है, तो यह दर्शाता है कि नमूना दूषित या विषाणु-युक्त है और हम इस परिणाम को 'पॉजिटिव' कहते हैं। इसके विपरीत, यदि नमूना हरा हो जाता है तो यह दर्शाता है कि नमूना दूषित नहीं है, जिसे हम 'नेगेटिव' कहते हैं (ध्यान दें कि इस सन्दर्भ में, 'नेगेटिव' का अर्थ है कि नमूना सुरक्षित है और दूषित नहीं है)।

हम जानते हैं कि परखनलियों की संख्या, नमूनों की संख्या से कम है। इसलिए हमारा लक्ष्य नेगेटिव नमूनों को कुशलतापूर्वक छाँटना है। इससे पहले चरण में ही परीक्षण करने का बोझ काफी कम हो जाता है। चूँकि सभी 15 नमूनों का एक साथ परीक्षण करने के लिए चार परखनली काफी नहीं हैं, इसलिए इन नमूनों को इन चार परखनलियों में मिलाना ही पड़ेगा। चूँकि हमारे पास 15 नमूने और 4 परखनली हैं, इस स्थिति में हम बाइनरी अंकगणित का लाभ उठा सकते हैं। हम इन नमूनों को इस तरह से कोड (चिह्नित) कर सकते हैं जिससे हमें उन नमूनों की पहचान करने में मदद मिलती है जो सम्भवतः दूषित हों। नीचे दी गई तालिका-1 में, 15 तक की दाशमिक संख्याओं के बाइनरी समकक्ष दर्शाए गए हैं। बाइनरी कोडिंग प्रणाली का उपयोग करके नमूनों को इस प्रकार दर्शाया जा सकता है :

नमूना	बाइनरी निरूपण	नमूना	बाइनरी निरूपण
$1 = 2^0$	0001	$9 = 2^3 + 2^0$	1001
$2 = 2^1$	0010	$10 = 2^3 + 2^1$	1010
$3 = 2^1 + 2^0$	0011	$11 = 2^3 + 2^1 + 2^0$	1011
$4 = 2^2$	0100	$12 = 2^3 + 2^2$	1100
$5 = 2^2 + 2^0$	0101	$13 = 2^3 + 2^2 + 2^0$	1101
$6 = 2^2 + 2^1$	0110	$14 = 2^3 + 2^2 + 2^1$	1110
$7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$	0111	$15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$	1111
$8 = 2^3$	1000		

तालिका-1 : दाएँ से बाएँ पढ़ने पर, जहाँ 2 पर कोई घात नहीं है वहाँ 0 लिखा जाता है व जहाँ 2 पर घात है वहाँ 1 लिखा जाता है।

प्रत्येक बाइनरी कोड अपने 4 अंकों के अनुसार इन चार परखनलियों में नमूना डालने का एक अनूठा तरीका भी दर्शाता है। मान लें कि '1' परखनली में नमूना डालने को दर्शाता है और '0' परखनली छोड़ने को दर्शाता है। माना कि चारों परखनली T1, T2, T3 और T4 के रूप में निरूपित की गई हैं। अब उदाहरण के लिए, नमूना संख्या 5 लें, जिसका बाइनरी कोड 0101 है। इस नमूने को परखनली T2 और T4 में डाला जा सकता है (क्योंकि 5 के बाइनरी कोड में '1', दूसरे और चौथे स्थान पर आता है), जबकि नमूना संख्या 6 (0110) को T2 और T3 में डाला जा सकता है और ऐसे ही अन्य को भी। प्रत्येक नमूने को कम-से-कम एक परखनली और अधिक-से-अधिक 4 परखनलियों में डाला जा सकता है। उदाहरण के लिए, नमूना संख्या 1 को केवल एक परखनली में डाला जाएगा और नमूना संख्या 15 को चारों परखनलियों में डाला जाएगा। यदि किसी परखनली का नमूना हरे रंग का हो जाता है, तो इसका मतलब है कि इस परखनली में डाले गए सारे नमूने नेगेटिव हैं। दूसरी ओर, यदि कोई परखनली लाल हो जाती है तो इसका मतलब है इसमें डाले गए नमूनों में से सारे नहीं, पर कम-से-कम एक नमूना पॉजिटिव है। तो एक प्रकार से, हरा रंग हमें उन सभी नमूनों को छाँटने में मदद करता है जो उस परखनली में डाले गए थे।



चित्र-1 : चारों परखनली के परिणाम

### एक उदाहरण

आइए एक ऐसा मामला लें जहाँ दो परखनली में कम-से-कम एक पॉजिटिव नमूना होने का संकेत मिलता है।

परीक्षण में परखनली T1 और T3 हरे रंग की हो जाती हैं, जबकि T2 और T4 लाल हो जाती हैं। ये परिणाम पक्के तौर पर T1 और T3 दोनों परखनली में रखे गए सभी नमूनों को नेगेटिव होने की पहचान करते हैं, बशर्ते कि इन नमूनों की बाइनरी संख्या में '1' का स्थान हरे रंग की परखनली के अनुरूप हो। **तालिका-1** को देखते हुए हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि :

- T1 हरा है : मतलब, T1 में रखे गए वे सभी नमूने जिनके बाइनरी निरूपण में पहले स्थान पर '1' आता है नेगेटिव हैं, विशेष रूप से नमूना क्रमांक 8 से लेकर 15 तक।
- T3 हरा है : इसी प्रकार, T3 में रखे गए वे सभी नमूने जिनके बाइनरी निरूपण में तीसरे स्थान पर '1' आता है, नेगेटिव हैं – यानी नमूना क्रमांक 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14 और 15।

दूसरी ओर, T2 और T4 में रखे गए नमूनों के पॉजिटिव होने की आशंका है। हालाँकि, इसका मतलब यह नहीं है कि इन परखनलियों में डाला गया प्रत्येक नमूना पॉजिटिव है। या तो T2 में डाले गए सभी नमूने (4, 5, 6, 7, 12, 13, 14 और 15) पॉजिटिव हो सकते हैं या कम-से-कम एक निश्चित रूप से पॉजिटिव होगा। यही बात T4 (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15) पर भी लागू होती है। हरे रंग की परखनली से प्राप्त निष्कर्षों से तुलना करते हुए, हम नेगेटिव नमूनों (2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15) को अलग कर लेते हैं। इस तरह हम अगले चरण में प्रावधिक पॉजिटिव नमूनों (यानी वे नमूने जिन्हें तब तक पॉजिटिव माना जाता है जब तक कि वे नेगेटिव साबित न हो जाएँ) 1, 4, 5 के परीक्षण करने का कार्य काफ़ी हद तक घटा लेते हैं।

### ध्यान देने योग्य कुछ बिन्दु

परखनली के रंग संयोजन को इसके समान दिखने वाले बाइनरी कोड और सम्बन्धित दशमिक संख्या से जोड़कर नहीं देखना चाहिए। उदाहरण के लिए, **चित्र-1** में पॉजिटिव परिणाम के लिए परखनली का पैटर्न 0101 के रूप में दिखाई देता है, जो नमूना संख्या 5 के कोड से मेल खाता है, लेकिन नमूना क्रमांक 5 नेगेटिव हो सकता है। T2 और T4 न केवल नमूना क्रमांक 5 के कारण पॉजिटिव परिणाम दिखा सकते हैं, बल्कि इन परखनलियों में डाले गए अन्य नमूनों के कारण भी पॉजिटिव परिणाम दिखा सकते हैं। उदाहरण के लिए, T2 में एक पॉजिटिव नमूना और T4 में एक पॉजिटिव नमूना परखनली के सभी नमूनों को पॉजिटिव बना सकता है, जबकि नमूना क्रमांक 5 नेगेटिव भी हो सकता है।

**तार्किक रूप से सोचें और कारण बताएँ!**

मान लीजिए कि परीक्षण के परिणाम इस प्रकार आते हैं – T4 परखनली हरी है और T1, T2 और T3 लाल हैं। अब आपका निष्कर्ष क्या होगा?

**गतिविधि का संचालन कक्षा में**

शिक्षक उपरोक्त बाइनरी-आधारित तर्क को कक्षा में कराई जाने वाली एक गतिविधि की एक शृंखला के रूप में बना सकते हैं।

1. कक्षा में शिक्षक इस समस्या को प्रस्तुत करते हैं और एक उदाहरण के ज़रिए इस समस्या का समाधान दर्शा सकते हैं।
2. विद्यार्थियों से नमूना संख्याओं के बाइनरी निरूपण को दर्शाने वाली निम्न तालिका भरने के लिए कहा जा सकता है और यह भी भरने को कहा जा सकता है कि इन 15 नमूनों में से कौन-सा नमूना इन चारों परखनलियों में डाला जा सकता है। (यहाँ नमूना संख्या 6 के लिए उदाहरण पेश किया गया है।)

नमूना	बाइनरी निरूपण	परखनली			
		T1	T2	T3	T4
1	0001				
2	0010				
3	0011				
4	0100				
5	0101				
6	0110	×	✓	✓	×
7	0111				
8	1000				
9	1001				
10	1010				
11	1011				
12	1100				
13	1101				
14	1110				
15	1111				

तालिका-2

3. विद्यार्थियों से पूछा जा सकता है कि परीक्षण परिणामों के कितने संयोजन सम्भव हैं।
4. विद्यार्थियों के जोड़े में समूह बनाए जा सकते हैं। फिर उन्हें (लॉटरी द्वारा) कुछ विशेष परीक्षण परिणाम, जो रंगीन पट्टियों (दो अलग-अलग रंग जैसे, लाल और हरा) के रूप में होते हैं दिए जाएँ। उन्हें निर्देश दिया जा सकता है कि वे परखनली के रंग संयोजनों के आधार पर नेगेटिव नमूनों को छाँटने का प्रयास करें।
5. शिक्षक एक नमूने के लिए समस्या समाधान बता सकते हैं। यदि दी गई रंग की पट्टी में T1 और T3 लाल रंग में हैं और T2 और T4 हरे रंग में हैं (जैसा कि चित्र-2 में है) तो शिक्षक समझा सकते हैं कि नेगेटिव नमूनों को कैसे छाँटा जाए और कैसे उन्हें विद्यार्थियों द्वारा बनाई गई तालिका में रिकॉर्ड किया जाए।



चित्र-2

नमूना	बाइनरी निरूपण	परखनली			
		T1	T2	T3	T4
1	0001	×	×	×	✓
2	0010	×	×	✓	×
3	0011	×	×	✓	✓
4	0100	×	✓	×	×
5	0101	×	✓	×	✓
6	0110	×	✓	✓	×
7	0111	×	✓	✓	✓
8	1000	✓	×	×	×
9	1001	✓	×	×	✓
10	1010	✓	×	✓	×
11	1011	✓	×	✓	✓
12	1100	✓	✓	×	×
13	1101	✓	✓	×	✓
14	1110	✓	✓	✓	×
15	1111	✓	✓	✓	✓

तालिका-3

इस मामले में, नेगेटिव नमूने 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14 और 15 हैं। इसके पश्चात्, शिक्षक पॉज़िटिव नमूनों को पहचानने के बारे में समझाते हैं। इस मामले में, नमूने 2, 8 और 10 शेष रह गए हैं। इन नमूनों को क्रमशः I, II और III के रूप में फिर से नामांकित किया जा सकता है और केवल परखनली T1, T2 और T3 का उपयोग करके फिर से परीक्षण किया जा सकता है। विद्यार्थियों से यह भी कहा जा सकता है कि यदि इनमें से केवल एक नमूना दूषित है तो सम्भावित परिणाम बताएँ।

6. विद्यार्थी जोड़े में काम करते हैं और अपने परिणाम रिकॉर्ड करते हैं। गतिविधि के बीच में, कोई भी दो समूह जिन्हें समान परीक्षण परिणाम मिलते हैं, वे अपने निष्कर्ष साझा कर सकते हैं। गतिविधि के अन्त में, शिक्षक यादृच्छिक (Randomly) रूप से विद्यार्थियों के कुछ जोड़े चुनते हैं और उन्हें सभी के साथ अपने निष्कर्ष साझा करने के लिए कह सकते हैं।

7. विद्यार्थियों को आगे काम करने के लिए एक वर्कशीट दी जा सकती है।

### सुझाव :

गतिविधि से जुड़ाव बनाने के लिए विद्यार्थी खुद अपने जोड़े/ समूह बना सकते हैं और सभी 16 सम्भावित परीक्षण परिणामों को कागज़ की रंगीन पट्टी का इस्तेमाल कर रंग पैटर्न के रूप में बना सकते हैं (जैसा कि चित्र-3 में दिखाया गया है) और उन्हें एक कटोरे में डाल सकते हैं। प्रत्येक जोड़ा कटोरे से एक कागज़ की रंगीन पट्टी निकाल सकता है और निर्धारित गतिविधि कर सकता है। यह गतिविधि समस्या को छोटे चरणों में तोड़कर और नेगेटिव नमूनों और सम्भावित पॉज़िटिव नमूनों का पता लगाने के लिए तर्क का उपयोग करके कम्प्यूटेशनल चिन्तन के पहलुओं को सुदृढ़ करती है।

### स्वयं प्रयास करें :

मान लीजिए T1, T2, T3 हरे हो जाते हैं और T4 लाल हो जाता है (चित्र-3)।



चित्र-3

नेगेटिव नमूनों और सम्भावित पॉजिटिव नमूनों का पता लगाने के लिए आप कैसे आगे बढ़ेंगे?

### आइए मन्थन करें!

1. मान लीजिए कि नमूना संख्या 15 दूषित है। आपको क्या लगता है क्या परिणाम आएंगे? परखनलियों के रंग क्या होंगे, बताएँ।
2. यदि नमूना संख्या 15 दूषित है, तो आप इसे कैसे पहचानेंगे?
3. यदि आपके पास पाँच परखनली हैं, तो आप कितने नमूनों का परीक्षण कर सकते हैं? छह परखनली हों तो क्या विचार है?
4. 1000 नमूनों का परीक्षण करने के लिए कितनी परखनलियों की आवश्यकता होगी? क्यों?
5. निम्नलिखित स्थितियों में, प्रावधिक रूप से पॉजिटिव नमूनों (वे नमूने जिन्हें तब तक पॉजिटिव माना जाता है जब तक कि वे नेगेटिव साबित न हो जाएँ) की संख्या बतलाएँ।

हरे रंग वाली परखनली की संख्या	लाल रंग वाली परखनली की संख्या	प्रावधिक रूप से पॉजिटिव नमूनों की संख्या
0	4	?
1	3	?
2	2	?
3	1	?
4	0	?

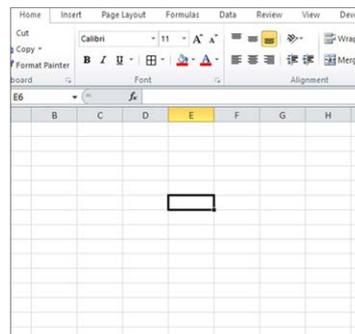
तालिका-4

सिमुलेशन का उपयोग करके तर्क कार्य को गतिविधि में बदलना

इस गतिविधि को एक्सेल स्प्रेडशीट का उपयोग करके विद्यार्थियों के लिए सिमुलेशन गतिविधि में बदला जा सकता है।

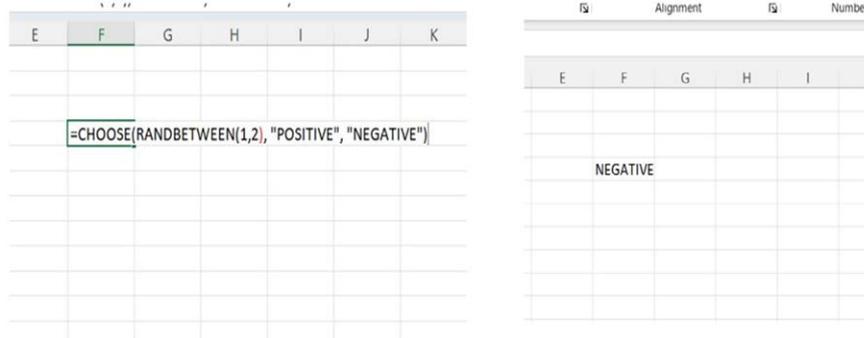
आइए, एक्सेल और रैंडम फ्रंक्शन जेनरेटर के माध्यम से परखनली के विभिन्न रंग क्रमचय का पता लगाएँ :

1. एक एक्सेल फ़ाइल स्प्रेडशीट खोलें और किसी भी सेल को चुनें।

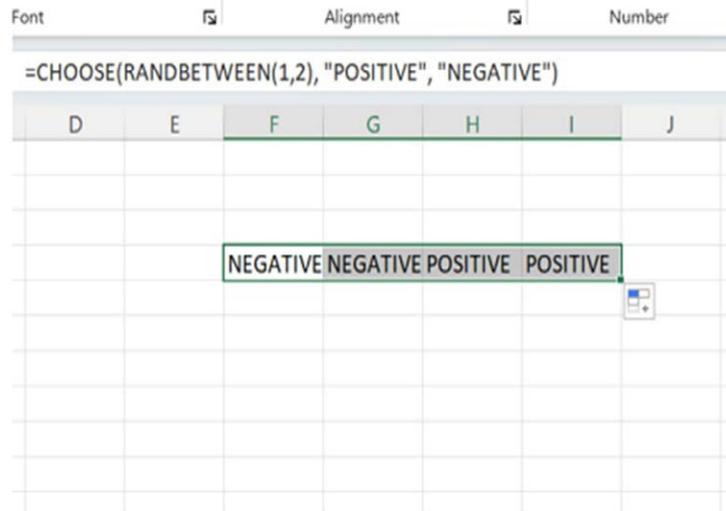


चित्र-4

2. सेल पर ‘=CHOOSE (RANDBETWEEN (1,2), “positive”, “negative”)’ फ़ंक्शन लगाएँ। सेल को सिलेक्ट करके इसे उसी पंक्ति के चार सेल तक बढ़ा लें। इन चारों सेल में ‘positive’ और ‘negative’ शब्द लिखे दिखाई देंगे। (चित्र-6) इन चार सेल को चार परखनली मान लें।



चित्र-5



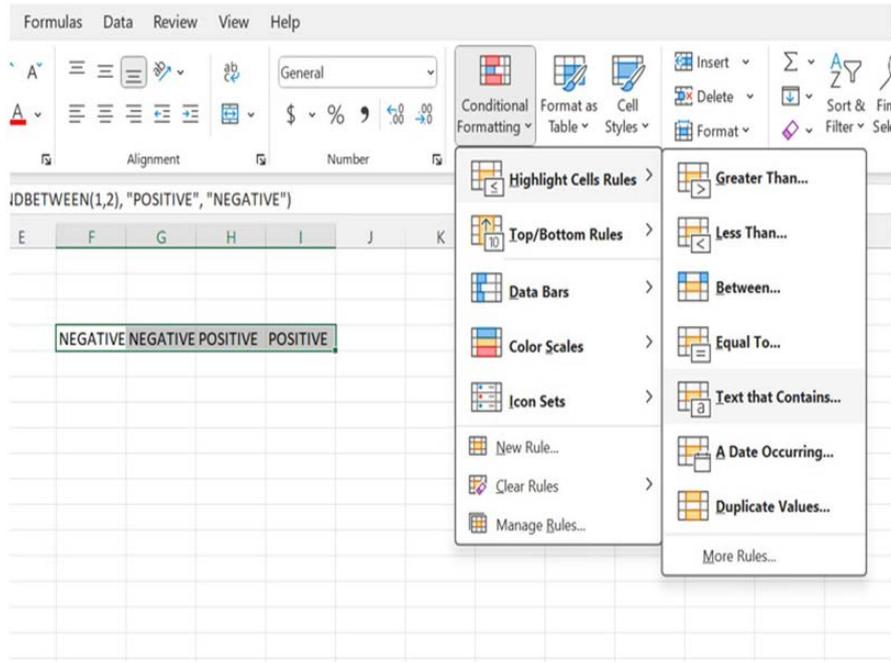
चित्र-6

3. इन सेल को छोड़कर कोई अन्य सेल चुनें। इस सेल में कोई भी अक्षर या संख्या लिखें और ‘Enter’ बटन दबाएँ। आप देखेंगे कि चारों सेल में शब्द बदल जाते हैं। किसी भी अन्य सेल में कोई भी संख्या दर्ज करके इस प्रक्रिया को दोहराएँ; फिर से, आप देखेंगे कि इन चार सेल में ‘positive’ और ‘negative’ शब्द अलग-अलग हैं।

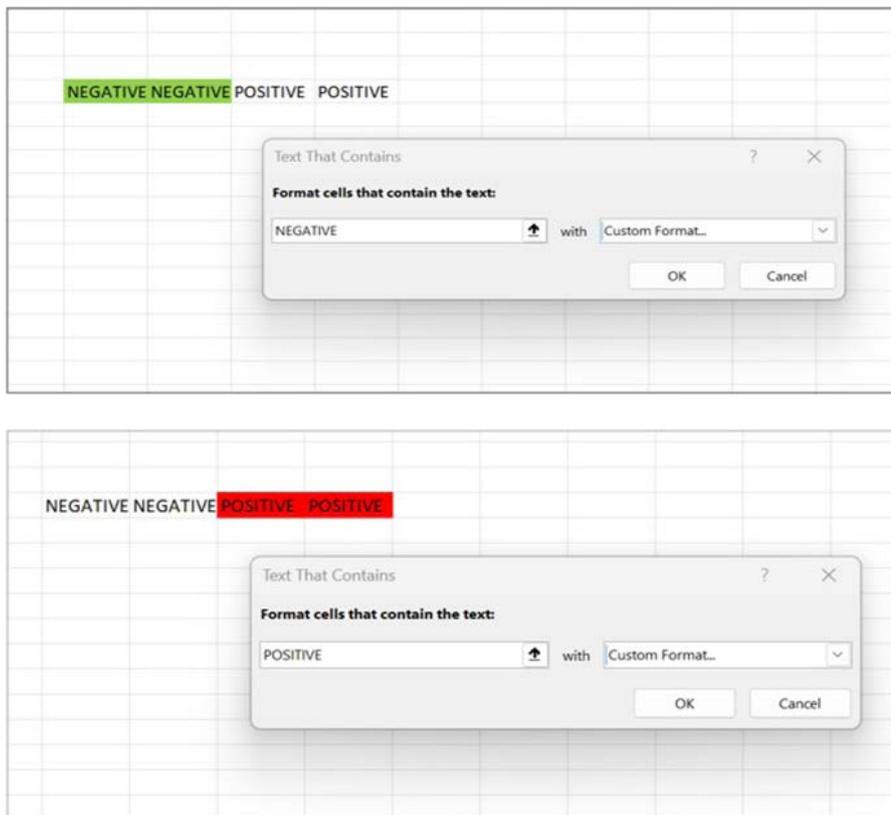


चित्र-7

4. अब चार सेल (परखनली) चुनें और 'conditional formatting' का उपयोग करके पॉज़िटिव और नेगेटिव शब्द विशिष्ट के लिए सेल को क्रमशः हरे रंग और लाल रंग से दर्शाएँ।



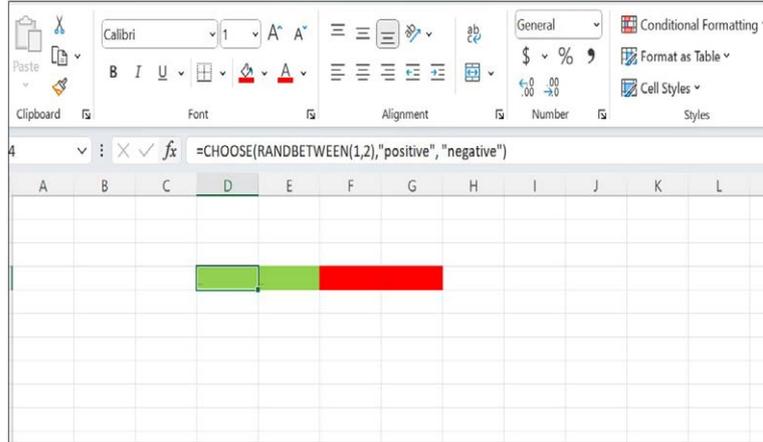
चित्र-8



चित्र-9

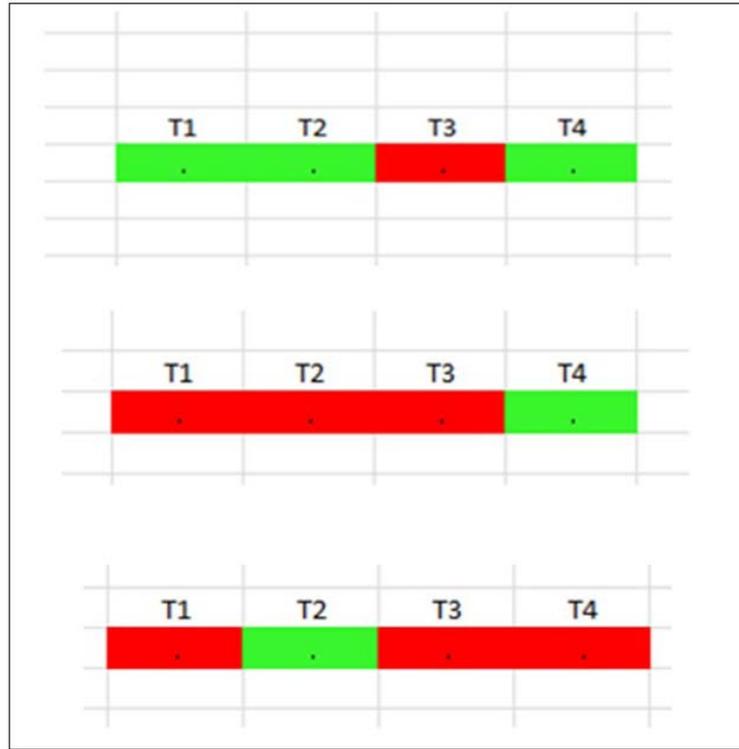
5. 'positive' और 'negative' शब्दों के फ्रॉन्ट साइज़ को जितना सम्भव हो उतना छोटा करें; जैसे कि साइड 1, ताकि

परखनली सेल पर केवल रंग दिखाई दें और शब्द अदृश्य हो जाएँ।



चित्र-10

6. किसी अन्य सेल का चयन करें और कोई भी संख्या लिखें और 'Enter' दबाएँ। ऐसा करने से परखनली सेल का रंग बदल जाता है। ऐसा करने से आप परखनली सेल में रंग के विभिन्न क्रमचय प्राप्त कर सकते हैं। सम्भावित क्रमचय के कुछ उदाहरण :



चित्र-11

7. लाल सेल को उनमें डाले गए (अभी के लिए) पॉजिटिव/ दूषित नमूनों के संकेतक के रूप में और हरे सेल को उनमें डाले गए नेगेटिव नमूनों के संकेतक के रूप में मानें। इस तरह कुल 24 यानी 16 रंगीन क्रमचय बनाए जा सकते हैं। इन 16 क्रमचयों में से एक क्रमचय चारों परखनलियों की रिक्तता दर्शाता है, यानी सभी परखनलियों को खाली छोड़ देना। इसलिए, हमें इस स्थिति पर विचार करने की आवश्यकता नहीं है, बल्कि बाकी 15 स्थितियों पर ही ध्यान केन्द्रित करने की आवश्यकता है।
8. स्प्रेडशीट का उपयोग करके तालिका बनाएँ, जिसमें 15 नमूनों और चारों परखनलियों के बीच सम्बन्ध दर्शाया गया हो।

		परखनलियाँ			
		T1	T2	T3	T4
नमूना क्रमांक	बाइनरी निरूपण	0	0	0	1
2	0010	0	0	1	0
3	0011	0	0	1	1
4	0100	0	1	0	0
5	0101	0	1	0	1
6	0110	0	1	1	0
7	0111	0	1	1	1
8	1000	1	0	0	0
9	1001	1	0	0	1
10	1010	1	0	1	0
11	1011	1	0	1	1
12	1100	1	1	0	0
13	1101	1	1	0	1
14	1110	1	1	1	0
15	1111	1	1	1	1

चित्र-12

अब हम चित्र-12 में दिखाए गए तर्क का ही उपयोग करेंगे।

### निष्कर्ष

इस पूरी प्रक्रिया के दौरान, विद्यार्थी नेगेटिव और पॉजिटिव नमूनों की पहचान के लिए प्रक्रिया को छोटे-छोटे चरणों में तोड़ने के लिए तर्क और चिन्तन का उपयोग करते हैं। इस प्रकार विद्यार्थी जब प्रत्येक नमूनों को बाइनरी कोड दे रहे होते हैं तब वे बाइनरी अंकगणित के साथ जुड़ते हैं, परखनलियों में पैटर्न तलाशते हैं और किसी नमूने को नेगेटिव या प्रावधानिक रूप से पॉजिटिव कहने के अपने निर्णय का मूल्यांकन करते हैं। इस गतिविधि में कम्प्यूटेशनल चिन्तन का सार यही है, जहाँ शिक्षक विद्यार्थी को तर्क के साथ-साथ समस्या को छोटे चरणों में विघटित करने और बाइनरी संख्याओं के साथ खेलते हुए हल करने के लिए अपनी कलन-विधि (एल्गोरिदम) को बनाने का अवसर प्रदान करते हैं।

**टिप्पणी :** बाइनरी अंकगणित के माध्यम से कोविड-पॉजिटिव/कोविड-संक्रमित नमूनों का परीक्षण करने के लिए इसी प्रकार का तरीका कादरी (2020) द्वारा सुझाया गया था, लेकिन इसमें नमूनों के मिश्रण के अनुपात की अवधारणा का उपयोग किया गया है।

**आभार :** लेखक समीक्षकों के बहुमूल्य सुझावों के लिए उनके आभारी हैं।

### References

1. *CS Unplugged*. (n.d.). Retrieved from Computational thinking: <https://www.csunplugged.org/en/computational-thinking/>
2. *CS Unplugged*. (n.d.). Retrieved from Binary numbers: <https://www.csunplugged.org/en/topics/binary-numbers/whats-it-all-about/>
3. Houston, K. (2016, December 15). *Can you solve the poison wine challenge?* Retrieved from PBS Infinite Series: <https://www.youtube.com/watch?v=N3qmN6pYhi0>
4. Kadri, Usama. "The Maths Logic that could help test more people for Coronavirus." *The Conversation*, April 9, 2020. <https://theconversation.com/the-maths-logic-that-could-help-test-more-people-for-coronavirus-134287>.

5. Ministry of Education. (2020, July 29). *National Education Policy 2020*. Retrieved February 29, 2024, from Ministry of Education: [https://www.education.gov.in/sites/upload\\_files/mhrd/files/NEP\\_Final\\_English\\_0.pdf](https://www.education.gov.in/sites/upload_files/mhrd/files/NEP_Final_English_0.pdf)
6. National Council of Educational Research and Training. (2023). *National curriculum framework for school education 2023*. Retrieved from National Council of Educational Research and Training: [https://www.ncert.nic.in/pdf/NCFSE-2023-August\\_2023.pdf](https://www.ncert.nic.in/pdf/NCFSE-2023-August_2023.pdf)

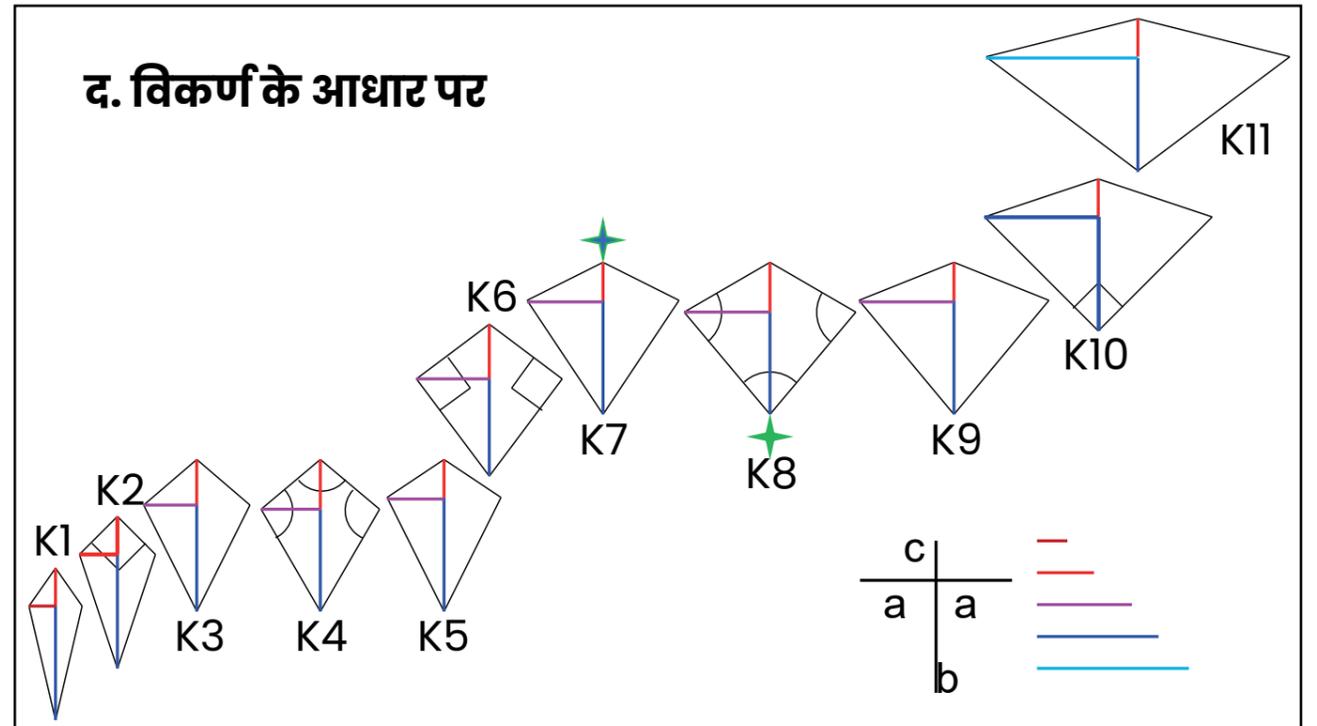
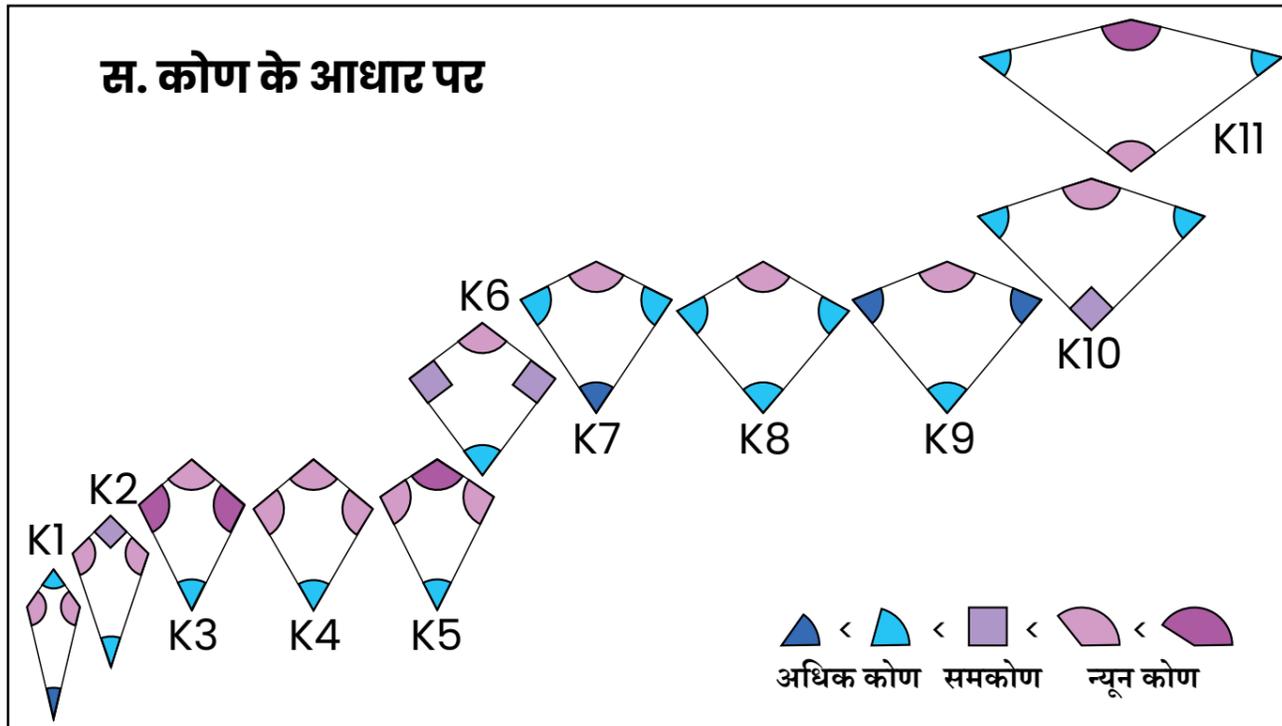
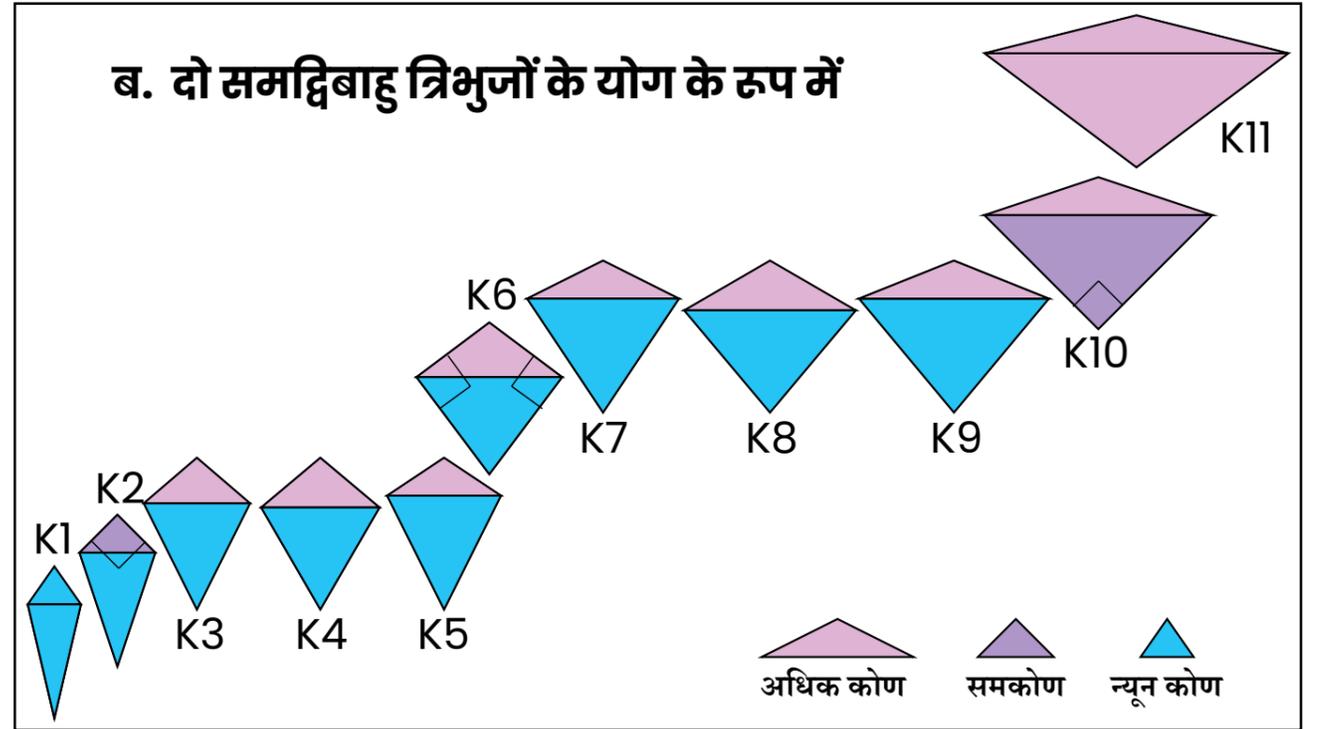
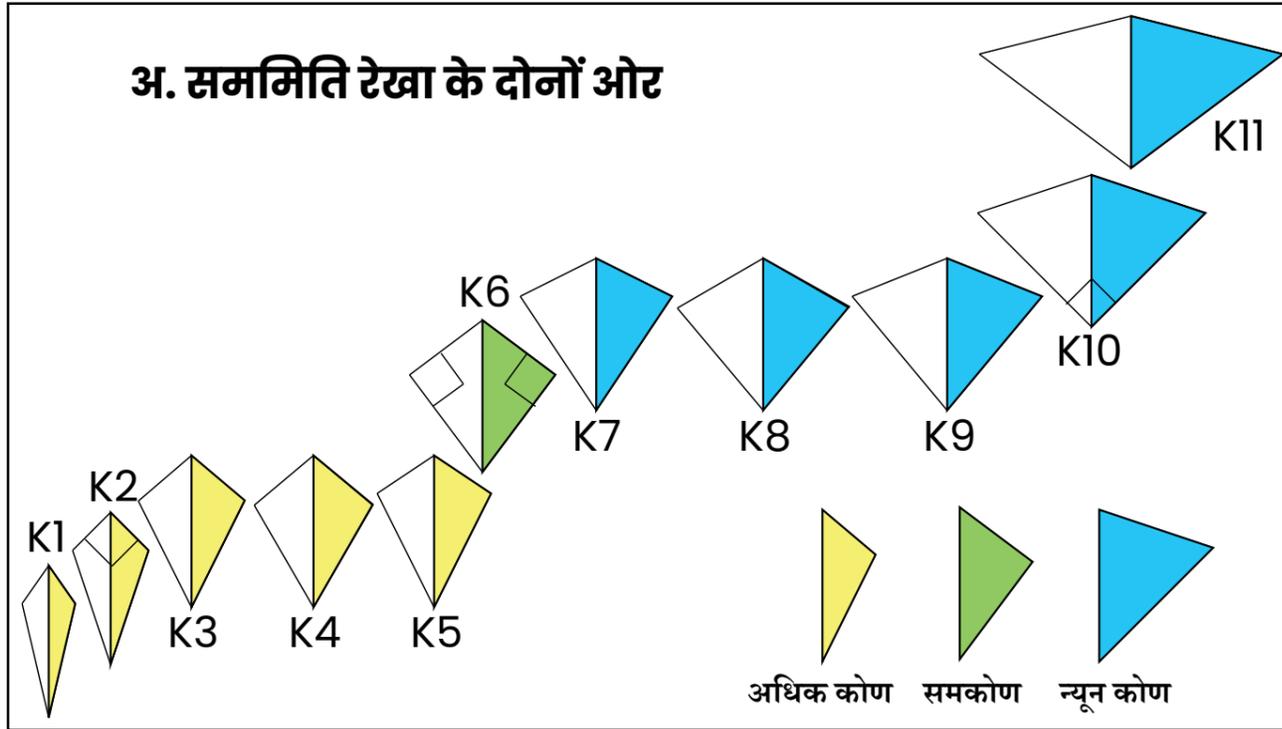


**कुमार गन्धर्व मिश्र** दक्षिण बिहार केन्द्रीय विश्वविद्यालय में पीएचडी शोधार्थी (गणित शिक्षण) हैं। उन्होंने दिल्ली विश्वविद्यालय के क्लस्टर इनोवेशन सेंटर से गणित शिक्षण में स्नातकोत्तर उपाधि प्राप्त की है। उन्होंने स्टेम (STEM) शिक्षा के क्षेत्र में सेंटर फ़ॉर क्रिएटिव लर्निंग, भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान गांधीनगर के साथ भी काम किया है। वे अक्सर गणित और गणित शिक्षण के सामाजिक और सांस्कृतिक पहलुओं पर लिखते हैं।

उनसे [mishrakumargandharv@gmail.com](mailto:mishrakumargandharv@gmail.com) पर सम्पर्क किया जा सकता है।

**अनुवाद :** लेखक ने स्वयं किया है। **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

# पतंग परिवार



इन चित्रों के अनुसार पतंगों के 11 प्रकार हैं (समचतुर्भुज के अलावा)। 2 समकोण वाली K6 एक विशेष पतंग है, क्यों? क्या आप K1, K2, ... K11 में से प्रत्येक की विशेषता बता सकते हैं? क्या आप कोण या भुजा-विकर्ण निर्दिष्ट करके इन 11 श्रेणियों में से प्रत्येक के लिए एक पतंग का रेखाचित्र बना सकते हैं? क्या आप प्रत्येक श्रेणी के लिए एक से अधिक पतंग बना सकते हैं?

क्या पतंगों को दो भागों में बाँटने वाला विकर्ण (सममिति की रेखा) हमेशा सबसे लम्बा होता है? 'विकर्ण के आधार पर' में, सितारों से चिह्नित 2 श्रेणियों में, विकर्ण बराबर हो सकते हैं। ब्लू स्टार श्रेणी K6 में तीनों प्रकार की पतंगें शामिल हैं (i) पतंग को दो भागों में बाँटने वाला विकर्ण सबसे लम्बा, (ii) विकर्ण बराबर और (iii) पतंग को दो भागों में बाँटने वाला विकर्ण सबसे छोटा। ग्रीन स्टार श्रेणी K8 में पतंग को दो भागों में बाँटने वाले विकर्ण लम्बे होते हैं और जब विकर्ण बराबर होते हैं, तो यह एक वर्ग बन जाता है!

यहाँ कुछ प्रश्न दिए गए हैं जिनके बारे में विद्यार्थी जाँच-पड़ताल कर सकते हैं।

<p><b>अ. सममिति रेखा के दोनों ओर</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. प्रत्येक पतंग में कौन-सी रेखा सममिति रेखा है?</li> <li>2. इसे सममिति रेखा क्यों कहा जाता है?</li> <li>3. सममिति रेखा से बनने वाले त्रिभुजों पर विचार करें। इन त्रिभुजों के आधार पर, आप K1, K2,... K11 को कितने प्रकार के समूहों में वर्गीकृत कर सकते हैं? ये समूह कौन-कौन से हैं?</li> <li>4. ये समूह पतंग के बराबर-बराबर (और विपरीत) कोणों के जोड़े को वर्गीकृत करते हैं। क्या प्रत्येक समूह के भीतर उपसमूह हो सकते हैं? ये उपसमूह किसे वर्गीकृत करते हैं?</li> <li>5. वैकल्पिक : क्या आप एक वृक्ष-चित्र बना सकते हैं?</li> <li>6. यदि हम पतंगों की बजाय समचतुर्भुजों पर विचार करते हैं, तो सममिति रेखा द्वारा बनाए गए त्रिभुजों को ध्यान में रखते हुए कितनी सम्भावनाएँ बनती हैं?</li> </ol>	<p><b>ब. दो समद्विबाहु त्रिभुजों के योग के रूप में</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. कोई भी पतंग लें। दो समद्विबाहु त्रिभुजों की उभयनिष्ठ भुजा पर विचार करें। यह भुजा पतंग से किस प्रकार सम्बन्धित है?</li> <li>2. सभी सम्भावित समद्विबाहु त्रिभुजों पर विचार करें – न्यून कोण, समकोण, अधिक कोण। सम्भावित संयोजन क्या हैं जो निम्न आकृतियाँ उत्पन्न करते हैं : क. पतंग ख. समचतुर्भुज ग. क्या कोई अन्य विशेष चतुर्भुज सम्भव है? चतुर्भुज का प्रकार भी बताएँ?</li> <li>3. ऐसी प्रत्येक पतंग के बराबर वाले कोण (न्यून कोण/समकोण/अधिक कोण) क्या होंगे?</li> <li>4. 2क में वर्गीकरण के आधार पर K1, K2,... K11 को वर्गीकृत करें। क्या आप K1, K2,... K11 के अलावा कोई पतंग खोज सकते हैं?</li> </ol>
<p><b>स. कोण के आधार पर</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. किसी भी पतंग में सबसे बड़े कोण का चुनाव कर लें। यह किस प्रकार का कोण है?</li> <li>2. सबसे छोटा कोण किस प्रकार का है?</li> <li>3. पतंग में बराबर और विपरीत कोणों की एक जोड़ी होती है। इस जोड़ी के आधार पर कितने प्रकार की पतंगें होती हैं?</li> <li>4. K2 का हल्का नीला कोण, K7 के गहरे नीले कोण से कम क्यों है?</li> <li>5. क्या आप कोणों के आधार पर विभिन्न प्रकार की पतंगों को वर्गीकृत करते हुए, एक वृक्ष-चित्र बना सकते हैं? इस चार्ट पर K1, K2,... K11 में से प्रत्येक पतंग का स्थान कहाँ होगा, यह इंगित करें।</li> <li>6. क्या आप K1, K2,... K11 में से प्रत्येक पतंग के लिए उदाहरण दे सकते हैं? उदाहरण के लिए, K6 : <math>120^\circ-90^\circ-90^\circ-60^\circ</math></li> <li>7. क्या आप K1, K2,... K11 के अलावा किसी भी कोण संयोजन वाली पतंग बना सकते हैं?</li> <li>8. K6 पतंग बनाएँ। विकर्ण (या सममिति की रेखा) की लम्बाई को व्यास के रूप में लेते हुए एक वृत्त बनाएँ। आप क्या देखते हैं? क्या आप K1, K2,... K5 या K7, K8,... K11 के लिए भी यही देखते हैं?</li> </ol>	<p><b>द. विकर्ण के आधार पर</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. विकर्ण <math>a</math>, <math>b</math> और <math>c</math> के भागों के सन्दर्भ में K1, K2,... K11 में से प्रत्येक का वर्णन करें। उदाहरण के लिए, K2 : <math>a = c &lt; b</math></li> <li>2. अपनी पसन्द के <math>a</math>, <math>b</math> और <math>c</math> का उपयोग करके K1, K2,... K11 में से प्रत्येक के लिए पतंग बनाएँ। सुनिश्चित करें कि <math>b &gt; c</math> है।</li> <li>3. K1, K2,... K6 के लिए कौन-सा विकर्ण लम्बा है? K1, K2,... और K11 के लिए कौन-सा विकर्ण लम्बा है? क्यों?</li> <li>4. यदि पतंग के विकर्ण बराबर हैं, तो <math>a</math>, <math>b</math> और <math>c</math> के बीच सम्बन्ध ज्ञात करें।</li> <li>5. अब निम्न निर्देशों के अनुसार तीन K7 पतंगें बनाएँ : (i) पतंग को दो भागों में बाँटने वाले विकर्णों में एक विकर्ण दूसरे से लम्बा है (ii) दोनों विकर्ण बराबर हैं (iii) पतंग को दो भागों में बाँटने वाले विकर्णों में एक विकर्ण दूसरे से छोटा है</li> <li>6. चुनौती : साबित करें कि अगर पतंग के विकर्ण बराबर हैं, तो समान (और विपरीत) कोण न्यून कोण होने चाहिए।</li> </ol>

**मैथ स्पेस** अजीम प्रेमजी विश्वविद्यालय की एक गणित प्रयोगशाला है जो स्कूलों, शिक्षकों, अभिभावकों, बच्चों, स्कूली शिक्षा और शिक्षक प्रशिक्षकों के साथ काम करने वाले गैर-सरकारी संगठनों को सेवाएँ प्रदान करती है। यह गणित के लिए सीखने-सिखाने की विभिन्न सहायक सामग्री [mat(h)erials] और साथ-साथ कम लागत वाले संस्करणों की सम्भावना की खोज करती है जिन्हें कबाड़ से बनाया जा सकता है। यह दोनों, गणित से डरने या नफ़रत करने वालों, साथ-ही-साथ गणित प्रेमियों, को सम्बोधित करने का प्रयास करती है। यह एक ऐसा स्थान है जहाँ कई लोगों के साथ चर्चा के माध्यम से विचार उत्पन्न होते हैं और विकसित होते हैं। मैथ स्पेस को आप [mathspace@apu.edu.in](mailto:mathspace@apu.edu.in) पर लिख सकते हैं।

**अनुवाद :** यशोधरा कनेरिया **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

# गणित बराबर गर्म? गणित बराबर ठण्डा?

---

पद्मप्रिया शिराली

**की-वर्ड :** तापमान, प्रयोग, अवलोकन, दस्तावेजीकरण, विश्लेषण, जीवनशैली का बदलाव

अभी तक पुलआउट सेक्शन की सामग्री अधिकांशतः विषय आधारित और गणितीय गतिविधियों तथा शिक्षण पद्धति पर केन्द्रित रही है। यह पुलआउट गणित को विज्ञान की अवधारणाओं के साथ एकीकृत करने का एक प्रयास है ताकि जीने के जवाबदेह तरीके विकसित किए जा सकें।

यहाँ चुना गया विषय – तापमान – उच्च प्राथमिक, कक्षा-6 के लिए उपयुक्त है। इसका उद्देश्य है तापमान की अवधारणा और इसे प्रभावित करने वाले कारकों को समझना, तापमान मापने के तरीकों पर चर्चा करना और प्रयोग करना तथा हमारे दैनिक जीवन से तापमान के सम्बन्ध पर गौर करना।

पूरे भारत में हम अत्यधिक गर्मी और असामान्य सर्दी के मौसम का अनुभव कर रहे हैं। हमारी रोजमर्रा की बातचीत में मौसम के बारे में चर्चा शामिल होती है – जैसे गर्मी, बारिश, पानी की कमी आदि। मौसम और बारिश के पूर्वानुमानों को उत्सुकता से देखा जाता है, उन पर चर्चा की जाती है और उनका इन्तजार किया जाता है।

वर्तमान काल में मौसम और तापमान का अध्ययन हम सबके लिए प्रासंगिक है। यह विषय हमें मापन और आँकड़ों के संग्रह का मौका देता है। साथ ही अन्य विषय क्षेत्रों के साथ आसान जुड़ाव बनाने के अवसर भी देता है : जैसे भूगोल (भौतिक विशेषताएँ जो तापमान के सम्बन्ध में एक भूमिका निभाती हैं), भौतिकशास्त्र (किस प्रकार ऊष्मा का अवशोषण, विकिरण और चालन होता है), तापमान बढ़ने से जुड़े आँकड़े इत्यादि के साथ।

तापमान के अध्ययन में अवलोकन, आँकड़ों का संचयन, आँकड़ों का निरूपण और व्याख्या शामिल होना चाहिए। तापमान को प्रभावित करने वाले कारकों से जुड़े पुराने आँकड़ों का अध्ययन, रिकार्डों का विश्लेषण करना और उनमें कोई पैटर्न तलाशना उपयोगी होता है।

तापमान की अवधारणा को समझने और तापमान का आकलन व मापन करना सीखने के लिए प्रयोग करने के अलावा यह भी ज़रूरी है कि विद्यार्थी रोजमर्रा की उन चीज़ों के बारे में सवाल पूछना शुरू करें जिन्हें वे जस का तस मानकर चलते हैं या अनदेखा कर देते हैं। हर सवाल में ऐसे कई और सवालों तक ले जाने की सम्भावना होती है जो विषय को गहराई से समझने में विद्यार्थियों की मदद करते हैं।

इस पुलआउट में, मैं ऐसे विविध प्रयोग साझा कर रही हूँ जो इस अवधारणा की अवलोकन-आधारित समझ विकसित करने, और विषय की अधिक खोज-बीन करने हेतु सवाल उठाने के लिए करवाए जा सकते हैं।

पहले से पता होने की अपेक्षाएँ :

- तापमान की धारणा : विद्यार्थियों को शरीर के तापमान और उसे नापने के तरीके के बारे में पता होना चाहिए। उन्होंने गर्म व सर्द दिनों का तथा गर्मियों व सर्दियों के मौसम के तापमान में होने वाले अन्तर का अनुभव भी किया होगा।
- अलग-अलग तापमानों की दो-तीन चीज़ों की तुलना करना और उन्हें क्रम में रखना। उपयुक्त शब्दावली का प्रयोग करना जैसे उबलता हुआ, बहुत गर्म, गर्म, उष्ण, शीतल, ठण्डा, बहुत ठण्डा, जमा हुआ।
- एक माप के रूप में औसत की समझ।
- रेखा ग्राफ़ की समझ और ऊर्ध्वाधर/क्षैतिज अक्ष को पढ़ने का बुनियादी कौशल।

**अवधारणा :** तापमान किसी शरीर, हवा, द्रव या किसी भी पदार्थ में मौजूद ऊष्मा की मात्रा की माप है। विद्यार्थियों को समझाएँ कि तापमान किसी वस्तु की ऊष्मा या शीतलता की मात्रा (डिग्री) होता है। बच्चे अकसर ऊष्मा व तापमान को लेकर भ्रमित होते हैं और दोनों को एक ही मान लेते हैं। तापमान का मापन सेल्सियस प्रणाली (एक वैज्ञानिक के नाम पर रखा गया नाम) में किया जाता है। इसे संक्षिप्त रूप में डिग्री सेल्सियस ( $^{\circ}\text{C}$ ) से दिखाया जाता है।

**उपयोग :** विद्यार्थियों को थर्मामीटर का उपयोग बताएँ। मापन गतिविधियों के लिए डिजिटल की जगह एनालॉग थर्मामीटर का उपयोग करना बेहतर होगा। थर्मामीटर के बल्ब को बस उसी चीज़ को छूना चाहिए जिसे मापा जा रहा हो। मापते समय थर्मामीटर को कम-से-कम एक मिनट तक एक ही जगह पर स्थिर रखना चाहिए जब तक कि उसके लाल द्रव का ऊपर चढ़ना रुक नहीं जाता।

**सावधानी :** मापन गतिविधियों के लिए चिकित्सकीय थर्मामीटरों का उपयोग नहीं किया जाना चाहिए।

## जाँच-पड़ताल - 1

उद्देश्य : थर्मामीटर के पैमाने को पढ़ना सीखना।

गर्मियाँ किस प्रकार हम सबको प्रभावित करती हैं, इस विषय से विद्यार्थियों का परिचय कराएँ और उन्हें यह अभिव्यक्त करने दें कि वे इस बारे में क्या महसूस करते हैं। यह निश्चित है कि उनके द्वारा झेली जाने वाली कई तकलीफ़ों का और शिकायतों का ज़िक्र होगा। हो सकता है विद्यार्थी अपने आप से मौसम के पहलुओं के बारे में सोच-विचार करें और अपने मन के सवाल पूछें। अगर वे ऐसा नहीं करते तो आप ऐसे सवाल उठाएँ जिनसे प्रयोगों के लिए योजनाएँ तैयार करने में विद्यार्थियों को मदद मिल सके।

दिन का कौन-सा वक़्त सबसे गर्म होता है? तापमान कब बढ़ना शुरू होता है? क्या यह एक समान ढंग से बढ़ता है? यह बढ़ा हुआ तापमान कितने समय तक रहता है? यह कम होना कब शुरू होता है? क्या तापमान का कोई दैनिक पैटर्न दिखाई देता है?

विद्यार्थी किसी तरह का भी मापन शुरू करें उससे पहले इन सवालों पर चर्चा करें। विद्यार्थियों को इन सवालों के बारे में उनके विचारों और धारणाओं को दर्ज करने को कहें।

विद्यार्थियों को हवा का तापमान मापने वाला एक एनालॉग थर्मामीटर दें। थर्मामीटर को सीधा खड़ा रखें (ज़रूरत हो तो उसे किसी मज़बूत बॉक्स पर चिपका दें)।

देखें कि समय गुज़रने के साथ थर्मामीटर के बल्ब (नीचे की ओर गोल घुण्डी) में स्थित लाल द्रव में क्या होता है।



समय	अनुमानित तापमान	वास्तविक तापमान
9.00		
9.30		
10.00		
10.30		
11.00		
11.30		
12.00		

विद्यार्थी समूह बना सकते हैं और हर समूह बारी-बारी से तापमान माप सकता है।

विद्यार्थियों को थर्मामीटर पर सही ढंग से तापमान पढ़ने का तरीक़ा और पैमाने का उपयोग बताएँ। विद्यार्थियों को तय करने दें कि वे कितने-कितने अन्तराल पर माप लेंगे और उन्हें दर्ज करेंगे। आदर्श स्थिति में, उन्हें हर 30 मिनट में ऐसा करना चाहिए। हर माप के बाद वे अगली रीडिंग का अपना अनुमान लिख सकते हैं। दोपहर तक, वे तापमान के घटने का पूर्वानुमान कर सकते हैं।

गणित की अगली क्लास में विद्यार्थी रिकार्ड किए गए आँकड़ों पर चर्चा कर सकते हैं। क्या आँकड़े उनके पूर्व में लगाए गए अनुमानों से मेल खाते हैं? क्या तापमान में बढ़ोतरी अपेक्षा से पहले/बाद शुरू हुई? क्या अधिकतम तापमान दोपहर 12 बजे रिकार्ड किया गया? या इसके बाद? क्या विद्यार्थी तापमान के बढ़ने/घटने के ढंग में कोई पैटर्न देखते हैं?

इस जानकारी से हम और क्या आँकड़े निकाल सकते हैं? क्या अधिकतम व न्यूनतम तापमान के बीच का अन्तर हमारे लिए किसी उपयोग का होगा? किसके लिए उपयोगी होगा? अगर कोई इस स्थान पर आने का सोचे तो उनके लिए ये आँकड़े किस तरह उपयोगी होंगे? अगर हमें तापमान का वर्णन किसी सन्निकट आँकड़े के साथ करना हो तो हम किस आँकड़े का उपयोग करेंगे? क्या विद्यार्थियों में औसत की कोई सहज समझ है?

## जाँच-पड़ताल - 2

**उद्देश्य :** थर्मामीटर के कार्य करने के तरीके को समझना ।

श्री मेहता एक जलीय फार्म में काम करते हैं जहाँ कृत्रिम तालाबों में खास प्रकार की मछलियों को पाला जाता है। मेहता जी को पानी के तापमान की जाँच करना है क्योंकि शैवाल अपेक्षाकृत गर्म पानी में पनपती है और ज्यादा तेजी से बढ़ती भी है। शैवाल की वृद्धि पानी में मौजूद ऑक्सीजन की मात्रा को कम कर सकती है, जिससे मछलियों और जलीय जीवन के लिए समस्याएँ पैदा हो सकती हैं।

नल के पानी का तापमान क्या होता है (ध्यान रखें कि गर्मियों में नल का पानी काफी गर्म हो सकता है)? एक बीकर को नल के पानी से भर लें और उसमें थर्मामीटर को रख दें। वह क्या रीडिंग दिखाता है? शायद  $25^{\circ}\text{C}$  के करीब? थोड़े गुनगुने पानी के साथ यह प्रयोग करें।

थर्मामीटर के पैमाने को गौर से देखें। सेल्सियस की तरफ़ के चिह्न 50 से शुरू होकर 0 तक और फिर और नीचे  $-40$  डिग्री तक क्यों जाते हैं? इसका क्या अर्थ होता है?

लाल द्रव के साथ क्या होता है? वह ट्यूब में ऊपर की ओर बढ़ता है। सरल शब्दों में थर्मामीटर के कार्य करने के तरीके को समझाएँ। जब घुण्डी के आस-पास का वातावरण गर्म हो जाता है, तो इसमें भरे द्रव का प्रसार होता है और यह ट्यूब में ऊपर की ओर चढ़ने लगता है।

ठण्डे पानी के साथ इस प्रयोग को करें। अब क्या होता है?

देखें कि विद्यार्थी इस जाँच को किस तरह करते हैं। क्या उनका ध्यान इस बात पर गया कि द्रव का स्तर नीचे गिरा है? क्या वे समझा सकते हैं कि ऐसा क्यों हुआ? क्या उनके स्पष्टीकरण ध्यानपूर्वक व सोच-विचार कर दिए गए थे? क्या विद्यार्थियों ने इन बातों पर गम्भीरता से चर्चा की और क्या एक-दूसरे को ध्यान से सुना?

उन्हें समझाइए कि जब आस-पास का वातावरण ठण्डा हो जाता है, तो द्रव भी ठण्डा हो जाता है और सिकुड़ने लगता है।

**तथ्य :** नैसर्गिक गर्म चर्मों से निकलने वाले गर्म पानी का तापमान  $50^{\circ}\text{C}$  से अधिक हो सकता है और कुछ मामलों में पानी के क्वथनांक ( $100^{\circ}\text{C}$ ) से भी अधिक हो सकता है।

**विद्यार्थियों से विचार करने को कहें :** हम घर में कब-कब गर्म पानी का उपयोग करते हैं? क्या उद्योगों में भी गर्म पानी का उपयोग होता है?

## जाँच-पड़ताल - 3

**उद्देश्य :** इस बात को जानना कि पानी  $100^{\circ}\text{C}$  पर उबलता है और  $0^{\circ}\text{C}$  पर जमता है।

पानी किस तापमान पर उबलता है? जमता है?

पानी के उबलने के बिन्दु (क्वथनांक) पर तापमान की जाँच करते समय बेहद सावधानी रखनी चाहिए। जाँच करने के लिए प्रयोगशाला के थर्मामीटर का उपयोग करें। विद्यार्थी पानी को उबालने के लिए एक केतली का इस्तेमाल कर सकते हैं, उससे कुछ पानी एक बीकर में उड़ेल सकते हैं और तापमान की जाँच कर सकते हैं।

विद्यार्थियों को बीकर में बर्फ़ के छोटे-छोटे टुकड़े दिए जा सकते हैं। इन टुकड़ों का तापमान  $0^{\circ}\text{C}$  के आस-पास होगा।



## जाँच-पड़ताल - 4

उद्देश्य : इस बात को समझना कि उत्तर अलग-अलग हो सकते हैं और विभिन्न कारकों पर निर्भर होते हैं।

पानी की बोतल को जमने में कितना समय लगता है?

विद्यार्थियों को उत्तर का अनुमान लगाने से पहले इस स्थिति को प्रभावित करने वाले विभिन्न कारकों पर चर्चा करने को कहें। क्या वे इस बात को पकड़ पाते हैं कि पानी का शुरुआती तापमान उसके जमने के समय को बदल सकता है?

पानी के आयतन के बारे में उनकी क्या राय है? उस बर्तन के बारे में वे क्या सोचते हैं जिसमें पानी रखा गया है? और फ्रीज़र के तापमान के बारे में क्या राय रखते हैं?

पानी के जमने की गति को बढ़ाने के लिए वे क्या-क्या कर सकते हैं?

**जाँच-पड़ताल के लिए एक और सवाल :** वॉटर कूलर/ फ्रिज में लम्बे समय से रखे हुए पानी का क्या तापमान है? मटके में रखे पानी का क्या तापमान है?

भारतीय घरों में मटके का खास स्थान रहा है। कुछ लोग मानते हैं कि कूलर में रखे गए पानी की अपेक्षा मिट्टी के घड़े का पानी पीना ज्यादा बेहतर है। क्या वाकई ऐसा है इसे जानने के लिए किसी डॉक्टर से बात करें। डॉक्टर द्वारा बताए गए कारण क्या हैं?



## जाँच-पड़ताल - 5

उद्देश्य : स्थान के बदलने पर तापमान में आने वाले बदलाव को देखना।

क्या छायादार क्षेत्र (किसी पेड़ के नीचे) में तापमान कम होता है? कितना कम होता है? छायादार क्षेत्र में तापमान का क्या पैटर्न होता है? क्या यह धूप वाले स्थान की तुलना में हमेशा उतने ही डिग्री कम होता है?

क्या कक्षा के भीतर के तापमान का पैटर्न भी इसी तरह का होता है? यह बाहर के तापमान से कितने डिग्री कम होता है? क्या यह धूप वाले स्थान की तुलना में हमेशा उतने ही डिग्री कम होता है?

**चर्चा करें :** कक्षा के कौन-से हिस्से गर्म हैं? कौन-से हिस्से ठण्डे हैं? ऐसा क्यों? क्या फर्श और छत के तल के तापमान में अन्तर है? इसका कारण क्या हो सकता है? गर्मियों में सीलिंग फैन चालू करने पर क्या होता है?

विद्यार्थियों को उपयुक्त स्थानों को चुनकर और आँकड़ों को दर्ज करते हुए ज़रूरी मापन करने को कहें। विद्यार्थियों को अपने दर्ज किए गए रिकार्डों को रेखा ग्राफ़ के रूप में दिखाने को कह सकते हैं ताकि अलग-अलग स्थानों की तुलना हो सके। विद्यार्थी क्या अनुमान लगाते हैं? क्या वे अपने सामने रखे गए आँकड़ों का उपयोग करते हुए अपने अनुमानों के कारण बता पाते हैं? उनके अनुमान कितने सही रहे?

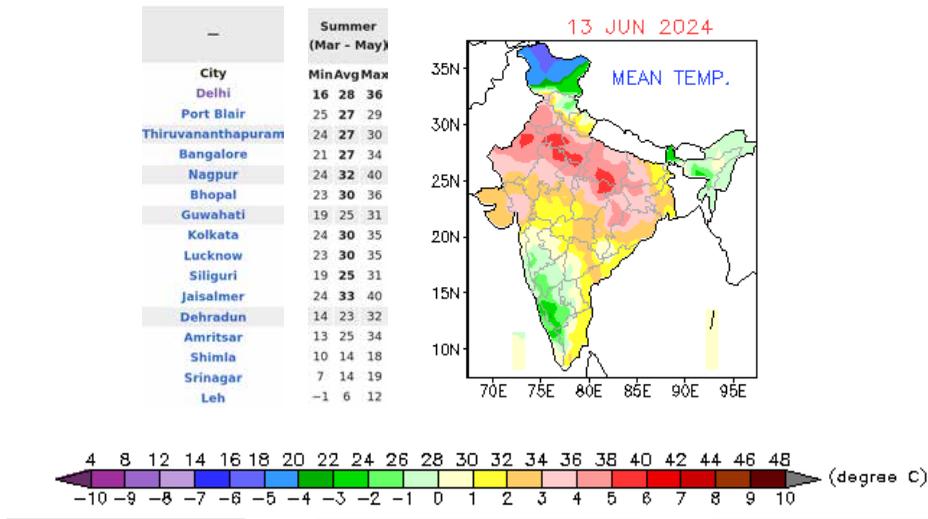
स्थिति	धूप वाले स्थान का तापमान	छाया वाले स्थान का तापमान	कक्षा के भीतर का तापमान
सुबह 9 बजे			
सुबह 11 बजे			
दोपहर 1 बजे			
दोपहर 3 बजे			

## जाँच-पड़ताल - 6

उद्देश्य : विषय में और गहराई से उतरने के लिए स्थानीय तापमानों से आगे बढ़कर देश भर के तापमानों को शामिल करना।

क्या इस समय भारत के अन्य स्थान, जैसे कि राज्यों की राजधानियों (या उसी राज्य के अन्य जिलों) का तापमान भी यही है? अधिकतम तापमान वाले कौन-से शहर हैं? किन शहरों में तापमान अधिक रहता है? किन में तापमान कम रहता है? इस अन्तर का कारण क्या हो सकता है?

विभिन्न शहरों के तापमानों की जानकारी देने वाली एक विजुअल (दृश्य) या डेटा तालिका का उपयोग करें। भारत के विभिन्न शहरों में औसत तापमान (डिग्री सेल्सियस)। ([https://en.wikipedia.org/wiki/Climate\\_of\\_India](https://en.wikipedia.org/wiki/Climate_of_India))



[https://mausam.imd.gov.in/ClimateInformation/imdweb/DAY\\_WEEK/t-0.gif](https://mausam.imd.gov.in/ClimateInformation/imdweb/DAY_WEEK/t-0.gif)

विद्यार्थियों को एक अभ्यास के रूप में मानचित्र पर इन स्थानों को चिह्नित करते हुए दी गई जानकारी को दर्ज करना चाहिए और उसका अध्ययन करना चाहिए।

विद्यार्थियों को इन आँकड़ों के विभिन्न पहलुओं पर गौर करने को कहें। उन्हें सवाल गढ़ने के लिए प्रोत्साहित करें। उनका मार्गदर्शन करने वाले कुछ सवाल उठाएँ। क्या तटीय क्षेत्रों में कुछ समानताएँ हैं? हरे रंग से चिह्नित कई क्षेत्रों में भारत की कौन-सी भौतिक विशेषताएँ देखी जा सकती हैं? क्या वहाँ पहाड़ियाँ हैं? क्या इन क्षेत्रों में जंगल हैं? किन स्थानों में न्यूनतम व अधिकतम तापमान के बीच का अन्तर सबसे अधिक है? ये स्थान भारत के कौन-से भाग में स्थित हैं? जैसलमेर के तापमान के लिए जिम्मेदार कौन-सी भौतिक विशेषताएँ हो सकती हैं?

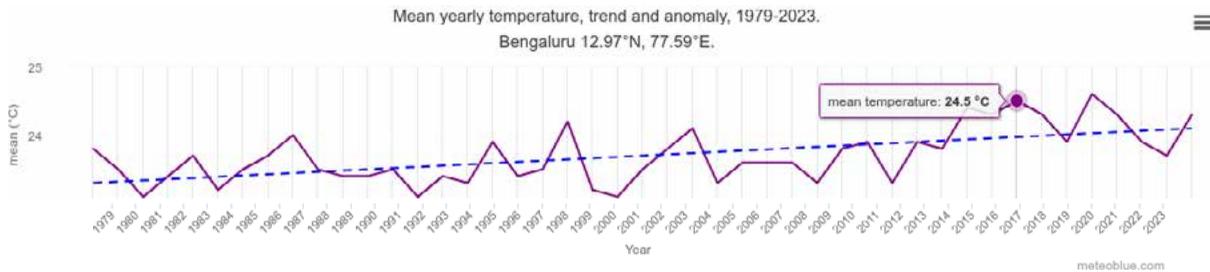
**तथ्य :** भारत में अभी तक का अधिकतम तापमान, 51.0 °C, मई 2016 में राजस्थान के जोधपुर ज़िले में दर्ज किया गया था। भारत में अभी तक न्यूनतम तापमान, -45.0 °C, जनवरी 1995 में लद्दाख में दर्ज किया गया था। मानचित्र पर इन स्थानों को चिह्नित करें। क्या इन दोनों स्थानों में कोई बात समान है?

## जाँच-पड़ताल - 7

उद्देश्य : समय के साथ होने वाले बदलावों पर ध्यान देना और उनका विश्लेषण करना।

विद्यार्थियों से उन क्रिस्सों के बारे में पूछें जो उन्होंने अपने बड़ों से गर्मियों के बारे में सुने होंगे। अधिकांश विद्यार्थियों ने अपने माता-पिता, दादा-दादी, नाना-नानी को अपनी युवावस्था के दिनों के बारे में यह कहते हुए सुना होगा कि उस समय उन्हें एसी, कूलर, फ्रिज़ आदि चीज़ों की ज़रूरत नहीं पड़ा करती थी। उनका काम इनके बिना भी आराम से काम चल जाता था। विद्यार्थियों ने खुले आकाश के नीचे छतों पर या बरामदों में सोने के क्रिस्से भी सुने होंगे।

**सवाल पूछें :** हमारे क्षेत्र में बीते सालों में तापमान की मापें किस प्रकार बदली हैं?



[https://www.meteoblue.com/en/climate-change/bengaluru\\_india\\_1277333](https://www.meteoblue.com/en/climate-change/bengaluru_india_1277333)

किसी निकट के शहर के आँकड़े लें और विद्यार्थियों द्वारा हासिल की गई जानकारियों पर गौर करने को कहें। हालाँकि यह ग्राफ़ प्रवृत्ति या रुझान रेखा को भी दिखाता है, पर औसत (मध्यमान) तापमान ग्राफ़ इस बात पर गौर करने के लिए पर्याप्त हैं कि वार्षिक तापमान किस प्रकार बढ़ रहे हैं।

किन सालों में बैंगनी रेखा ने 24°C को पार किया है? क्या पिछले कुछ सालों में यह वृद्धि लगातार हो रही है? इस वृद्धि का कारण क्या हो सकता है? क्या जनसंख्या के बढ़ने से इसका कुछ लेना-देना है? जनसंख्या बढ़ने से तापमान पर क्या असर पड़ेगा?

क्या इसका सम्बन्ध औद्योगिक प्रदूषण से है? क्या इसका सम्बन्ध अत्यधिक भवन निर्माण से है?

क्या इसका सम्बन्ध हमारे निर्माणों में सीमेंट, काँच वगैरह के इस्तेमाल से है?

**नोट :** शोध करें और पता लगाएँ कि किस प्रकार अत्यधिक जनसंख्या, औद्योगिक प्रदूषण, कॉन्क्रीट के निर्माण तापमान को प्रभावित करते हैं।

## जाँच-पड़ताल - 8

**उद्देश्य :** समय के साथ होने वाले बदलावों पर ध्यान देना और उनका विश्लेषण करना।

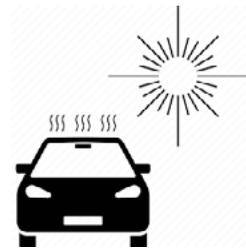
हममें से अधिकांश लोगों ने धूप में खड़ी कार, बस या ट्रेन में बैठने से होने वाली असुविधा को झेला है।

**सवाल पूछें :** विभिन्न धातुएँ किस प्रकार तापमान वृद्धि के प्रति प्रतिक्रिया करती हैं? किसी कार के भीतर कितनी गर्मी हो सकती है?

विद्यार्थी एक टिन के डिब्बे का उपयोग कर सकते हैं। उसे धूप में रखने से पहले उसका तापमान जाँच सकते हैं। उन्हें हर पाँच मिनट में तापमान मापकर परिणाम को दर्ज करने को कहें।

इस बात पर चर्चा करें कि डिब्बे के भीतर का तापमान कितनी जल्दी बढ़ गया है। बसों या ट्रेनों में यात्रा करते वक़्त या फिर उनका इन्तज़ार करते वक़्त, खासतौर पर गर्मियों में, पानी पीते रहने की ज़रूरत के बारे में बात करें।

**तथ्य :** एक औसतन 26°C तापमान वाले दिन धूप में खड़ी की गई कार के भीतर का तापमान सिर्फ़ 20 मिनट बाद 42°C तक जा सकता है। 40 मिनट बाद यह तापमान 47°C तक जा सकता है।



## जाँच-पड़ताल - 9

**उद्देश्य :** जलीय जीवन के लिए पानी के तापमान के महत्त्व को समझना।

चर्चा करें कि पानी का तापमान किस प्रकार जलीय जीवन को प्रभावित करता है। कुछ निश्चित प्रकार की मछलियाँ और जलीय जीवन समुद्र में बेहतर फलता-फूलता है और कुछ मछलियाँ और जलीय जीवन झीलों-तालाबों में बेहतर पनपता है। इनमें क्या अन्तर है? क्या समुद्र का पानी नदी के पानी से ज़्यादा गर्म होता है?

**पता लगाएँ :** मछलियों और व्हेलों आदि के लिए आवश्यक पानी के तापमान के बारे में पता लगाएँ।

**तथ्य :** हिन्द महासागर का बेसिन (द्रोणी) इस ग्रह पर महासागरों का सबसे गर्म बेसिन है और इसका तापमान  $28^{\circ}\text{C}$  तक पहुँच सकता है।

## जाँच-पड़ताल - 10

**उद्देश्य :** उस तापमान का अवलोकन करना जिस पर पेय पदार्थों को पिया जाता है।

हम सब पेय पदार्थों का मजा लेते हैं और हॉट चॉकलेट या गर्मागर्म कॉफी अध्ययन करने के लिए रोचक पेय पदार्थ हो सकता है। अपना मुँह जलाए बिना हम किस तापमान पर इन पेय पदार्थों को पी सकते हैं? किस तापमान पर इनका स्वाद अच्छा लगता है? उबलते दूध को ठण्डा हो जाने के लिए मुझे कितना इन्तज़ार करना पड़ेगा कि मैं उसे कोको के साथ पी सकूँ?

**तथ्य :** प्रसंगवश, इस बात पर चर्चा करें कि क्या दूध का क्वथनांक और पानी का क्वथनांक समान है। दूध का क्वथनांक पानी के क्वथनांक के काफ़ी करीब है ( $100.5^{\circ}\text{C}$ )।

विद्यार्थियों को उबलते पानी का तापमान मापने को कहें (दूध को कक्षा में गर्म करना मुश्किल होगा, लेकिन पानी की केतली को कक्षा में आसानी से गर्म किया जा सकता है) ताकि इस बात की जाँच हो सके कि यह  $100^{\circ}\text{C}$  के करीब होता है या नहीं। उन्हें हर 5 मिनट में तापमान की जाँच करने को कहें यह पता लगाने के लिए कि तापमान किस तरह बढ़ता-घटता है। विद्यार्थियों से नतीजों को एक रेखा ग्राफ़ पर दर्ज करने को कहें जिसमें समय को सैकेंडों में दिखाया गया हो (क्षैतिज अक्ष पर) और तापमान की मापों को डिग्री सेल्सियस में (ऊर्ध्वाधर अक्ष पर)। इस ग्राफ़ के बारे में उन्हें कौन-सी बात गौर करने लायक लगती है?

**पता लगाएँ :** बिस्किट/केक किस तापमान पर बेक किए जाते हैं?

**मज़ेदार गतिविधि :** विद्यार्थियों से ऐसे कुछ स्थानों के नाम बताने को कहें जो उनके मुताबिक स्कूल में सर्वाधिक गर्म स्थान हैं। वे इनमें से हर एक जगह एक बर्फ़ का छोटा टुकड़ा रख सकते हैं और उसके गलने के समय को माप सकते हैं।

## जाँच-पड़ताल - 11

**उद्देश्य :** उस तापमान का अवलोकन करना जिस पर पेय पदार्थों को पिया जाता है।

क्या पानी की बड़ी मात्रा पानी की छोटी मात्रा की तुलना में ज़्यादा जल्दी ऊष्मा को खोती है?

एक बड़े बर्तन में और एक छोटे बर्तन में गर्म पानी उड़ेलें। हर 5 मिनट में दोनों बर्तनों के तापमान की जाँच करें। ग्राफ़ बनाएँ। दोनों ग्राफ़ों में क्या फ़र्क है?

## जाँच-पड़ताल - 12

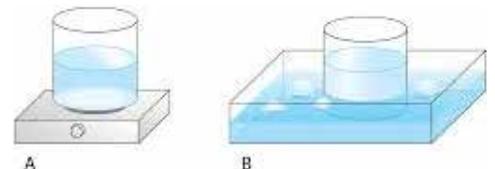
**उद्देश्य :** ऊष्मा स्थानान्तरण को समझना।

इस सवाल को उठाएँ कि किस तरह गर्म चीज़ों को जल्दी ठण्डा किया जा सकता है। अधिकांश विद्यार्थियों ने अपने माता-पिता को उबले आलुओं को ठण्डे पानी में रखते हुए या फिर गर्म दूध के गिलास को ठण्डे पानी के बर्तन में रखते हुए देखा होगा ताकि उनका तापमान कम किया जा सके।

प्रयोग के उद्देश्य से विभिन्न प्रश्न उठाए जा सकते हैं। उबलते गर्म पानी के कप को  $20^{\circ}\text{C}$  कम होने में कितना समय लगता है? अगर आप एक गर्म कप को बर्फ़ जैसे ठण्डे पानी में 5 मिनट रखें तो उसका तापमान कितना कम हो जाएगा?

गर्म पानी को एक कप (A) में रखें और उसके तापमान की जाँच करें। अब इस कप को थर्मामीटर सहित ठण्डे पानी व बर्फ़ के टुकड़ों से भरे एक बेसिन में रखें (B)।

विद्यार्थियों से गर्म पानी के तापमान में आए बदलाव पर ध्यान देने को कहें।



विद्यार्थियों से पूछें कि उन्हें पानी के तापमान के बारे में क्या बात नज़र आती है। क्या वह और गर्म हुआ या फिर ठण्डा, और या जैसे का तैसा रहा?

ठण्डे पानी का क्या हो रहा है? क्या वह गर्म हो रहा है?

इस बात को इंगित करें कि किस प्रकार ऊष्मा गर्म वस्तु से ठण्डी वस्तु की ओर स्थानान्तरित हो रही है। अगर पानी की ऊष्मा को किसी गिलास में जैसे का तैसा बनाकर रखना हो तो इसके लिए विद्यार्थी क्या-क्या कर सकते हैं?



## जाँच-पड़ताल - 13

**उद्देश्य : ऊष्मा के अवशोषण पर रंग के प्रभाव को समझना।**

विभिन्न रंगों का ऊष्मा के अवशोषण पर क्या प्रभाव पड़ता है?

विद्यार्थी एक जैसे आकार के 4 मर्तबान लें, इन्हें बराबर-बराबर मात्रा में पानी से भरें, उन्हें अलग-अलग रंग के कागज़ों (काला, गुलाबी, नीला और सफ़ेद) से ढँककर फिर उन्हें धूप में रखें। वे इस बात का पूर्वानुमान लगा सकते हैं कि किस मर्तबान का पानी सबसे गर्म होगा और किसका सबसे ठण्डा। क्या उनके पूर्वानुमान सही साबित हुए?

इसी से जुड़े एक अवलोकन पर चर्चा करें कि लोग गर्मियों में हल्के रंग के कपड़े क्यों पहनते हैं (पहले किए गए प्रयोग द्वारा पुष्ट) और ठण्ड में गहरे रंग के कपड़े क्यों पहनते हैं। विद्यार्थियों को समझाइए कि हल्के रंगों की तुलना में गहरे रंग सूर्य की रोशनी को ज़्यादा अवशोषित करते हैं। इसलिए गहरे रंग, हल्के रंगों की तुलना में धूप में ज़्यादा जल्दी गर्म हो जाते हैं।

## जाँच-पड़ताल - 14

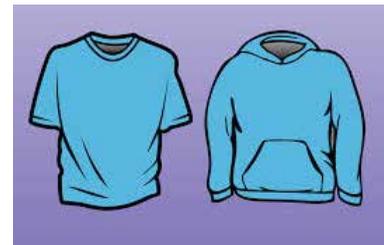
**उद्देश्य : तापमान को बनाए रखने में कपड़ों की भूमिका को समझना।**

चर्चा करें कि किसी ठण्डे दिन पर पहनने के लिए सबसे बेहतर क्या होता है? स्वेटर या टीशर्ट? विद्यार्थी इस बात पर तत्काल सहमत होंगे कि वे स्वेटर पहनेंगे।

ये सवाल उठाएँ, “क्या स्वेटर तापमान में गर्म होता है? अगर स्वेटर गर्म नहीं होता तो आपको गर्म रखने में वह किस प्रकार मददगार होता है?”

विद्यार्थियों को शारीरिक ऊष्मा, ठण्डी हवा के असर, किस प्रकार स्वेटर एक सुरक्षा परत प्रदान करता है, इस सबके बारे में संकेत दें।

मनुष्य अपने शरीर की गर्मी को बनाए रखने के लिए स्वेटरों या जैकेटों का उपयोग करते हैं। जानवर क्या करते हैं? क्या उन्होंने प्राकृतिक कोट और जैकेट विकसित कर लिए हैं? विद्यार्थियों ने ध्यान दिया होगा कि जानवरों पर कितने सारे बाल होते हैं, कुछ के फूले हुए पंख होते हैं, कुछ ऊन से ढँके होते हैं। चर्चा करें कि किस प्रकार चर्बी की मोटी परतें कुछ जानवरों को ठण्डे मौसम से बचाती हैं।



## जाँच-पड़ताल - 15

**उद्देश्य : घर पर उपयोग किए जाने वाले गर्म करने/रखने और ठण्डा करने/रखने वाले उपकरणों पर गौर करना।**

ठोस व तरल पदार्थों में ऊष्मा को बनाए रखने के विभिन्न तरीके कौन-से हैं? विद्यार्थियों को उन उपकरणों के उदाहरण बताने को कहें जिन्हें वे घरों में इस्तेमाल करते हैं। (गीज़र, हॉट वॉटर बॉटल, थर्मस फ्लास्क आदि।)

विद्यार्थियों को इन उपकरणों के बारे में सवाल गढ़ने के लिए प्रोत्साहित करें। उदाहरण के लिए, किसी गीज़र का अधिकतम तापमान क्या होता है? किसी इस्त्री (आयरन/प्रेस) पर तापमान की क्या श्रेणियाँ दी हुई होती हैं? आदि।

विद्यार्थी इस बात की खोज कर सकते हैं कि अतीत में लोग किस प्रकार फल-सब्जियों को सुरक्षित रखते थे? घर को गर्म/ ठण्डा रखने के लिए भवन निर्माणों में कौन-सी तकनीकों का इस्तेमाल किया जाता था?

तथ्य : तरल पारा  $-39^{\circ}\text{C}$  पर जम जाता है और  $357^{\circ}\text{C}$  पर उबलता है।

## जाँच-पड़ताल - 16

उद्देश्य : अत्यधिक और अत्यन्त कम तापमानों वाले स्थानों के बारे में जानना।

चर्चा करें कि लोग गर्मियों की गर्मी से निपटने के लिए क्या-क्या करते हैं? कुछ लोग सफ़र पर निकल जाते हैं और वे कहाँ जाते हैं?

अधिकांश लोग गर्मियों में ठण्डी जगहों पर जाना पसन्द करते हैं। हो सकता है दक्षिण भारत के लोग ऊटी या कुन्नूर जाना चाहें। उत्तर भारत के लोग उत्तराखण्ड या हिमाचल जा सकते हैं। अगर लोग उत्तर-पूर्वी भारत के निकट रहते हैं तो वे सिक्किम या दार्जिलिंग जा सकते हैं। ऊटी का तापमान  $25^{\circ}\text{C}$  से कम हो सकता है, हिमाचल में यह  $20^{\circ}\text{C}$  से  $25^{\circ}\text{C}$  के बीच हो सकता है, सिक्किम में तापमान  $22^{\circ}\text{C}$  के आस-पास हो सकता है। अगर लोग ऊपर हिमालय की तलहटी में या गंगोत्री (जहाँ से गंगा नदी की शुरुआत होती है) जाते हैं, तो वहाँ तापमान  $-1^{\circ}\text{C}$  हो सकता है। वहाँ उन्हें गर्म कपड़ों की जरूरत पड़ेगी! निश्चित रूप से उन्हें उस वक़्त भारत के अधिकांश स्थानों पर रहने वाले  $35^{\circ}\text{C}$  से  $45^{\circ}\text{C}$  तापमान के बेहद गर्म मौसम से काफ़ी राहत मिलेगी।



ये कुछ स्थान हैं, जहाँ जाया जा सकता है! ऐसे स्थानों पर कौन जाना चाहेगा?

- पूर्वी अंटार्कटिक पठार, अंटार्कटिका ( $-94^{\circ}\text{C}$ )
- अलास्का, संयुक्त राज्य अमरीका ( $-73^{\circ}\text{C}$ )
- ग्रीनलैंड ( $-69.6^{\circ}\text{C}$ )
- साइबेरिया, रूस ( $-67.7^{\circ}\text{C}$ ) (यहाँ स्कूल तभी बन्द होते हैं जब तापमान  $-55^{\circ}\text{C}$  से भी कम हो जाता है)
- यूकॉन क्षेत्र, कनाडा ( $-62.8^{\circ}\text{C}$ )

इन आँकड़ों के लिए बना रेखा ग्राफ़ कैसा दिखेगा, अगर उसे तापमानों के अवरोही क्रम (ज्यादा से कम होते) में बनाया जाए? क्या वह बाएँ से दाएँ नीचे उतर रहा होगा या बाएँ से दाएँ ऊपर चढ़ रहा होगा?

अगर तापमान इनमें से हर एक स्थान पर  $15^{\circ}\text{C}$  से बढ़ जाए तो रेखा ग्राफ़ की शकल किस प्रकार बदल जाएगी?

अगर इनमें से हर एक जगह तापमान  $2^{\circ}\text{C}$  गिर जाए तो रेखा ग्राफ़ की शकल किस प्रकार बदल जाएगी?

यहाँ भारत के दस सबसे गर्म स्थानों की सूची दी जा रही है। इनके तापमानों के बीच क्या अन्तर है? क्या आप इनमें से किसी स्थान पर रहते हैं? लोग गर्मी से बचने के लिए क्या-क्या उपाय करते हैं?

पता लगाएँ : दुनिया के पाँच सबसे गर्म स्थानों के नाम व तापमान।

### भारत के 10 सर्वाधिक गर्म स्थान

क्र.	स्थान	अधिकतम तापमान	क्र.	स्थान	अधिकतम तापमान
1.	दिल्ली	$44^{\circ}\text{C}$	2.	चुरू	$50^{\circ}\text{C}$
3.	श्रीगंगानगर	$50^{\circ}\text{C}$	4.	बिलासपुर	$49^{\circ}\text{C}$
5.	नागपुर	$48^{\circ}\text{C}$	6.	बाँदा	$48^{\circ}\text{C}$
7.	विजयवाड़ा	$45^{\circ}\text{C}$	8.	झाँसी	$47^{\circ}\text{C}$
9.	तितिलागढ़	$45.5^{\circ}\text{C}$	10.	फलोदी	$51^{\circ}\text{C}$

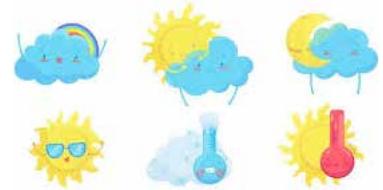
**प्रोजेक्ट :** मौसम विज्ञानी बनो!

**उद्देश्य :** किसी निश्चित अवधि के तापमानों में पैटर्न की तलाश करने और उनका विश्लेषण करने के लिए व्यवस्थित ढंग से तालिकाएँ बनाना और रिकार्ड रखना सीखने में विद्यार्थियों की मदद करना।

चर्चा करें कि मौसम विज्ञानी क्या करते हैं, वे किस तरह जानकारी इकट्ठा करते हैं और पैटर्नों की तलाश करते हैं। निश्चित वक्र पर दैनिक तापमानों को दर्ज करने और उनका वर्णन करने के लिए विद्यार्थियों को समूहों में विभाजित करना चाहिए। वे मौसम के अन्य चिह्नों को भी दर्ज कर सकते हैं। उनके द्वारा देखे गए पैटर्नों के आधार पर वे अगले दिन या हफ्ते के लिए पूर्वानुमान लगा सकते हैं। वे मानक मौसम रिपोर्टों के साथ अपने पूर्वानुमान की तुलना कर सकते हैं। उनके पूर्वानुमान वास्तविकता के कितने करीब थे?

विद्यार्थियों से एक चार्ट में रोज के मौसम को दर्ज करना/उसका वर्णन करना शुरू करने के लिए कहें। मापे गए तापमान और उजला, हवादार, बादलों से घिरा जैसे शब्दों का इस्तेमाल करें।

एक हफ्ते तक अखबार/मौसम की वेबसाइटों पर दिए जाने वाले दैनिक मौसम पूर्वानुमानों की तुलना वास्तविक स्थितियों से कीजिए। (दोनों आँकड़ों की तुलना करने के लिए दोनों को दिखाने वाला एक ग्राफ बनाइए।)

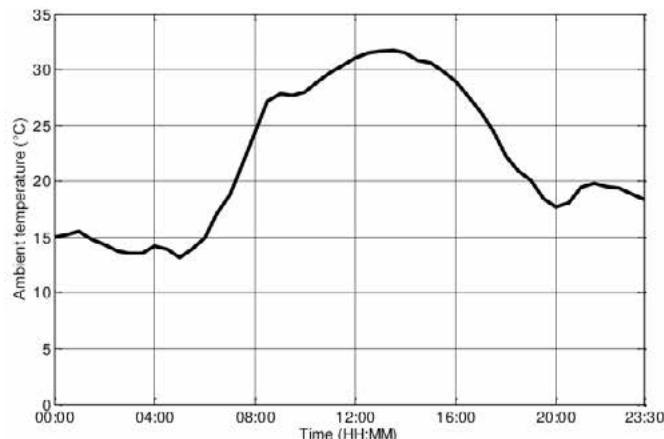


**चर्चा करें :** ऐसी कौन-सी परिस्थितियाँ होती हैं जहाँ हमें तापमान के सटीक मापों की ज़रूरत होती है?

## जाँच-पड़ताल - 17

**उद्देश्य :** तापमान के ग्राफों को समझना/समझाना।

ग्राफ दिखाते हैं कि दिन और रात के दौरान तापमान का क्या हुआ। किस समय पर तापमान बढ़ना शुरू हुआ? किस समय पर यह गिरना शुरू हुआ?

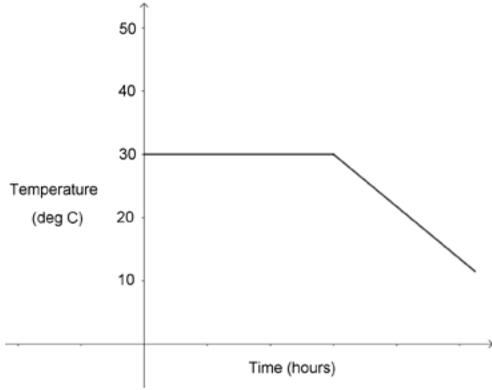


आगे दिए गए ग्राफों में से कौन-सा ग्राफ तापमान का स्थिर होना दिखाता है?

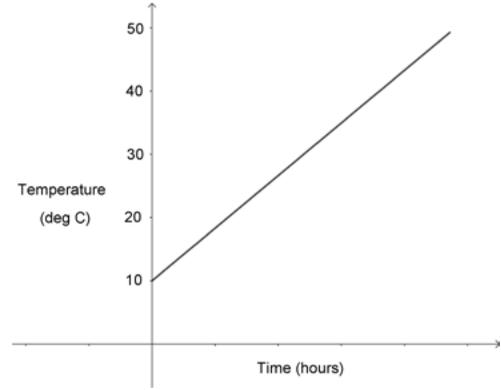
आगे दिए गए ग्राफों में से कौन-सा ग्राफ तापमान का स्थिर होना और फिर ठण्डा होना दिखाता है?

आगे दिए गए ग्राफों में से कौन-सा ग्राफ तापमान का गर्म होना दिखाता है?

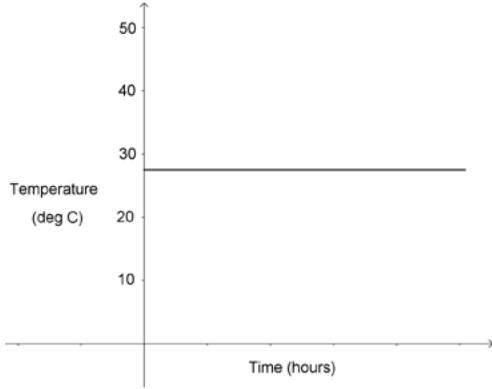
आगे दिए गए ग्राफों में से कौन-सा ग्राफ तापमान का स्थिर रहना और फिर गर्म होना दिखाता है?



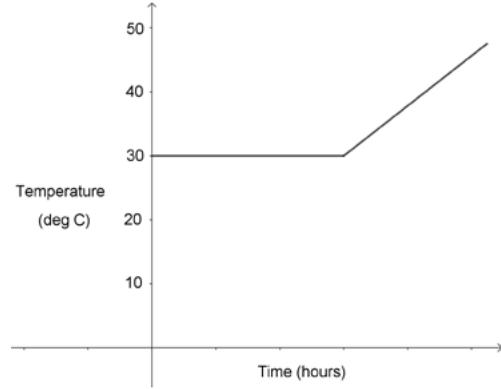
ग्राफ़ A



ग्राफ़ B

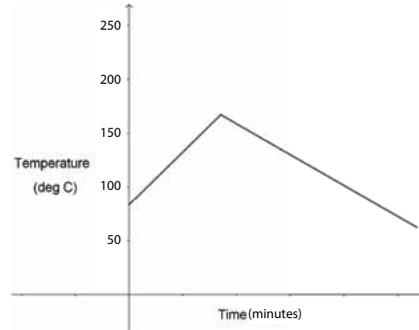
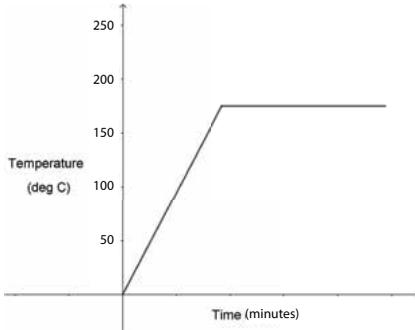


ग्राफ़ C



ग्राफ़ D

रूही केक बनाने के लिए अपने ओवन को पहले ही गर्म करती है। ओवन के गर्म होने के बाद वह बेकिंग के लिए ट्रे को ओवन में रख देती है। इनमें से कौन-सा ग्राफ़ इस प्रक्रिया के दौरान उसके ओवन के तापमान को दर्शाता है?



**चर्चा करें :** व्यक्तिगत जवाबदेही/जिम्मेदारी को समझना। “हम क्या कर सकते हैं? मैं कैसे मदद कर सकता हूँ?”

विश्व के बढ़ते तापमानों की वृद्धि के पीछे कई कारक शामिल हैं। शिक्षकों को विद्यार्थियों के साथ आयु-उपयुक्त स्तर पर ग्लोबल वार्मिंग के बारे में चर्चा करनी चाहिए।

हो सकता है उनकी छोटी उम्र में इस सबके बारे में ज़्यादा कुछ करना सम्भव न हो। लेकिन हम छोटी ही सही लेकिन महत्वपूर्ण चीज़ें करना शुरू कर सकते हैं ताकि हम इस समस्या में और योगदान न दें।

जब आप लाइटों, टीवी, कम्प्यूटर का उपयोग न कर रहे हों तो उन्हें बन्द कर दें। ऐसे किसी भी इलैक्ट्रॉनिक उपकरण का प्लग निकाल दें जिसे आप रिमोट से



चालू कर सकते हैं (टीवी, डीवीडी प्लेयर, लैपटॉप आदि)। ये उपकरण तब भी बिजली का उपयोग करते हैं जब वे 'बन्द' हों।  
एसी का उपयोग कम करें। जब गर्मी हो तो पंखों का उपयोग करें जो कम ऊर्जा खपत करते हैं। जब ठण्ड हो, तो ऊर्जा को बचाए रखने के लिए गर्म कपड़े पहनिए।

हर जगह कार से जाने के बजाय पैदल चलकर या फिर अपनी बाइक से जाएँ।

आप अपनी खुद की सब्जियाँ व फल उगाकर इस स्थिति में मदद कर सकते हैं।

आप एक पेड़ लगाकर मदद कर सकते हैं।

किराने के लिए फिर से उपयोग हो सकने वाले झोलों का प्रयोग करें।

आप जिस भी चीज़ का पुनः उपयोग कर सकते हैं, कीजिए।

जब भी सम्भव हो कम कागज़ का उपयोग कीजिए।

बोटलबन्द पानी के बजाय छाना हुआ पानी पीजिए। अपने पीने का पानी बार-बार उपयोग की जा सकने वाली बोटल में रखें। प्लास्टिक की पानी की बोटलें पर्यावरण के लिए विनाशकारी हैं!

ऐसा उत्पाद खरीदिए जिसमें पैकेजिंग की कम सामग्री लगी हो। अगर आप पैकेजिंग सामग्री को रीसाइकल (दोबारा प्रयोग) करें भी तो पहले तो उन्हें बनाने में ही ऊर्जा लगती है और फिर उनसे कुछ और बनाने में भी ऊर्जा लगती है।

तापमान जैसे विषयों के अध्ययन में प्रयोग, नतीजों के दस्तावेज़ीकरण, और आँकड़ों के विश्लेषण को प्रोत्साहित किया जाना चाहिए और इसे एक ऐसी समझ की ओर ले जाना चाहिए जो हमारी जीवनशैली में बदलावों के लिए एक प्रेरक शक्ति के रूप में काम करे।

## तापमान रज़ाई

तापमान रज़ाई आमतौर पर एक साल भर चलने वाला प्रोजेक्ट है जो किसी क्लास के विद्यार्थियों द्वारा किया जा सकता है, खासतौर पर तब जब वे इस पुलआउट में सुझाए गए ढंग से मिलते-जुलते ढंग में तापमान का अध्ययन कर रहे हों।

हर दिन, आप उस दिन के उच्चतम और न्यूनतम तापमानों को दर्शाने वाला एक पैबन्द बनाएँ। रंगों का व पैबन्द के पैटर्न का चुनाव पूरी तरह आप पर निर्भर करता है। ये पैबन्द या तो हाथ से या फिर सिलाई मशीन से सिले जा सकते हैं। तापमान का दायरा उस स्थान के आधार पर तय किया जाता है जिसके आँकड़ों का दस्तावेज़ीकरण किया जा रहा हो। उच्चतम और न्यूनतम तापमान को हर दिन एक ही समय पर दर्ज क्या जाना चाहिए।

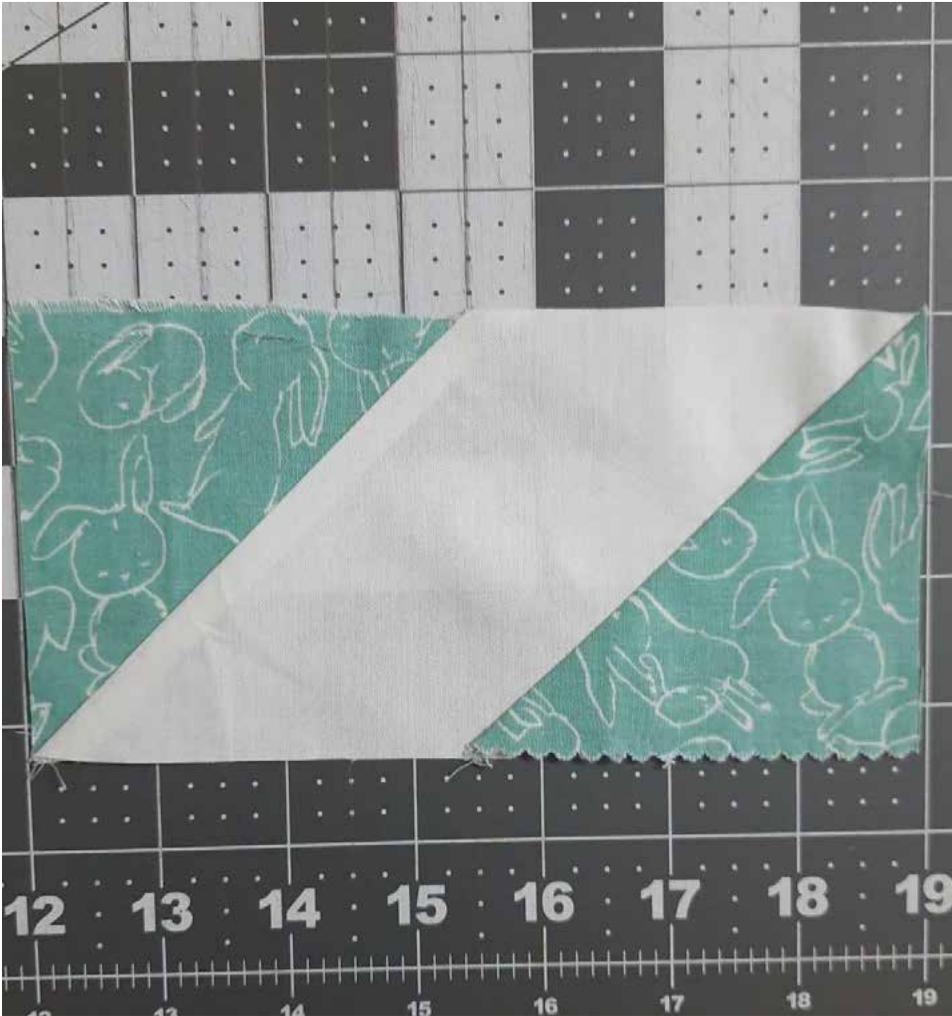
### चित्र-1 :

(तापमान) रज़ाई बनाने वाली चित्रा लक्ष्मीनारायण, जो चेन्नई में रहती है, ने चार्ट में दिखाए गए रंगों का चयन किया।

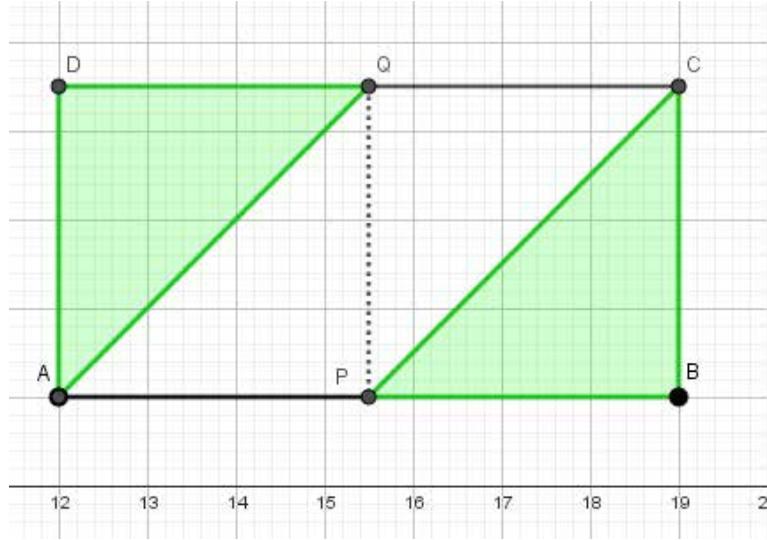


Each block  
Rectangle -  
7" x 3 1/2"  
Two Squares -  
3 1/2" x 3 1/2"

चित्र-2 : हर दिन का पैबन्द 3.5 इंच × 7 इंच का एक आयत था जो दो 3.5 इंच × 3.5 इंच के वर्गों से मिलकर बना था।



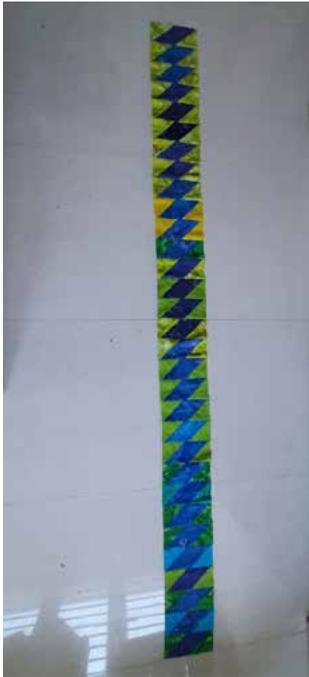
चित्र-2



चित्र-3

बीच में स्थित समान्तर चतुर्भुज AQCP दिन का न्यूनतम तापमान दिखाता है और कोनों में स्थित त्रिभुज ADQ तथा PCB दिन का उच्चतम तापमान दिखाते हैं। आपको कितने सर्वांगसम त्रिभुज दिखाई दे रहे हैं? रजाई बनाने वाले ने दोनों रंगों (हरा और सफ़ेद) के 3.5 इंच × 3.5 इंच वर्ग काटे, और फिर इनसे अर्ध-वर्ग त्रिभुजों को बनाया, जिन्हें फिर आपस में सिलकर विषम त्रिभुज वाले वर्ग बनाए। फिर इन वर्गों को मिलाकर एक 3.5 इंच × 7 इंच का आयत बनाया।

अन्त में, हर महीने के आयतों को आपस में सिलकर एक पट्टी बनाई और फिर साल के अन्त में इन पट्टियों को मिलाकर चित्र-4 में दिखाई गई सुन्दर रजाई तैयार की गई है।



चित्र-4



चित्र-5a



चित्र-5b

चित्र-5 में गीता श्रीनिवासन द्वारा बनाई गई दो तापमान रज़ाइयाँ दिखाई गई हैं। उन्होंने चेन्नई के तापमान (चित्र-5a) और शैफील्ड, यूके (चित्र-5b) के तापमान का दस्तावेज़ीकरण किया। पैबन्द के आकार-आकृति, पैबन्द के भीतर के ज्यामितीय पैटर्न, और रंगों के चुनाव में अन्तर पर ध्यान दीजिए।

तापमान रज़ाइयाँ आँकड़ों का दस्तावेज़ीकरण करने और रचनात्मकता व नवाचार को स्थान देने का एक नूतन तरीका हैं। रज़ाई बनाने वाले भी इतिहासकार होते हैं!

**टिप्पणी :** यहाँ दिखाई गई सभी रज़ाइयाँ द स्क्वेयर इंच, चेन्नई में तैयार की गई हैं।



पद्मप्रिया शिराली

पद्मप्रिया शिराली वैली स्कूल (बेंगलूरु) और ऋषि वैली (आन्ध्र प्रदेश) स्थित कम्युनिटी मैथ सेंटर का हिस्सा हैं, जहाँ वे 1983 से काम कर रही हैं। वे गणित, कम्प्यूटर एप्लीकेशंस, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू जैसे विभिन्न विषय पढ़ाती रही हैं। 1990 के दशक में, उन्होंने दिवंगत श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ मिलकर काम किया। वह उस टीम का हिस्सा थीं जिसने ऋषि वैली रूरल सेंटर के 'स्कूल इन ए बॉक्स' नाम से जाने जाने वाले बहुकक्षा प्रारम्भिक शिक्षा कार्यक्रम को तैयार किया। वह वर्तमान में एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तक विकास समूह का हिस्सा हैं। पद्मप्रिया से [padmapriya.shirali@gmail.com](mailto:padmapriya.shirali@gmail.com) पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : भरत त्रिपाठी

पुनरीक्षण : प्रतिका गुप्ता

# अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी

## एट राइट एंगल्स

स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

गणित और गणित शिक्षा पर एक गहन,  
गम्भीर पत्रिका।

शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों और  
विषय से जुड़े विद्यार्थियों के लिए।

### इस पत्रिका में, शिक्षक :

- कक्षा में या अन्यत्र उपयोग के लिए संसाधनों तक पहुँच सकते हैं
- ऐसे गणितीय विषयों के बारे में भी पढ़ सकते हैं, जो सम्भवतः नियमित स्कूली पाठ्यक्रम में नहीं होते हैं
- अपने स्वयं के लिखे लेख भेज सकते हैं
- पत्रिका के माध्यम से अन्य लोगों के साथ बातचीत कर सकते हैं, और अपनी अनसुलझी समस्याओं को हल कर सकते हैं
- अपने मूल अवलोकन और खोजों को साझा कर सकते हैं
- स्कूल स्तर के गणित के विभिन्न पहलुओं के बारे में लिख सकते हैं और चर्चा कर सकते हैं।

आप एट राइट एंगल्स यहाँ से प्राप्त कर सकते हैं :

### प्रकाशक :

अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय

### निःशुल्क सदस्यता लें

<https://azimpremjiuniversity.edu.in/at-right-angles>

इस लिंक पर एट राइट एंगल्स के हाई-रेज और लो-रेज संस्करण निःशुल्क डाउनलोड के लिए उपलब्ध हैं। अलग-अलग लेख भी नीचे दी गई लिंक से डाउनलोड किए जा सकते हैं

<https://bit.ly/AtRightAnglesrepositor>

### फेसबुक पर

<https://www.facebook.com/groups/829467740417717/>

AtRiUM (एट राइट एंगल्स, अस एंड मैथ) पत्रिका का फेसबुक पेज है।

यह ई-स्पेस में हमारे पाठकों को जोड़ने के

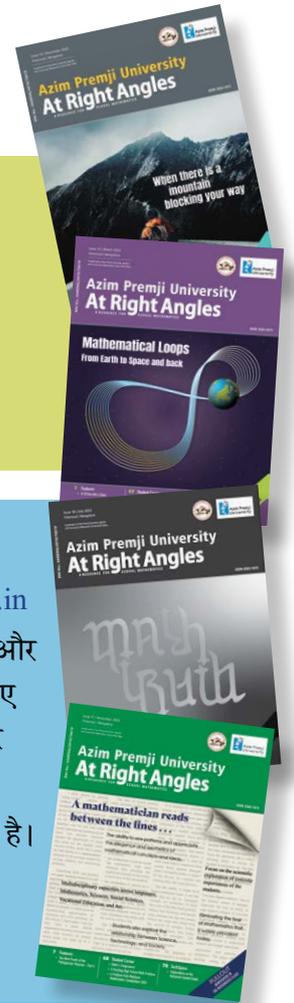
लिए एक मंच के रूप में कार्य करता है। शिक्षक, विद्यार्थी, शिक्षक-प्रशिक्षक, भाषाविद् और शिक्षाशास्त्र के विशेषज्ञ इस समुदाय का हिस्सा हैं, इस कारण से इसकी पोस्ट में विविधता है और चर्चाएँ भी गम्भीर और गहन होती हैं।

### ई-मेल पर

[AtRightAngles.editor@apu.edu.in](mailto:AtRightAngles.editor@apu.edu.in)

हम इस ईमेल आईडी पर आपके लेखों और राय का स्वागत करते हैं। लेख भेजने लिए नीति और दिशा-निर्देश पत्रिका के अन्दर दिए गए हैं।

आपकी प्रतिक्रिया हमारे लिए महत्वपूर्ण है। हमें अवश्य लिखें।



Azim Premji University  
Survey No. 66, Burugunte Village,  
Bikkanahalli Main Road, Sarjapura  
Bengaluru – 562125

[azimpremjiuniversity.edu.in](http://azimpremjiuniversity.edu.in)

Facebook: /azimpremjiuniversity

Instagram: @azimpremjiuniv

X: @azimpremjiuniv