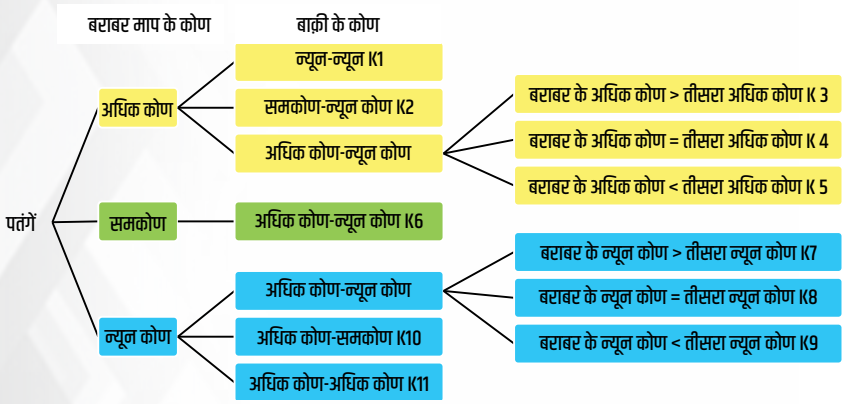
पतंग परिवार : एक वंशवृक्ष की जाँच-पड़ताल!

पीछे दिए गए पोस्टर के मुताबिक़ पतंगें 11 प्रकार (समचर्तुभुज के अलावा) की होती हैं।

यह पोस्टर आपके विद्यार्थियों को पंतग के इन 11 प्रकारों से दोस्ती करने में मदद करेगा। विद्यार्थियों को इसका अध्ययन करने और K1, K2… K11 में से प्रत्येक पतंग के गुणों को खोजने के लिए समय दें। कुछ महत्त्वपूर्ण बिन्दु नीचे दिए गए हैं। चर्चा के दौरान विद्यार्थी निश्चित रूप से इन या अन्य बिन्दुओं के बारे में बताएँगे, अगर वे नहीं बताते हैं, तो अपने विवेक के अनुसार इन्हें साझा करें।

क. सममिति रेखा के दोनों ओर

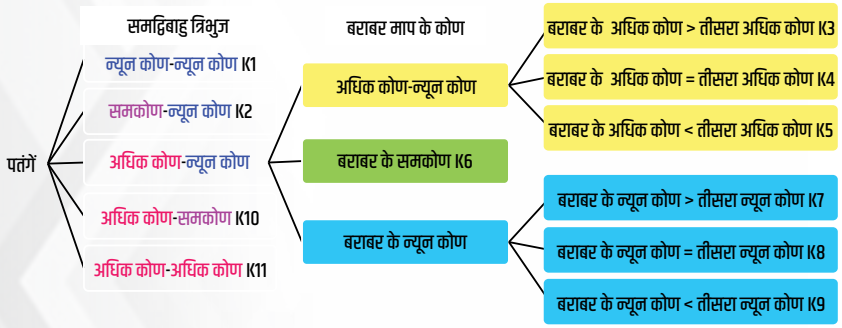


समचतुर्भुज के लिए दो सम्भावनाएँ :

i. अधिक कोण-न्यून कोण, अर्थात एक ग़ैर-वर्गाकार समचतुर्भुज

ii. समकोण, अर्थात वर्गाकार

ख. दो समद्विबाहु त्रिभुजों के योग के रूप में



समचतुर्भुज : विकर्ण के चयन के आधार पर अधिक कोण-अधिक कोण या न्यून कोण-न्यून कोण।

वर्ग : समकोण-समकोण।

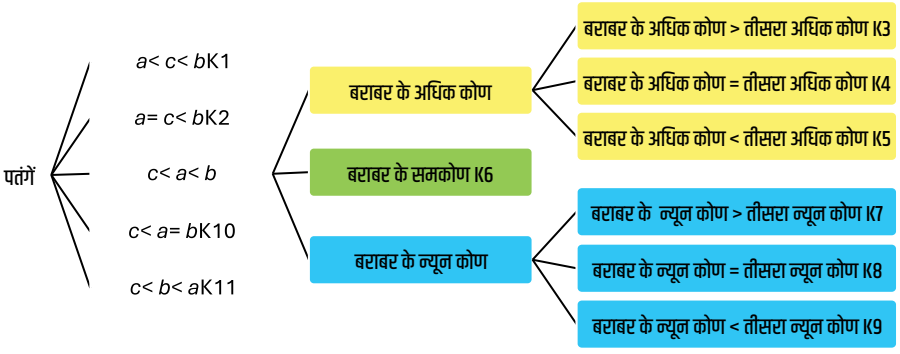
की-वर्ड : *समचतुर्भुज, पतंग, गुण, कोण, वर्गीकरण, जाँच-पड़ताल*

ग. कोण के आधार पर

यह वर्गीकरण हूबहू 'क' जैसा ही होता है।

K6 एक मात्र चक्रीय पतंग है जिसके चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित हैं।

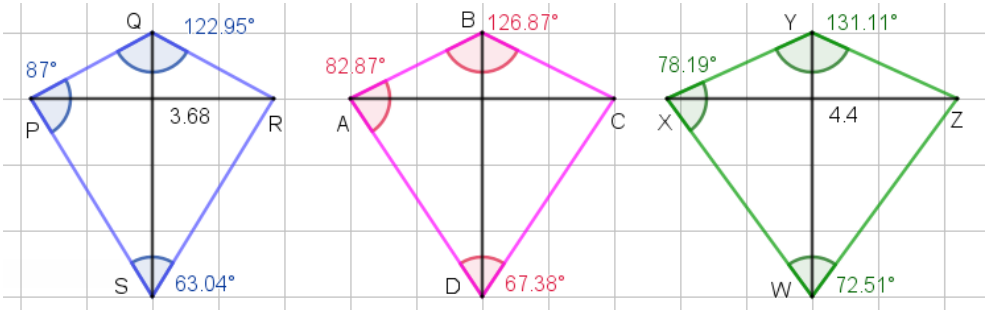
घ. विकर्ण के आधार पर



K1, K2... K6 के मामले में पतंग को दो भागों में विभाजित करने वाला विकर्ण लम्बा है।

K8 (यदि वर्गाकार न हो), K9 … K11 में विकर्ण छोटा है।

K7 बराबर के न्यून कोण > तृतीय न्यून कोण के साथ, ABCD, PQRS, XYZW चतुर्भुज हैं।

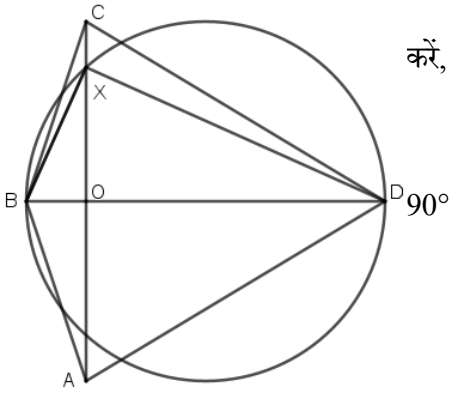


QS = 4 > PR = 3.68 BD = AC = 4 YW = 4 < XZ = 4.4

चित्र-1

प्रमाण (Proof) :

AB = BC और AD = DC वाली पतंग ABCD पर विचार करें, जिसमें विकर्ण AC = BD, बिन्दु O पर काटते हों।



चित्र-2

$\angle BCD < 90°$ दर्शाने के लिए BD व्यास वाला वृत्त बनाइए।

मान लीजिए यह वृत्त, रेखा OC को बिन्दु X पर काटता है। $\angle BXD =$ क्योंकि यह अर्धवृत्त में बनने वाला एक कोण है।

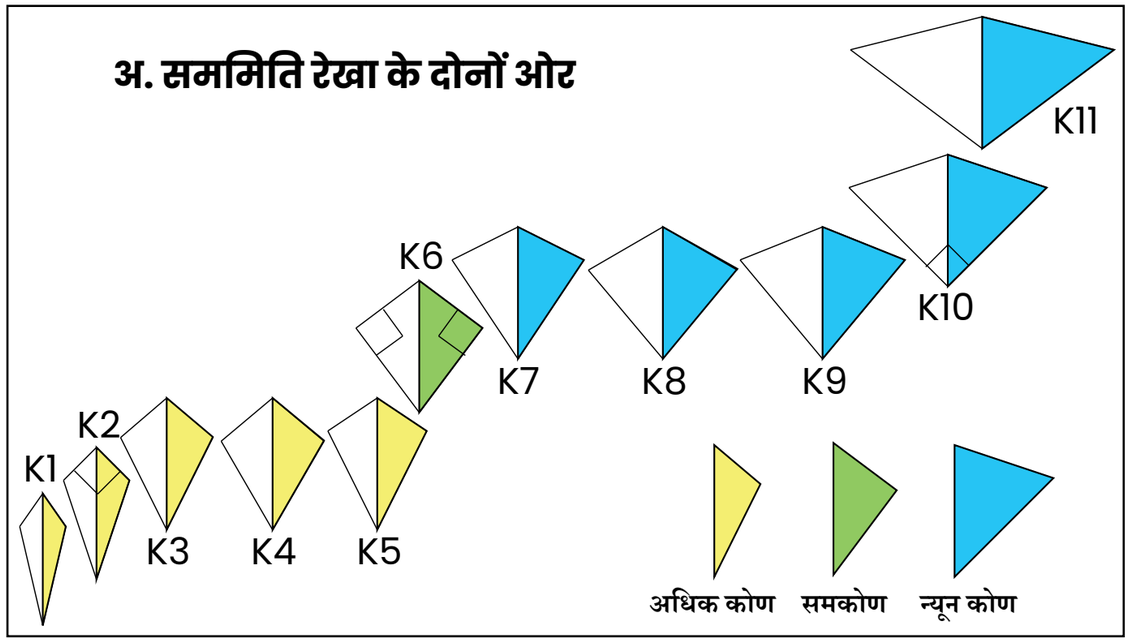
$\angle BCO + \angle XBC = \angle BXO$ (दो विपरीत आन्तरिक कोणों का योग बाह्य कोण के बराबर होता है)

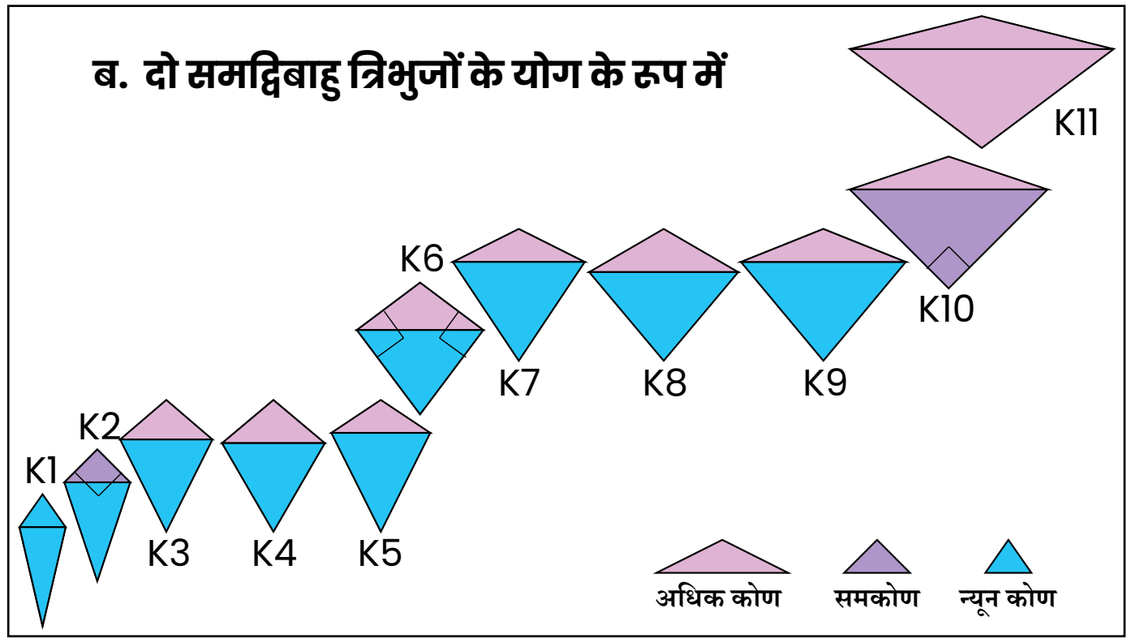
$\Rightarrow \angle BCO < \angle BXO$

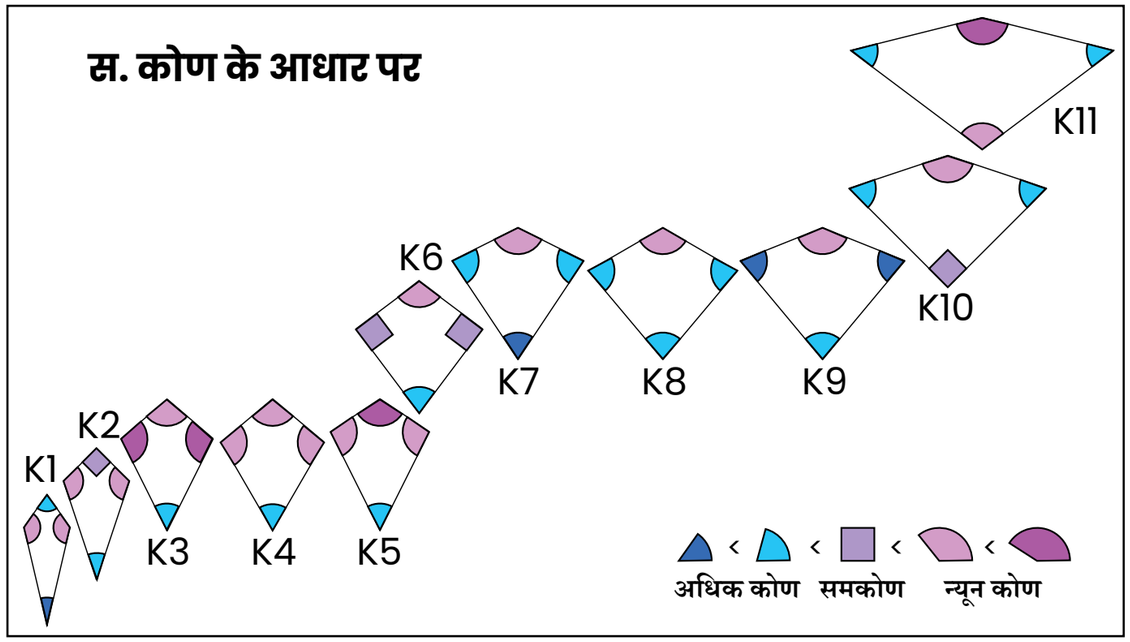
इसी प्रकार, $\angle DCO < \angle DXO$

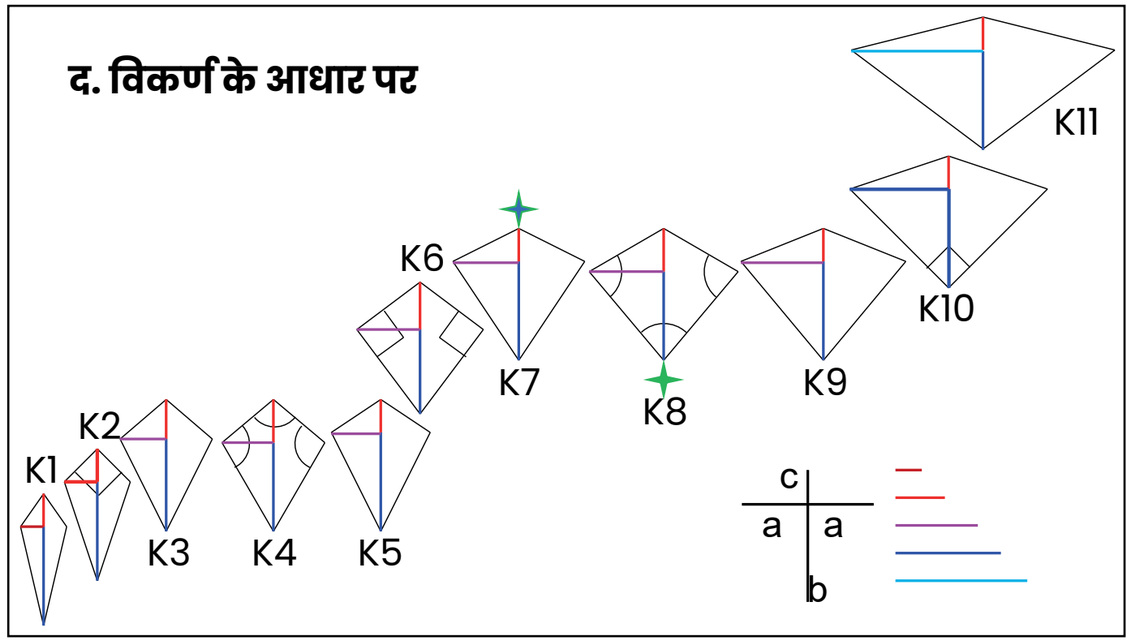
$\therefore \angle BCD = \angle BCO + \angle DCO < \angle BXO + \angle DXO = \angle BXD = 90°$

पतंग परिवार









इन चित्रों के अनुसार पतंगों के 11 प्रकार हैं (समचर्तुभुज के अलावा)। 2 समकोण वाली K6 एक विशेष पतंग है, क्यों? क्या आप K1, K2,… K11 में से प्रत्येक की विशेषता बता सकते हैं? क्या आप कोण या भुजा-विकर्ण निर्दिष्ट करके इन 11 श्रेणियों में से प्रत्येक के लिए एक पतंग का रेखाचित्र बना सकते हैं? क्या आप प्रत्येक श्रेणी के लिए एक से अधिक पतंग बना सकते हैं?

क्या पतंगों को दो भागों में बाँटने वाला विकर्ण (सममिति की रेखा) हमेशा सबसे लम्बा होता है? 'विकर्ण के आधार पर' में, सितारों से चिह्नित 2 श्रेणियों में, विकर्ण बराबर हो सकते हैं। ब्लू स्टार श्रेणी K6 में तीनों प्रकार की पतंगें शामिल हैं (i) पतंग को दो भागों में बाँटने वाला विकर्ण सबसे लम्बा, (ii) विकर्ण बराबर और (iii) पतंग को दो भागों में बाँटने वाला विकर्ण सबसे छोटा। ग्रीन स्टार श्रेणी K8 में पतंग को दो भागों में बाँटने वाले विकर्ण लम्बे होते हैं और जब विकर्ण बराबर होते हैं, तो यह एक वर्ग बन जाता है!

यहाँ कुछ प्रश्न दिए गए हैं जिनके बारे में विद्यार्थी जाँच-पड़ताल कर सकते हैं।

अ. सममिति रेखा के दोनों ओर

1. प्रत्येक पतंग में कौन-सी रेखा सममिति रेखा है?
2. इसे सममिति रेखा क्यों कहा जाता है?
3. सममिति रेखा से बनने वाले त्रिभुजों पर विचार करें। इन त्रिभुजों के आधार पर, आप K1, K2,… K11 को कितने प्रकार के समूहों में वर्गीकृत कर सकते हैं? ये समूह कौन-कौन से हैं?
4. ये समूह पतंग के बराबर-बराबर (और विपरीत) कोणों के जोड़े को वर्गीकृत करते हैं। क्या प्रत्येक समूह के भीतर उपसमूह हो सकते हैं? ये उपसमूह किसे वर्गीकृत करते हैं?
5. वैकल्पिक : क्या आप एक वृक्ष-चित्र बना सकते हैं?
6. यदि हम पतंगों की बजाय समचतुर्भुजों पर विचार करते हैं, तो सममिति रेखा द्वारा बनाए गए त्रिभुजों को ध्यान में रखते हुए कितनी सम्भावनाएँ बनती हैं?

ब. दो समद्विबाहु त्रिभुजों के योग के रूप में

1. कोई भी पतंग लें। दो समद्विबाहु त्रिभुजों की उभयनिष्ठ भुजा पर विचार करें। यह भुजा पतंग से किस प्रकार सम्बन्धित है?
2. सभी सम्भावित समद्विबाहु त्रिभुजों पर विचार करें – न्यून कोण, समकोण, अधिक कोण। सम्भावित संयोजन क्या हैं जो निम्न आकृतियाँ उत्पन्न करते हैं :

   क. पतंग

   ख़. समचतुर्भुज

   ग. क्या कोई अन्य विशेष चतुर्भुज सम्भव है? चतुर्भुज का प्रकार भी बताएँ?
3. ऐसी प्रत्येक पतंग के बराबर वाले कोण (न्यून कोण/समकोण/अधिक कोण) क्या होंगे?
4. 2क में वर्गीकरण के आधार पर K1, K2,… K11 को वर्गीकृत करें। क्या आप K1, K2,… K11 के अलावा कोई पतंग खोज सकते हैं?

स. कोण के आधार पर

1. किसी भी पतंग में सबसे बड़े कोण का चुनाव कर लें। यह किस प्रकार का कोण है?
2. सबसे छोटा कोण किस प्रकार का है?
3. पतंग में बराबर और विपरीत कोणों की एक जोड़ी होती है। इस जोड़ी के आधार पर कितने प्रकार की पतंगें होती हैं?
4. K2 का हल्का नीला कोण, K7 के गहरे नीले कोण से कम क्यों है?
5. क्या आप कोणों के आधार पर विभिन्न प्रकार की पतंगों को वर्गीकृत करते हुए, एक वृक्ष-चित्र बना सकते हैं? इस चार्ट पर K1, K2,… K11 में से प्रत्येक पतंग का स्थान कहाँ होगा, यह इंगित करें।
6. क्या आप K1, K2,… K11 में से प्रत्येक पतंग के लिए उदाहरण दे सकते हैं? उदाहरण के लिए, K6 : 120°-90°-90°-60°
7. क्या आप K1, K2,… K11 के अलावा किसी भी कोण संयोजन वाली पतंग बना सकते हैं?
8. K6 पतंग बनाएँ। विकर्ण (या सममिति की रेखा) की लम्बाई को व्यास के रूप में लेते हुए एक वृत्त बनाएँ। आप क्या देखते हैं? क्या आप K1, K2,... K5 या K7, K8,... K11 के लिए भी यही देखते हैं?

द. विकर्ण के आधार पर

1. विकर्ण a, b और c के भागों के सन्दर्भ में K1, K2,… K11 में से प्रत्येक का वर्णन करें। उदाहरण के लिए, K2 : $a = c < b$
2. अपनी पसन्द के a, b और c का उपयोग करके K1, K2,… K11 में से प्रत्येक के लिए पतंग बनाएँ। सुनिश्चित करें कि $b > c$ है।
3. K1, K2,... K6 के लिए कौन-सा विकर्ण लम्बा है? K1, K2,…और K11 के लिए कौन-सा विकर्ण लम्बा है? क्यों?
4. यदि पतंग के विकर्ण बराबर हैं, तो a, b और c के बीच सम्बन्ध ज्ञात करें।
5. अब निम्न निर्देशों के अनुसार तीन K7 पतंगें बनाएँ :

   (i) पतंग को दो भागों में बाँटने वाले विकर्णों में एक विकर्ण दूसरे से लम्बा है

   (ii) दोनों विकर्ण बराबर हैं

   (iii) पतंग को दो भागों में बाँटने वाले विकर्णों में एक विकर्ण दूसरे से छोटा है
6. चुनौती : साबित करें कि अगर पतंग के विकर्ण बराबर हैं, तो समान (और विपरीत) कोण न्यून कोण होने चाहिए।

मैथ स्पेस अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय की एक गणित प्रयोगशाला है जो स्कूलों, शिक्षकों, अभिभावकों, बच्चों, स्कूली शिक्षा और शिक्षक प्रशिक्षकों के साथ काम करने वाले ग़ैर-सरकारी संगठनों को सेवाएँ प्रदान करती है। यह गणित के लिए सीखने-सिखाने की विभिन्न सहायक सामग्री [mat(h)erials] और साथ-साथ कम लागत वाले संस्करणों की सम्भावना की खोज करती है जिन्हें कबाड़ से बनाया जा सकता है। यह दोनों, गणित से डरने या नफ़रत करने वालों, साथ-ही-साथ गणित प्रेमियों, को सम्बोधित करने का प्रयास करती है। यह एक ऐसा स्थान है जहाँ कई लोगों के साथ चर्चा के माध्यम से विचार उत्पन्न होते हैं और विकसित होते हैं। मैथ स्पेस को आप mathspace@apu.edu.in पर लिख सकते हैं।

अनुवाद : यशोधरा कनेरिया **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय