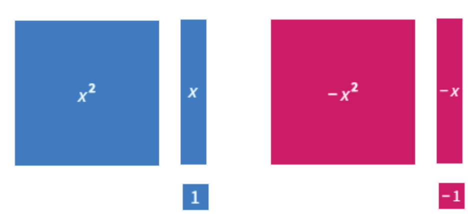
बीजगणितीय टाइल्स की समीक्षा

मैथ स्पेस

बीजगणितीय टाइल्स द्विविमीय आधार आधार-10 ब्लॉक्स का सामान्य रूप हैं। ये फ्लैट्स-लॉन्स-यूनिट्स (flats-longs-units) या एफ़एलयू (FLU) के नाम से लोकप्रिय हैं। *एट राइट एंगल्स* के मार्च, 2024 अंक में इनकी समीक्षा की गई थी [5]। आसान शब्दों में कहें तो, दस का सामान्यीकरण "x" के रूप में निम्नांकित ढंग से होता है, जिससे तीन बुनियादी बीजगणितीय टाइलें बनती हैं (अनुशंसित माप : $x \rightarrow 2$ इंच और $1 \rightarrow 2$ सेमी) :

- बड़ा वर्ग, यानी फ्लैट या 100, x^2 बन जाता है ($x \times x$ या 2 इंच × 2 इंच)
- आयत, यानी लॉन्ग या 10, x बन जाता है ($x \times 1$ या 2 इंच × 2 सेमी)
- छोटा वर्ग, यानी यूनिट या 1 वैसा ही रहता है (1×1 या 2 सेमी × 2 सेमी)

लेकिन एक महत्त्वपूर्ण अन्तर यह है कि बीजगणितीय टाइलें दो (अलग-अलग) रंगों में आती हैं ताकि धनात्मक और ऋणात्मक रूपों, यानी कि x^2 और $-x^2$, x और $-x$, 1 और -1 को दर्शाया जा सके, जैसा कि **चित्र-1** में दिखाया गया है। अधिकांश आभासी [virtual] (और ऑनलाइन) रूप माप के आधार पर धनात्मक टाइलों को अलग-अलग रंगों में दिखाते हैं, लेकिन सभी ऋणात्मक टाइलों को एक ही रंग में दिखाते हैं। तार्किक नज़रिए से देखें तो, यदि सभी ऋणात्मक टाइलें एक ही रंग की हैं, तो सभी धनात्मक टाइलें भी एक ही रंग की होनी चाहिए। मैथिगोन पॉलीपैड (Mathigon Polypad) में आप सभी धनात्मक टाइलों को समान रंग का बना सकते हैं (**चित्र-1**)। एक और विकल्प यह है कि टाइलों को दुतरफ़ा (double-sided) बनाया जाए ताकि उनके एक तरफ़ की सतह धनात्मक टाइल को दर्शाए, जबकि दूसरी सतह ऋणात्मक टाइल को। दुतरफ़ा टाइलों के कई फ़ायदे हैं, जैसे कि :



चित्र-1

1. इन्हें ऐसे किसी भी डिब्बे से आसानी-से बना सकते हैं, जिसकी अन्दर की सतह बाहरी सतह से स्पष्ट रूप से अलग हो।
2. धनात्मक और ऋणात्मक टाइलों के लिए दो अलग-अलग सेट बनाने की बजाय टाइलों का एक ही सेट बनाना होता है।

की-वर्ड : *TLM; मॉडलिंग; बीजगणितीय टाइल्स; प्रस्तुतीकरण; गणितीय संक्रियाएँ*

3. शिक्षण के दृष्टिकोण से देखें, तो ये काफ़ी प्रभावी होती हैं क्योंकि किसी टाइल को पलटने या उलटने से उसका चिह्न धनात्मक से ऋणात्मक या ऋणात्मक से धनात्मक में बदल जाता है। इसलिए टाइल को पलटना चिह्न बदलने के समान होता है। यह घटाव को समझाने के लिए बहुत उपयोगी होता है।

चूँकि बीजगणितीय टाइलों में ऋणात्मक टाइलें भी शामिल होती हैं, इसलिए पूर्णांकों (integers) की समझ बहुत महत्त्वपूर्ण है (देखें [6]), ख़ासकर इन बातों की :

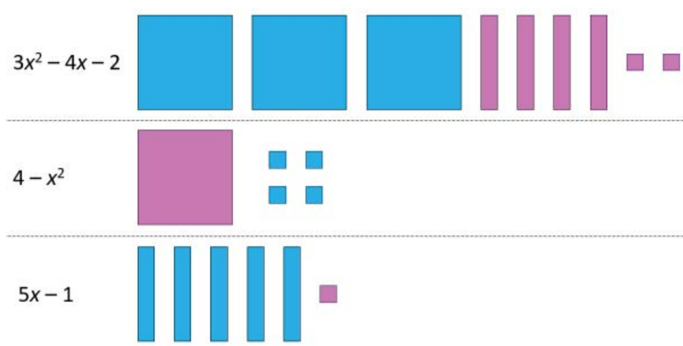
क. शून्य-युग्म (zero-pairs) : 1 और 1-, x और $-x$, x^2 और $-x^2$ जिन्हें ज़रूरत के हिसाब लाया या हटाया जा सकता है, क्योंकि ऐसा करने से व्यंजक (expression) नहीं बदलता।

ख. किसी राशि को घटाना उस राशि के योज्य प्रतिलोम (additive inverse) को जोड़ने के तुल्य होता है। उदाहरण के लिए, 13, -7, $5x$ और $-2x^2$ को घटाना क्रमश: -13, 7, $-5x$ और $2x^2$ को जोड़ने के समान ही है।

ग. धनात्मक × ऋणात्मक और ऋणात्मक × धनात्मक दोनों ही ऋणात्मक होते हैं।

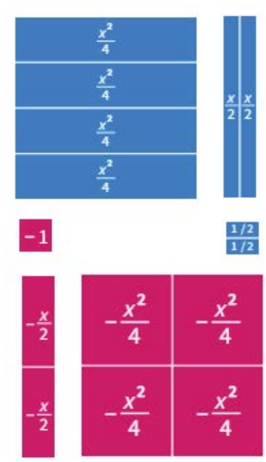
घ. ऋणात्मक × ऋणात्मक, धनात्मक होता है।

तीन मापों की इन 6 टाइलों के ज़रिए हम (i) एक चर (variable) वाले (ii) 2 की घात (degree) वाले (iii) पूर्णांक गुणांकों (integer coefficients) वाले किसी भी बहुपद (polynomial) को दर्शा सकते हैं। **चित्र-2** में ऐसे कई बहुपदों को दर्शाया गया है, जहाँ नीला रंग धनात्मक टाइलों को और गुलाबी रंग ऋणात्मक टाइलों को इंगित करता है। ध्यान दीजिए कि $4 - x^2$ असल में $4 + (-x^2)$ और $5x - 1$ दरअसल $5x + (-1)$ है। इसीलिए हमें ऋणात्मक टाइलों की ज़रूरत होती है।



चित्र-2

अलबत्ता, सामान्य बीजगणितीय टाइलों से भिन्न संख्याओं को नहीं दर्शाया जा सकता। हालाँकि मैथिगॉन पॉलीपैड में टाइलों को आधा करके $x/4$, $x^2/2$, 1/8 आदि को दर्शाया जा सकता है। लेकिन टाइलों को केवल आधा (आड़े या खड़े में) किया जा सकता है। इसलिए $x/3$, $x^2/5$, 6/1 आदि को दर्शाना सम्भव नहीं है (**चित्र-3**)।



चित्र-3

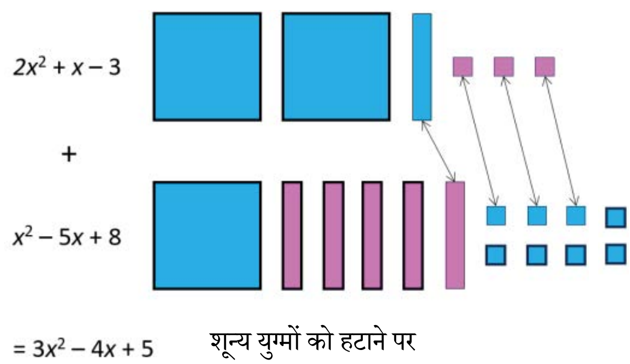
FLU और बीजगणितीय टाइलों के बीच एक और महत्त्वपूर्ण अन्तर यह है कि बीजगणितीय टाइलों में लेन-देन नहीं किया जा सकता। FLU के मामले में, यह एक जाना-माना तथ्य है कि 10 इकाइयाँ मिलकर एक लॉन्ग बनाती हैं और 10 लॉन्ग्स मिलकर एक फ्लैट बनाते हैं। हालाँकि बीजगणितीय टाइलों के मामले में, चूँकि x एक अज्ञात राशि है या इसके कई मान हो सकते हैं और हम नहीं जानते कि कितने 1 मिलकर x के बराबर हैं। इसलिए टाइलों के बीच किसी तरह का लेन-देन नहीं हो सकता। यह ऐसा ही है जैसे कि किसी बहुपद के पदों को एक पद में नहीं बदला जा सकता। इस प्रकार, टाइलों का उपयोग इस अवधारणा को पुख़्ता करता है कि बहुपदों, जैसे कि $3x^2 - 2x - 5$ को और सरलीकृत नहीं किया जा सकता।

जब हम बीजगणितीय टाइलों का उपयोग करके बहुपदों को दर्शाते हैं, तो कुछ चीज़ें अपने-आप स्पष्ट हो जाती हैं :

- x^2 को 'x का वर्ग' क्यों कहते हैं और यह ज्यामितीय वर्ग से कैसे सम्बन्धित है।

- x^2 और $2x$ के बीच का अन्तर। चूँकि x^2 यानी कि $x \times x$ को एक वर्गाकार टाइल से दर्शाया जाता है और $2x$ यानी कि $x + x$ को दो आयताकार टाइलों से।
- समान पदों की अवधारणा – एक ही माप की टाइलों को गिना जा सकता है, यहाँ तक कि शून्य-युग्मों (zero pairs) को हटाया भी जा सकता है, लेकिन अलग-अलग मापों की टाइलों को मिलाकर एक पद के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता।

चूँकि x और 1 के बीच का सम्बन्ध अज्ञात है, इसलिए बीजगणितीय टाइलों के ज़रिए दो बहुपदों की तुलना करने का कोई तरीक़ा नहीं है। अलबत्ता, हम दो बहुपदों का जोड़ या घटाव कर सकते हैं, बशर्ते कि उन्हें टाइलों द्वारा दर्शाना सम्भव हो।



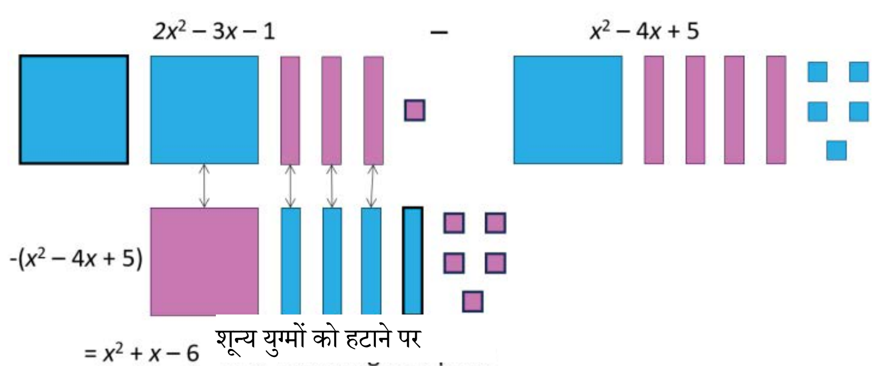
चित्र-4

बीजगणितीय टाइलों का उपयोग करके बहुपदों को जोड़ने के नियम वही हैं, जो FLU का इस्तेमाल करके पूर्ण संख्याओं को जोड़ने के हैं :

1. प्रत्येक बहुपद को टाइलों के माध्यम से दर्शाएँ।
2. समान माप वाली टाइलों को मिला दें और शून्य युग्मों को हटा दें।
3. शेष टाइलें योगफल को दर्शाती हैं।

इसी तरह घटाव यानी $p(x) - q(x)$ के चरण हैं :

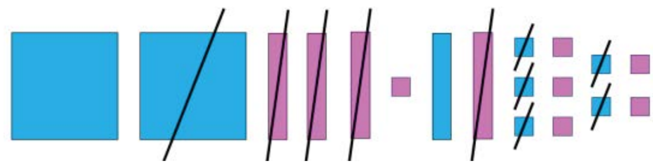
1. बहुपद $p(x) - q(x)$ को टाइलों के माध्यम से दर्शाएँ।
2. - $q(x)$ को दर्शाने के लिए $q(x)$ की टाइलों को पलट दें।
3. $p(x)$ और $-q(x)$ को जोड़ें, यानी कि समान माप की टाइलों को मिला दें और शून्य युग्मों को हटा दें।
4. शेष टाइलें $p(x) - q(x) = p(x) + [-q(x)]$ को दर्शाती हैं।



चित्र-5

$p(x) - q(x)$ को एक अन्य तरीक़े से भी किया जा सकता है, जो पूर्ण संख्याओं (whole number) के लिए इस्तेमाल किए गए तरीक़े जैसा ही है :

1. बहुपद $p(x)$ को टाइलों के माध्यम से दर्शाएँ।
2. मान लें कि कोई बहुपद $q(x)$ है।
3. $p(x)$ में ज़रूरत के अनुसार शून्य-युग्म जोड़ें ताकि $q(x)$ को घटाने (यानी कि x^2, $-4x$ और 5 को हटाने) के लिए पर्याप्त राशि हो।
4. $q(x)$ को $p(x)$ में से घटाएँ, यानी कि ऊपर बताए तरीक़े से टाइलों को हटाएँ। जो बचता है वह $p(x) - q(x)$ को दर्शाता है।



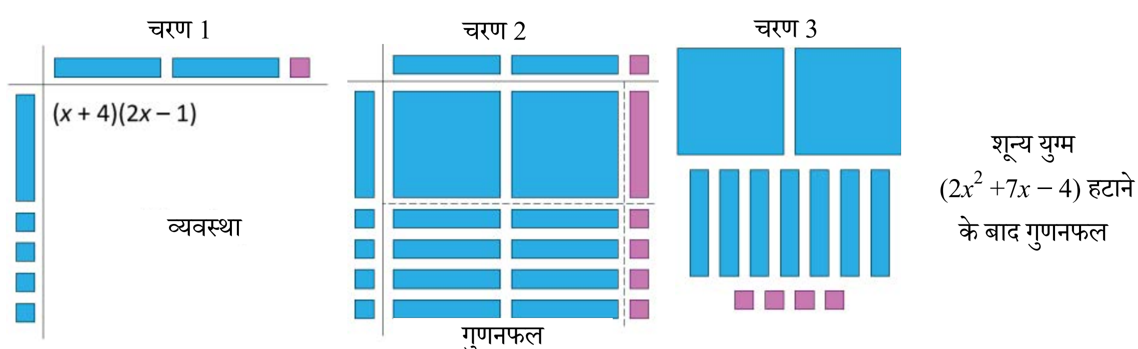
आवश्यक शून्य-युग्मों को जोड़ने और $q(x)$ को हटाने के बाद

$$(2x^2 - 3x - 1) - (x^2 - 4x + 5) = x^2 + x - 6$$

चित्र-6

चित्र-4 दो बहुपदों के जोड़ को दर्शाता है और **चित्र-5** व **6** दो बहुपदों के घटाव को दर्शाते हैं।

हालाँकि, यह काफ़ी कठिन हो सकता है क्योंकि इसमें एक से अधिक प्रकार के शून्य-युग्मों (1 और -1, x और $-x$, x^2 और $-x^2$) की ज़रूरत हो सकती है। इसके अलावा, जैसा कि हमने ऊपर बिन्दु **ख** में बताया था कि किसी पद को घटाना उसके योज्य प्रतिलोम को जोड़ने के बराबर होता है, तो प्रत्येक घटाव को एक प्रकार का जोड़ माना जा सकता है। इसलिए, $q(x)$ को पलटना बहुपद के घटाव को समझने का आसान विकल्प है।

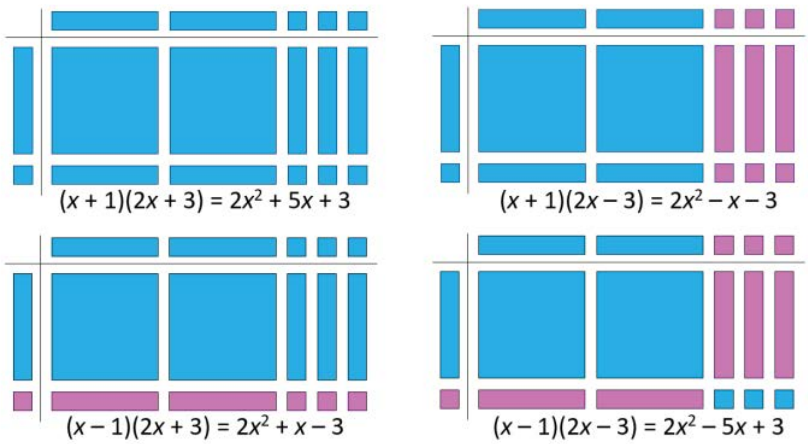


चित्र-7

गुणा व भाग के लिए बीजगणितीय टाइलों का उपयोग अधिकतम 2 की घात वाले बहुपदों के लिए ही किया जा सकता है। बीजगणितीय टाइलों का इस्तेमाल करके दो रैखिक बहुपदों (linear polynomials) का गुणन 2 अंकों वाली संख्या के गुणन के समान ही होता है। **चित्र-7** के चरण 2 'गुणनफल' में बड़े और छोटे वर्गों और क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर आयतों वाले चार क्षेत्रों को देखें। गुणा करने के चरण इस प्रकार हैं :

1. गुणा किए जाने वाले बहुपदों में से एक को दर्शाने वाली बीजगणितीय टाइलों को बाएँ किनारे पर और दूसरे बहुपद को दर्शाने वाली टाइलों को ऊपरी किनारे पर जमाएँ।
2. प्रत्येक टाइल की प्रत्येक विमा (dimension) का किनारों के साथ मिलान करते हुए क्रमविन्यास (array) को भरें।
3. शून्य-युग्मों को हटा दें (गुणनफल में शून्य-युग्म कहाँ हो सकते हैं? **चित्र-8** देखें)।

चित्र-8 उच्चतम घात के पदों को धनात्मक रखते हुए चिह्नों (धनात्मक व ऋणात्मक) के संयोजनों को दर्शाता है। इसमें इस बात पर ध्यान केन्द्रित किया गया है कि चिह्न आपस में कैसे क्रिया करते हैं। उन स्थितियों पर ध्यान दें जिनमें शून्य-युग्म होते हैं। इन चारों स्थितियों के बीच की समानताओं और विभिन्नताओं पर ग़ौर करें। मध्य पद के गुणनखण्डन (middle term factorization) के लिए यह समझना महत्त्वपूर्ण है। और हाँ, बीजगणितीय टाइलें इसे समझने में काफ़ी अच्छे से मदद से करती हैं!



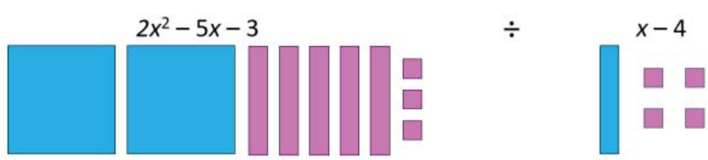
चित्र-8

बीजगणितीय टाइलों के माध्यम से 2 की घात वाले बहुपद में 1 की घात वाले बहुपद से भाग देना (**चित्र-9**) FLU की मदद से 3 अंकों वाली संख्या में 2 अंकों वाली संख्या से भाग देने से भी काफ़ी मिलता-जुलता है। **(देखें सन्दर्भ [5])**

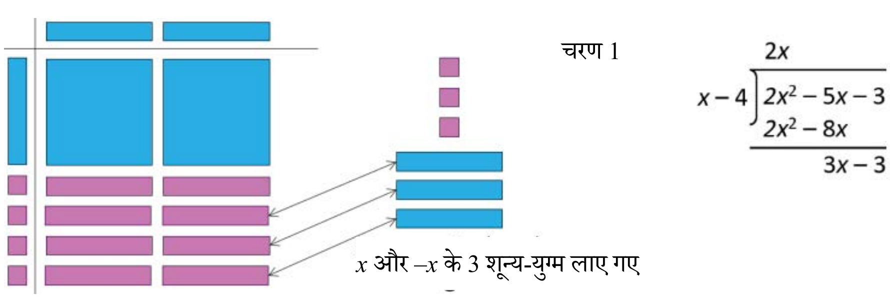
चरण 1 : x^2 के लिए टाइलें रखें और आंशिक भागफल के रूप में $2x$ प्राप्त करें। x और $-x$ के तीन शून्य-युग्म लाएँ और इस चरण को पूरा करें। बचेगा $3x–3$ (**चित्र-10**)।

चरण 2 : x टाइलें रखें और बचे हुए आंशिक भागफल के रूप में 3 प्राप्त करें। 1 और -1 के नौ शून्य-युग्म लाएँ और इस चरण को पूरा करें। यहाँ 9 शेषफल होगा और $2x + 3$ भागफल (**चित्र-11**)।

ध्यान दें कि अन्त में भाज्य (dividend) दो भागों में है– क्रमविन्यास (array) और शेषफल, यानी कि

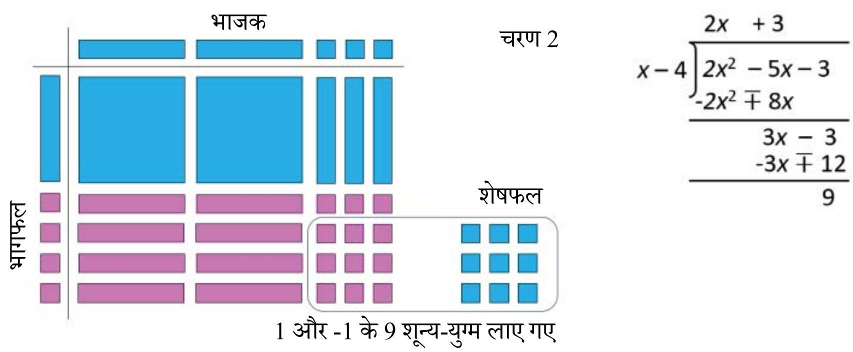


चित्र-9



चित्र-10

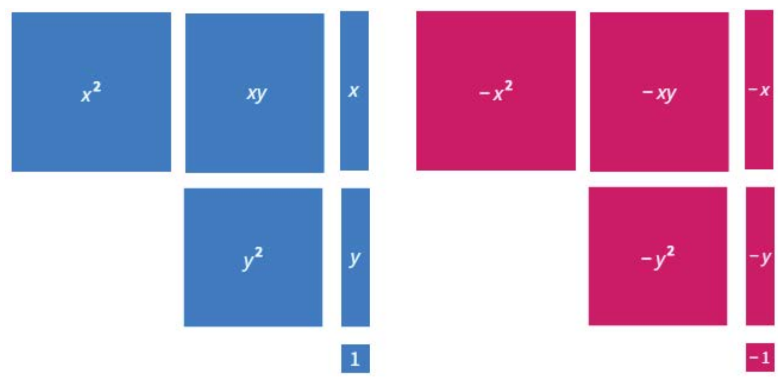
भाज्य = क्रमविन्यास + शेषफल = भाजक × भागफल + शेषफल, ठीक वैसे ही जैसे कि FLU में होता है (**चित्र-11**)



चित्र-11

इसके अलावा, बीजगणितीय टाइलों का इस्तेमाल सभी द्विघात सर्वसमिकाओं (quadratic identities) को दर्शाने के लिए किया जा सकता है :

- $(a + b)^2$ और सम्बन्धित
- $(a – b)^2$ और सम्बन्धित
- $(a + b)\ (a – b)$
- $(a + b)^2 + (a – b)^2$
- $(a + b)^2 – (a – b)^2$



चित्र-12

तो जहाँ तक बहुपदों की बात है, बीजगणितीय टाइलें इन्हें समझने में काफ़ी मददगार हैं। हालाँकि भौतिक (या आभासी) टाइलों का माप निश्चित होता है। इसलिए यह समीकरणों को समझने के लिए अच्छी नहीं होतीं। बीजगणितीय टाइलों का उपयोग करके रैखिक व एक चर वाले द्विघातीय समीकरणों की पड़ताल करना सम्भव हो सकता है। पर इसकी गहराई से छान-बीन करना अभी बाक़ी है।

बीजगणितीय टाइलों के कुछ संस्करणों में एक और चर y व तीन और माप की टाइलें शामिल होती हैं, जैसे कि y^2, xy और y (**चित्र-12**)। इनसे दो चर वाले बहुपदों को दर्शाया जा सकता है, लेकिन घात और गुणांक की सीमाएँ पहले ही की तरह बनी रहती हैं। अभी तक हम यह नहीं जाँच पाए हैं कि क्या ये विस्तारित बीजगणितीय टाइलें, विशेषकर x और 1 के साथ y, दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के युग्म (simultaneous linear equations) को समझाने में मदद कर सकती हैं।

3 की घात वाले बहुपदों को घनाभों (cuboids) के माध्यम से दर्शाया जा सकता है। लेकिन यह काफ़ी मुश्किल होगा और निश्चित रूप से इसके लिए घनाभों के दो सेट की आवश्यकता होगी– धनात्मक और ऋणात्मक –क्योंकि 3-विमाओं वाली चीज़ों में 'पलटने' का फ़ायदा नहीं मिल पाता। इसके अलावा, घनाभ शिक्षण-सम्बन्धी ऐसा कोई अतिरिक्त लाभ प्रदान नहीं करते, जो इस प्रयास को उचित ठहराए।

अन्तिम बात, यदि विद्यार्थी FLU से परिचित न हों तो भी बीजगणितीय टाइलों से उनका परिचय कराना बिलकुल ठीक है। ये टाइलें FLU का सामान्यीकरण हैं और FLU के इस्तेमाल के बाद बीजगणितीय टाइलों का उपयोग यह समझने में मदद कर सकता है कि पूर्ण संख्याएँ महज़ '10 के आधार वाले बहुपद' हैं, जिनके अंक गुणांक के रूप में होते हैं। लेकिन बीजगणितीय टाइलों के इस्तेमाल से पहले FLU से परिचित होना कोई ज़रूरी शर्त नहीं है। हालाँकि, बीजगणितीय टाइलों के साथ काम करने से पहले पूर्णांकों के लिए रंगीन काउंटरों के इस्तेमाल से वाक़िफ़ होना आवश्यक है **(देखें सन्दर्भ [6])**।

References

1. How to make algebra tiles: https://bit.ly/4buTsky
2. How to use algebra tiles: https://bit.ly/3zrFVNu
3. Explore algebra tiles virtually: https://bit.ly/3W7x3Wn
4. Algebraic identities with algebra tiles: https://bit.ly/3RSzyt0
5. FLU review: https://bit.ly/3XO1RMX
6. Integers: https://bit.ly/4bneWQw
7. Mathigon Polypad: https://bit.ly/3XLzU8o

मैथ स्पेस अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय की गणित प्रयोगशाला है, जो स्कूलों, शिक्षकों, अभिभावकों, बच्चों और स्कूली शिक्षा में कार्य करने वाले ग़ैर-सरकारी संगठनों व शिक्षक प्रशिक्षकों को सेवाएँ प्रदान करती है। यह गणित की विभिन्न शिक्षण सहायक सामग्रियों की पड़ताल करती है और उनके उपयोग की सम्भावनाओं के साथ-साथ कबाड़ से उनके कम लागत के संस्करणों को बनाने की सम्भावनाओं को भी तलाशती है। यह गणित से डरने वालों या नफ़रत करने वालों के साथ-साथ गणित प्रेमियों को भी सम्बोधित करने की कोशिश करती है। यह एक ऐसी जगह है जहाँ नए विचार पैदा होते हैं और कई लोगों के साथ चर्चा के फलस्वरूप विकसित होते हैं। मैथ स्पेस से mathspace@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कविता तिवारी **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** शहनाज़

सवाल को उलटा करके देखना!

अगर हम विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों – जैसे वर्ग, आयत, समचतुर्भुज, समान्तर चतुर्भुज, पतंग, समलम्ब चतुर्भुज, समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज, अवतल पतंग (dart) आदि पर विचार करें, तो हम आसानी-से बता सकते हैं कि इनमें से प्रत्येक प्रकार में किस तरह की सममिति होती है। उदाहरण के लिए, समचतुर्भुज और आयत, दोनों में रैखिक सममिति और क्रम 2 की घूर्णन सममिति होती है।

लेकिन यदि हम सवाल को उलट दें, तो क्या होगा :

1. *अगर किसी चतुर्भुज में रैखिक सममिति है, तो वह किस प्रकार का चतुर्भुज है?*
2. *अगर किसी चतुर्भुज में घूर्णन सममिति है, तो वह किस प्रकार का चतुर्भुज है?*

सवाल को उलटकर देखने से गणितीय पड़ताल की गुंजाइश पैदा होती है, जिससे विद्यार्थियों को अवलोकन, दस्तावेज़ीकरण और विश्लेषणात्मक क्षमताओं को विकसित करने के अवसर मिलते हैं। साथ ही इससे उनकी अवधारणात्मक समझ भी बेहतर होती है। हम पाठकों को आमंत्रित करते हैं कि वे अपने जवाब हमें AtRightAngles.editor@apu.edu.in पर भेजें। हम इस बारे में अपने विचार नवम्बर, 2024 के अंक में प्रस्तुत करेंगे!