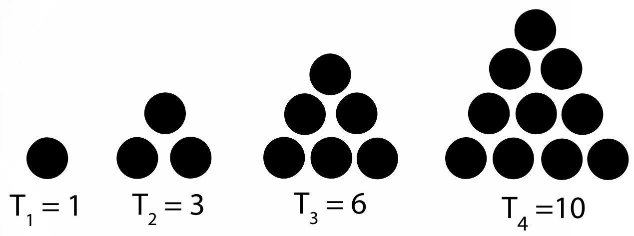
6 क्यों?
चतुष्फलकीय संख्याओं को चतुष्फलक से जोड़ना

जेम्स मेट्ज़ और ब्रैड युई

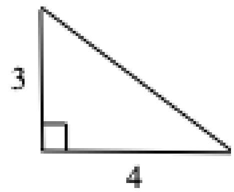
त्रिकोणीय संख्या (Triangular numbers) नाम इसलिए पड़ा, क्योंकि किसी भी त्रिकोणीय संख्या जिसमें वृत्तों के समूह को एक समबाहु त्रिभुज के आकार में जमाया जा सकता है, जैसा कि **चित्र-1** में दिखाया गया है।



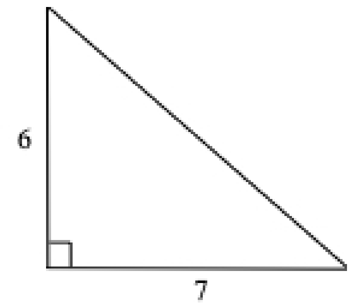
चित्र-1 : वृत्तों द्वारा दर्शाई गई त्रिकोणीय संख्याएँ

त्रिकोणीय संख्याएँ हैं 1, 3, 6, 10, 15, 21,... पहली त्रिकोणीय संख्या है 1, दूसरे चरण में हम इसमें 2 और वृत्त जोड़ते हैं, तीसरे चरण में हम 3 और वृत्त जोड़ते हैं, इस प्रकार सामान्यतया चरण क्रमांक n पर हम n वृत्त और जोड़ते हैं। इस तरह हम त्रिकोणीय संख्याएँ बनाते हैं। पर अगर हमें दसवीं त्रिकोणीय संख्या पता करनी है तो हमें नौवीं त्रिकोणीय संख्या ज्ञात होना ज़रूरी है। पिछली संख्या जाने बिना n वीं (n^{th}) त्रिकोणीय संख्या ज्ञात करने के लिए हमें एक सामान्य सूत्र की ज़रूरत है। n वीं त्रिकोणीय संख्या के लिए सामान्य सूत्र $T_n = n\,(n+1)/2$ है। (उदाहरण के लिए, $T_{10} = 10(9)/2 = 45$)। n और $n+1$ भुजाओं वाले एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल इस सूत्र का एक अच्छा ज्यामितीय निरूपण है। **चित्र-2** देखें। चूँकि $n\,(n+1)/2 = (n^2+n)/2$ है, n वीं त्रिकोणीय संख्या n और n^2 की औसत भी है।

की-वर्ड : *विशेष संख्याएँ, त्रिकोणीय संख्याएँ, चतुष्फलकीय (टेट्राहेड्रल) संख्याएँ, ज्यामिति, विज़ुअलाइज़ेशन (दृश्यावलोकन)*



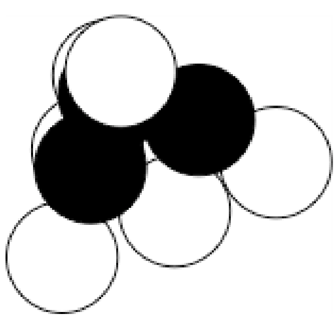
क्षेत्रफल = 3•4/2 = 6 = T_3



क्षेत्रफल = 6•7/2 = 21 = T_6

चित्र-2 : समकोण त्रिभुज जिनकी समकोण बनाने वाली भुजाएँ क्रमागत धनात्मक पूर्णांक हैं

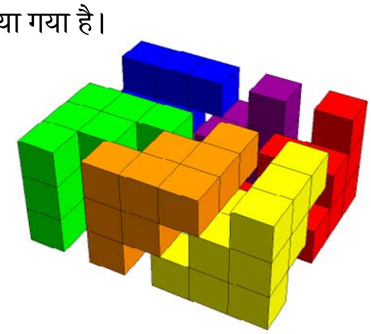
जिस प्रकार त्रिकोणीय संख्याओं को त्रिभुज के आकार में व्यवस्थित वृत्तों के रूप में दर्शाया जा सकता है, उसी प्रकार चतुष्फलकीय (tetrahedral) संख्याओं को चतुष्फलक (tetrahedron) - एक त्रिभुजीय आधार वाले पिरामिड - के रूप में देखा जा सकता है, जैसा कि **चित्र-3** में दिखाया गया है। हम गोलों को एक के ऊपर एक रखकर चतुष्फलकीय संख्या बनाते हैं, जिसकी प्रत्येक सतह में गोलों की संख्या त्रिकोणीय संख्या होती है। **चित्र-3** में पहली तीन त्रिकोणीय संख्याओं का योग दिखाया गया है, 1 + 3 + 6 = 10, तीसरी चतुष्फलकीय संख्या।



चित्र-3 : तीसरी चतुष्फलकीय संख्या 10 को दर्शाने वाले ढेरनुमा जमे गोले

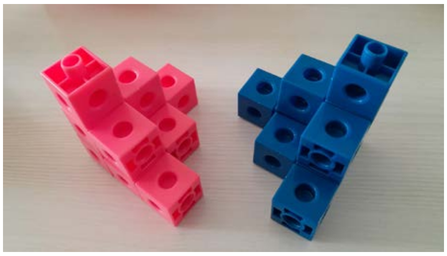
शुरुआती चतुष्फलकीय संख्याएँ 1, 4, 10, 20, 35, 56,... हैं। हालाँकि मॉडल गोलों की कुल संख्या को चतुष्फलकीय संख्याएँ कहने के लिए प्रेरित करता है। यह त्रिकोणीय संख्याओं और चतुष्फलकीय संख्याओं के बीच के सम्बन्ध का एक अच्छा दृश्य निरूपण (visual representation) है, लेकिन यह हमें n वीं चतुष्फलकीय संख्या पता करने में मदद नहीं करता है जब तक कि हमें इससे ठीक पहले वाली संख्या पता न हो। त्रिकोणीय संख्याओं की तरह, n वीं चतुष्फलकीय संख्या के लिए हमें एक सामान्य सूत्र चाहिए। n वीं चतुष्फलकीय संख्या पता करने के लिए यह सूत्र $Tn = n\,(n+1)(n+2)/6$ है। (उदाहरण के लिए, $T5 = 5(6)(7)/6 = 35$)। क्या यह अच्छा नहीं होगा अगर हम इस सूत्र को चतुष्फलक का इस्तेमाल करके ज्यामितीय रूप से चित्रित कर सकें?

चतुष्फलकीय संख्याएँ बताने वाले सूत्र का अंश तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल होता है, जो दरअसल एक ऐसे आयताकार ठोस का आयतन (लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई) भी होता है जिसकी भुजाएँ तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णांक होते हैं। इस प्रकार, ऐसे आयताकार ठोस के आयतन का 1/6वाँ भाग हमेशा एक चतुष्फलकीय संख्या होती है। उदाहरण के लिए, 3 × 4 × 5 भुजाओं वाले एक आयताकार ठोस का आयतन 60 होगा, इसलिए तीसरी चतुष्फलकीय संख्या 60/6 = 10 होगी। **चित्र-4** में 10 घनों के 6 सेट दिखाए गए हैं, जिनमें से प्रत्येक सेट के लिए एक अलग रंग है। ये 6 सेट एक साथ मिलकर 3 × 4 × 5 भुजाओं वाला एक आयताकार ठोस बनाते हैं। यह ज़रूरी नहीं है कि एक सेट में घन जुड़े हुए हों या फिर एक रंग के घन एक साथ रहें (घन ठोस में कहीं भी हो सकते हैं), लेकिन यह विन्यास त्रिकोणीय संख्या 1, 3 और 6 को अच्छी तरह से प्रकट करता है जिसका इस्तेमाल चतुष्फलकीय संख्या 10 को बनाने के लिए किया जाता है। **चित्र-5** में एक वैकल्पिक मॉडल दिखाया गया है, जो कि अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के मैथ स्पेस की स्वाती सरकार द्वारा सुझाया गया है।

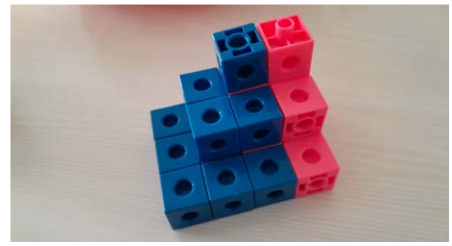


चित्र-4 : 6 समान टुकड़े, प्रत्येक में 10 घन हैं

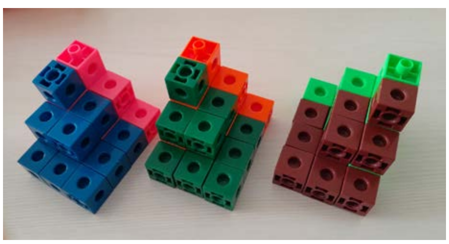
चरण-1 : दो सेटों में से प्रत्येक में $6 + 3 + 1 = 10$ ब्लॉक हैं, यानी कुल 20 ब्लॉक हैं।



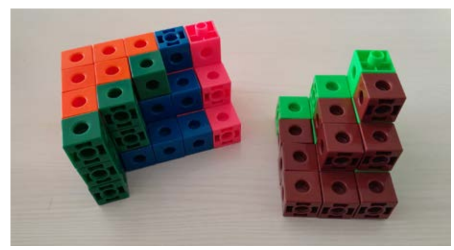
चरण-2 : प्रत्येक सेट में नीचे के 6 ब्लॉक जुड़कर 3×4 का आयत बनाते हैं; बीच के 3 जुड़कर 2×3 का आयत बनाते हैं; प्रत्येक सेट में सबसे ऊपर के ब्लॉक जुड़कर 1×2 का आयत बनाते हैं।



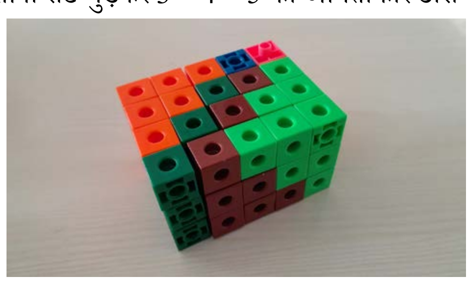
चरण-3 : 20 ब्लॉकों के तीन समान सेट।



चरण-4 : दो सेट जुड़े हुए हैं।



चरण-5 : तीनों सेट जुड़कर $3 \times 4 \times 5$ का आयताकार ठोस बनाते हैं।



चित्र-5 : स्वाती का मॉडल

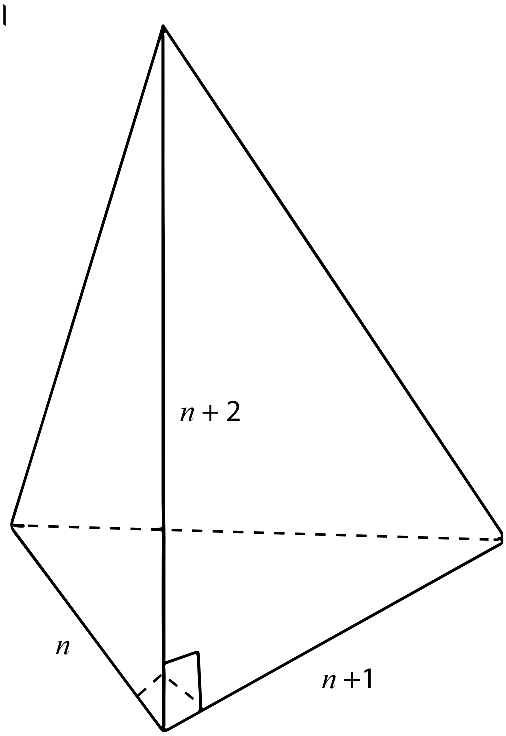
यह मॉडल सूत्र से शुरू होता है और मॉडल को सूत्र में फिट करता है, इसलिए यह विधि इस सवाल का जवाब नहीं देती है, कि "6 क्यों?"

अब हम अपना ध्यान चतुष्फलक के इस्तेमाल से इस पद को ज्यामितीय रूप से चित्रित करने की सम्भावना पर केन्द्रित करते हैं। हमें यह स्पष्ट रहना चाहिए कि यह n वीं चतुष्फलकीय संख्या के लिए सूत्र विकसित करने की कोशिश नहीं है, बल्कि चतुष्फलक में सूत्र को देखने का एक तरीक़ा दर्शाने के लिए है, और विशेष रूप से सूत्र में संख्या 6 को ध्यान में रखना है। हम फिर से देखते हैं कि n वीं चतुष्फलकीय संख्या पहली n त्रिकोणीय संख्याओं का योग है। उदाहरण के लिए, पहली पाँच त्रिकोणीय संख्याओं, $1 + 3 + 6 + 10 + 15$ का योग 35 है, जो पाँचवीं टेट्राहेड्रल संख्या है।

चतुष्फलक के आयतन का सूत्र $Bh/3$ है, जहाँ B आधार का क्षेत्रफल है और h ऊँचाई है। अगर चतुष्फलक का आधार समकोण त्रिभुजाकार है, जिसकी भुजाएँ n और $n+1$ हैं तो आधार का क्षेत्रफल $n\,(n+1)/2$ होगा, जो एक त्रिकोणीय संख्या है। यदि चतुष्फलक की ऊँचाई $n+2$ है, तो चतुष्फलक का आयतन $[(n\,(n+1)/2)\,(n+2)]/3)$ या $n\,(n+1)(n+2)/6$ होगा। **चित्र-6** देखें। इस प्रकार, जब n वीं चतुष्फलकीय संख्या पता करने के लिए कहा जाता है, तो हम सिर्फ़ चतुष्फलक के आयतन की गणना कर रहे होते हैं। उदाहरण के लिए, पाँचवीं चतुष्फलकीय संख्या $Bh/3 = [[(5)(6)/2])7]/3 = 35$ है।

अब हम जवाब दे सकते हैं, "6 क्यों?" हमारे पास त्रिभुजाकार आधार के क्षेत्रफल के सूत्र से 2 विभाजक है और चतुष्फलक

के आयतन के सूत्र से 3 विभाजक है और इसलिए विभाजक 6 है।



चित्र-6 : इस चतुष्फलक का आयतन n वीं चतुष्फलकीय संख्या है

हम एक आख़िरी विचार के साथ निष्कर्ष पर पहुँचते हैं। दुनिया के कुछ हिस्सों में एक लोकप्रिय गीत है "क्रिसमस के बारह दिन (The Twelve Days of Christmas)", जिसके पहले तीन छन्द हैं :

क्रिसमस के पहले दिन
मेरे सच्चे प्यार ने मुझे दिया
नाशपाती के एक पेड़ में एक तीतर।

क्रिसमस के दूसरे दिन
मेरे सच्चे प्यार ने मुझे दिए
दो जंगली कबूतर,
और नाशपाती के एक पेड़ में एक तीतर।

क्रिसमस के तीसरे दिन
मेरे सच्चे प्यार ने मुझे दिए
तीन फ्रांसीसी मुर्गियाँ,
दो जंगली कबूतर
और नाशपाती के एक पेड़ में एक तीतर।

यह क्रम कुल 12 दिनों तक जारी रहता है। हर दिन मिले उपहारों की संख्या एक त्रिकोणीय संख्या है। इस तरह उपहारों की कुल संख्या बारहवीं चतुष्फलकीय संख्या है, जो पहली 12 त्रिकोणीय संख्याओं का योग है, यानी 364। ये गीत और गीत के बोल आसानी से कहीं भी मिल जाएँगे, और ये समस्या से बख़ूबी परिचय करवाते हैं।

Reference

1. Jim Delaney "Geometric Proof of the Tetrahedral Number Formula" https://demonstrations.wolfram.com/GeometricProofOfTheTetrahedralNumberFormula/Published March 7 2011

ब्रैड युई हवाई के ख़ूबसूरत द्वीपों के रहने वाले हैं एक रचनात्मक व ख़ुशदिल शिक्षक हैं। उन्होंने 15 साल तक गणित और अँग्रेज़ी विषय पढ़ाए हैं। वे टीचर्स अक्रॉस बॉर्डर्स – दक्षिणी अफ्रीका के साथ वालंटियर के तौर पर 8 दौरों में शामिल हुए हैं। फिलहाल वे ओआहू (O' ahu) के कामेहामेहा (Kamehameha) स्कूल कपालामा (Kapalama) में बीजगणित-1 पढ़ाते हैं, जो मूल हवाईयन बच्चों की सेवा के लिए समर्पित एक शैक्षणिक संस्थान है। मनोरंजन के लिए, ब्रैड को पढ़ना, टेनिस खेलना, खाना बनाना और कॉफी पीना पसन्द है। ब्रैड से Brad.uy@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

जेम्स मेट्ज़ एक सेवानिवृत्त गणित प्रशिक्षक हैं। वे हर साल एक महीने के लिए टीचर्स अक्रॉस बॉर्डर्स – दक्षिणी अफ्रीका के लिए वालंटियर के रूप में काम करते हैं। उन्हें गणित का अध्ययन करना बहुत पसन्द है। जेम्स से metz@hawaii.edu पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : सीमा **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अफसाना पठान