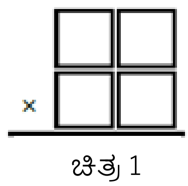
ಅತ್ಯಧಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದೆಂತು?
ಪರೋಕ್ಷ ಚಿಂತನೆಯ ಪ್ರತಿಭಾಪೂರ್ಣ ಪ್ರಯೋಗ

ಸ್ವಾತಿ ಸರ್ಕಾರ್

“ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಅಂಕಿಗಳ” (Random Digits) ಆಟವು ಉನ್ನತ ಸ್ತರದ ಚಿಂತನಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಬೇಡುತ್ತದೆ. ಈ ಆಟವು ಎಲ್ಲಾ ಆಟಗಾರರಿಗೂ ಇರುವ ಸಮಾನವಾದ ಒಂದು ಫಲಕದೊಂದಿಗೆ ಮೊದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಫಲಕವು ಪ್ರಧಾನವಾಗಿ ಹಲವು ಅಂಕಿಗಳುಳ್ಳ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ ಅಥವಾ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ.

ಇದು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಗಾತ್ರಗಳನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಈ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾಗುವ ಪ್ರತಿ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ನಿಖರವಾದ ಅಂಕಿಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಖಾಲಿಬಿಡುತ್ತದೆ. ಸುಗಮಕಾರನು ಪ್ರತಿ ಅಂಕಿಯನ್ನೂ ಹೇಳುತ್ತಿರುವಂತೆಯೇ ಆಟಗಾರರು ಅವುಗಳನ್ನು ಫಲಕದ ಮೇಲೆ ಇರಿಸಬೇಕು. ಒಮ್ಮೆ ಅಂಕಿಯೊಂದನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿದ ಬಳಿಕ ಆ ಅಂಕಿಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಿಸಲಾಗದು. ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಮೊದಲ ಅಂಕಿಯಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗದು. ಅಂದರೆ, ಅದನ್ನು ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎಡತುದಿಯ ಖಾಲಿಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಇರಿಸಲಾಗದು. ಆಟಗಾರನೇನಾದರೂ ಇದನ್ನು ಮಾಡುವ ಬಲವಂತಕ್ಕೊಳಗಾದರೆ ಅವನು ಆಟದಿಂದ ನಿವೃತ್ತನಾಗಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆಟಗಾರರೇನಾದರೂ ಮೊತ್ತ, ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಅಥವಾ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡರೆ, ಯಾರು ಮೊತ್ತ, ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಅಥವಾ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಅತ್ಯಧಿಕ ಫಲವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾರೋ ಅವರು ಗೆಲ್ಲುತ್ತಾರೆ. ಆದರೆ, ಆಟಗಾರರು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಸಹ ಮಾಡಬಹುದು. ಎರಡೂ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಆಟಗಾರರು ತಮ್ಮ ಫಲವು ಗರಿಷ್ಠ/ಕನಿಷ್ಠವಾಗಿರಲು, ಪ್ರತಿ ಅಂಕಿಯನ್ನೂ ಎಲ್ಲಿ ಇಡಬೇಕೆಂದು ಯೋಚಿಸಿ ಮುನ್ನಡೆಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿ ಆಟದ ಬಳಿಕ ನಾವು ಪಡೆದ ಗರಿಷ್ಠ/ಕನಿಷ್ಠ ಫಲದ ವಿಚಾರವಾಗಿ ಸಂವಾದವೊಂದನ್ನು ನಡೆಸುವುದೊಂದು ಒಳ್ಳೆಯ ವಿಚಾರ. ಈ ಆಟದ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿವರಗಳು https://shorturl.at/hkxV3 ನಲ್ಲಿ ಲಭ್ಯವಿದೆ.

ನಾವು ಇದನ್ನು 2 ಅಂಕಿ x 2 ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಆಡಿ ನೋಡೋಣ. ನಮಗೆ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಅಂಕಿಗಳು 2, 5, 8 ಮತ್ತು 9. ಅವನ್ನು ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ನೀಡಬೇಕೆಂದೇನೂ ಇಲ್ಲ. ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಇವುಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುವಾಗ ನಮಗೆ 2 ಮತ್ತು 5ಗಳು ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇರಬೇಕೆಂದೂ, 8 ಮತ್ತು 9ಗಳು ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇರಬೇಕೆಂದೂ ಒಡನೆಯೇ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 1

ದೊಡ್ಡ ಅಂಕಿಗಳು ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿದ್ದು, ಸಣ್ಣ ಅಂಕಿಗಳು ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇರಬೇಕು ಎಂಬ ವೀಕ್ಷಣೆಯು ಮೇಲೆ ನಡೆಸಬೇಕೆಂದು ತಿಳಿಸಿದ ಸಂವಾದಗಳಿಂದ ಹೊರಹೊಮ್ಮುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಇವೆರಡರಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದು: 95 × 82 ಅಥವಾ 92 × 85? ನಾವು ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕದೇ ಇದನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವುದು ಹೇಗೆ?

ಆಟಗಾರನೊರ್ವ 92 × 85 ದೊಡ್ಡಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದೂ, ಅದಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವಾದ 92 − 85 = 7 ಎಂಬುದು 95 × 82 ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಅಂತರ 95 − 82 = 13ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಸಣ್ಣದಾಗಿದೆ ಎಂದು ವಾದಿಸುತ್ತಾನೆ. ಅವನ ವಾದವು, ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿಸಲು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಬೇಕು ಎಂಬುದಾಗಿತ್ತು.

ಇದು ಸರಿಯೆ?

1. ಇವನ್ನು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೆ?

a. 73 × 52 = ___________ ಹಾಗೂ 72 × 53 = ___________

b. 61 × 84 = ___________ ಹಾಗೂ 64 × 81 = ___________

c. 92 × 41 = ___________ ಹಾಗೂ 91 × 42 = ___________

d. 85 × 72 = ___________ ಹಾಗೂ 82 × 75 = ___________

2. ಇದನ್ನು ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಚೆಗೂ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ನಿಯಮವಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದೆ?

a. 95 × 3 = ___________ ಹಾಗೂ 93 × 5 = ___________

b. 84 × 2 = ___________ ಹಾಗೂ 82 × 4 = ___________

c. 743 × 12 = ___________ ಹಾಗೂ 123 × 74 = ___________

d. 854 × 23 = ___________ ಹಾಗೂ 234 × 85 = ___________

3. ಅತಿದೊಡ್ಡ ಅಂಕಿಯು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊದಲ (ಅತಿದೊಡ್ಡ ದಶಮ ಸ್ಥಾನದ) ಅಂಕಿಯಾಗಿ ಇರದಿದ್ದರೂ ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೆ?

a. 36 × 4 = ___________ ಹಾಗೂ 34 × 6 = ___________

b. 59 × 28 = ___________ ಹಾಗೂ 58 × 29 = ___________

c. 190 × 46 = ___________ ಹಾಗೂ 140 × 96 = ___________

4. 27 × 35 = ___________; 35 ಮತ್ತು 27ರ ಅಂತರ = 12 ಹಾಗೂ 73 × 52 = ___________; 73 ಮತ್ತು 52ರ ಅಂತರ = 21. ಆದರೂ, ಈ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ವಿಧಾನವೇಕೆ ಕೆಲಸಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ?

ಆಯತವೊಂದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದೊಂದು ಚೌಕವಾದಾಗ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಞಾನದಿಂದ ಎರವಲು ಪಡೆದ ವಿಚಾರ ಇದಾಗಿದೆ. ಆಯತದ ಉದ್ದ-ಅಗಲಗಳ

ಅಳತೆಗಳು ಚೌಕದ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚು-ಹೆಚ್ಚು ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗ, ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೂ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಅನ್ವೇಷಿಸಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದಾಗಿದೆ. ಆಯತವೊಂದು ಚೌಕವೊಂದಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು-ಹೆಚ್ಚು ಹತ್ತಿರವಾಗಲು ಅದರ ಯಾವುದೇ ಜೊತೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಹೆಚ್ಚು-ಹೆಚ್ಚು ಸಮವಾಗುವುದರತ್ತ ಸಾಗುವುದರಿಂದ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ. ಅಥವಾ, ಬೇರೆ ರೀತಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಅದರ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಅಂತರವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗಬೇಕು.

ಆದರೆ, ಈ ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವಿಕೆಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಲು ನೆರವೇರಬೇಕಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಷರತ್ತಿದೆ. ಅದೆಂದರೆ, ಆಯತದ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಬದಲಾಗುತ್ತಿದ್ದರೂ, ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬದಲಾವಣೆ ಆಗಕೂಡದು.

ಇದು ನಮ್ಮ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವುದಾದರೂ ಎಂತು?

ಈ ಎರಡು ಆಯತಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ:

	ಆಯತ A	ಆಯತ B
ಉದ್ದxಅಗಲ	95 ಸೆಂಮೀ x 82 ಸೆಂಮೀ	92 ಸೆಂಮೀ x 85 ಸೆಂಮೀ
ಸುತ್ತಳತೆ	2 (95 ಸೆಂಮೀ + 82 ಸೆಂಮೀ) = 2 x 177 ಸೆಂಮೀ	2 (92 ಸೆಂಮೀ + 85 ಸೆಂಮೀ) = 2 x 177 ಸೆಂಮೀ
ವಿಸ್ತೀರ್ಣ	95 x 82 = 7790	92 x 85 = 7820 ಚ. ಸೆಂಮೀ

ನಾವು 2 ಮತ್ತು 5ನ್ನು ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೂ, 8 ಮತ್ತು 9ನ್ನು ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೂ ನಿಗದಿಪಡಿಸಿರುವುದರಿಂದ ನಮಗೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ, ಸಂಕಲನದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಹಾಗೂ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣಗಳ ಕಾರಣದಿಂದಾಗಿ, ಒಂದೇ ಮೊತ್ತ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ: 95 + 82 = 90 + 5 + 80 + 2 = 90 + 2 + 80 + 5 = 92 + 85.

ಈ ಮೊತ್ತವು ಆಯತ A ಮತ್ತು ಆಯತ Bಗಳ ಅರ್ಧ ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗಿದೆಯಷ್ಟೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ಸುತ್ತಳತೆ ಒಂದೇ ಆಗಿರಬೇಕು ಎಂಬ ಷರತ್ತು ನಮ್ಮ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಪೂರೈಸುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಈ ಉದ್ದ-ಅಗಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹತ್ತಿರವಾದಷ್ಟೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಮಾಣದತ್ತ ಸಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಲು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರಾಯಿತು.

ಸೂಚನೆ: ಪ್ರಶ್ನೆ 4ರಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಜೊತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆಯೆ?

ಒಂದು ವಿಷಯದಾಚೆಗೆ ಯೋಚಿಸುವುದು ಅಷ್ಟು ಸುಲಭವಲ್ಲ. ಆದರೆ, ಈ ಆಟಗಾರನು ಎರಡು ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಆಟದಲ್ಲಿ (ಇಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇರಿಸಲಾಗಿತ್ತು) ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ. ಹೀಗಾಗಿ, ಆಟಗಾರನು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕುರಿತಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಹೊಂದಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು. ಅವನು

ಗುಣಲಬ್ಧವು ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ಗಮನಿಸಿದ. ಈ ರೀತಿ ಅವನು ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಲು ವಿದಿತ ನಿಯಮವೊಂದನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡ. ಅಂಕಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸುವಲ್ಲಿ ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತದ ನಿಯಮವೊಂದರ ಪ್ರತಿಭಾಪೂರ್ಣ ಪ್ರಯೋಗ ಇದಾಗಿದೆ.

ಚಿಂತನೆಗೊಂದಿಷ್ಟು ವಿಚಾರಗಳು

1. 2, 5, 8, 9ರ ಕನಿಷ್ಠ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಷ್ಟು ಆಗಿರುತ್ತದೆ?
2. ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಲು ಯಾವ ರೀತಿಯ ತಂತ್ರಗಾರಿಕೆಯನ್ನು ನೀವು ಬಳಸಬಹುದು?
3. ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ಮೂರಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಲು ಯಾವ ರೀತಿಯ ಕಾರ್ಯತಂತ್ರವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಬಹುದು?

ಈ ರೀತಿಯ ಆಟಗಳ ಮೂಲ ವಿಚಾರವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮೋಸಮಾಡದಂತೆ ಅಥವಾ ಪರಸ್ಪರ ನಕಲುಮಾಡದಂತೆ ನೋಡಿಕೊಳ್ಳುವುದಾಗಿತ್ತು. ಆದರೆ, ಅದು ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚಿನದನ್ನು ಸಾಧಿಸುವಂ**ತಾಯಿತು**!

ಸ್ವಾತಿ ಸರ್ಕಾರ್ ಅವರು ಅಜೀಂ ಪ್ರೇಮ್‌ಜಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಸ್ಕೂಲ್ ಆಫ್ ಕಂಟಿನ್ಯೂಯಿಂಗ್ ಎಜುಕೇಶನ್ ಅಂಡ್ ಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿ ರಿಸೋರ್ಸ್ ಸೆಂಟರ್‌ನಲ್ಲಿ ಸಹಾಯಕ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಇವರಿಗೆ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರಕಲೆಯ ಬಳಿಕ ಅತ್ಯಂತ ಅಚ್ಚುಮೆಚ್ಚಿನ ವಿಷಯ ಗಣಿತವಾಗಿದೆ. ಇವರು ಭಾರತೀಯ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಸಂಸ್ಥೆಯಿಂದ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸ್ನಾತಕೋತ್ತರ ಪದವಿ ಪಡೆದು, ಅಮೇರಿಕದ ಸಿಯಟಲ್ ನಗರದ ವಾಷಿಂಗ್ಟನ್ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದಿಂದ ಎಮ್.ಎಸ್. ಪದವಿ ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ. ಗಣಿತದ ವಿಷಯವಾಗಿ ಮಕ್ಕಳು ಮತ್ತು ಶಿಕ್ಷಕರೊಂದಿಗೆ ಐದು ವರ್ಷಕ್ಕೂ ಮೀರಿ ಒಡನಾಟವಿರುವ ಇವರಿಗೆ ಚಟುವಟಿಕೆ ರೂಪದ ಎಲ್ಲದರಲ್ಲೂ—ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಓರಿಗಾಮಿಯಲ್ಲಿ—ಅಪಾರ ಆಸಕ್ತಿ. ಇವರನ್ನು ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದಾದ ಈಮೇಲ್ ವಿಳಾಸ: swati.sircar@apu.edu.in

==============