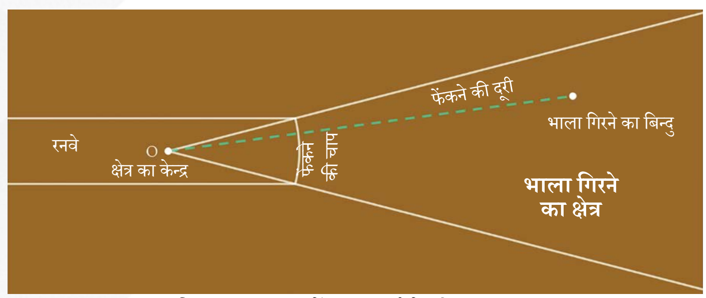
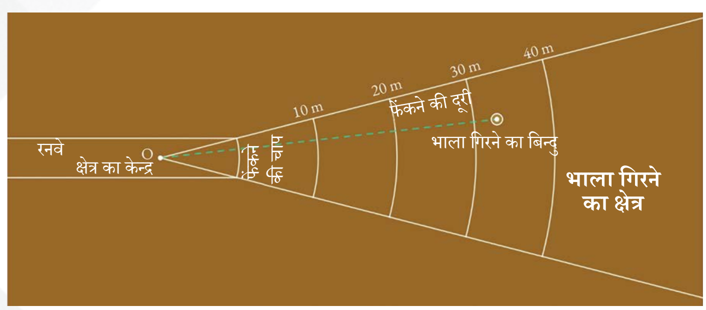
क्या भाला फेंक को टूटे टेप से मापा जा सकता है?

स्कूल के खेल समारोह के दिन, शारीरिक शिक्षा शिक्षिका ने देखा कि मापने का टेप टूटा हुआ है और उसे अभी तक बदला नहीं गया है। भाला फेंक स्पर्धा 30 मिनट में शुरू होने वाली है, और नया टेप लाने का समय नहीं है। स्पर्धा में जहाँ से भाला फेंका जाता है, उसके केन्द्र से लेकर जहाँ भाला गिरता है वहाँ तक की दूरी मापने की आवश्यकता होती है (देखें **चित्र-1**)। यह दूरी आमतौर पर 10 से 60 मीटर तक होती है। समस्या यह है कि टूटा हुआ टेप केवल 12 मीटर तक ही माप सकता है।



चित्र-1: भाला फेंक स्पर्धा के लिए ख़ाका

इस समस्या के समाधान के लिए शिक्षिका ने भाला फेंक क्षेत्र का ख़ाका बदल दिया। उन्होंने रस्सी की मदद से बिन्दु O से उसके आस-पास वृत्ताकार चाप बनाईं, उन्होंने हर चाप के बीच 10 मीटर का फ़ासला रखा (देखें **चित्र-2**)। ऐसा करने के पीछे उनकी सोच थी कि अब जहाँ भी भाला गिरेगा वहाँ से केवल निकटतम चाप तक की दूरी मापनी होगी।



चित्र-2 : संशोधित ख़ाका

इस बदले हुए ख़ाके के साथ स्पर्धा शुरू होती है। हालाँकि, स्पर्धा के अन्त में, उपविजेता ने शिक्षिका की विधि की निष्पक्षता पर सवाल उठाया। उसका सवाल था कि (दूरी मापने के लिए) निकटतम चाप पर बिन्दु कैसे चुना गया और इस तरीक़े की वैधता पर भी सवाल था।

प्रश्न :
यदि शारीरिक शिक्षा शिक्षिका द्वारा उपयोग की गई विधि गणितीय रूप से सही है तो क्या आप उनकी ओर से चाप पर बिन्दु चुनने की विधि बता सकते हैं, साथ ही क्या इसके निष्पक्ष और सही होने को सिद्ध कर सकते हैं?

अनुवाद : शौर्या बरतारिया **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अफसाना पठान

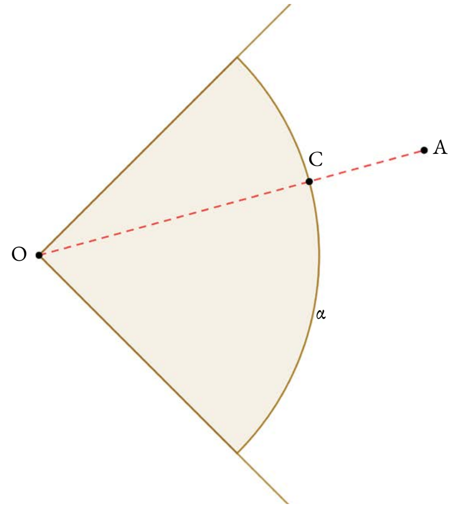
उत्तर के लिए पेज 59 देखें।

टूटे हुए टेप से भाला फेंक को मापना

मोहन आर.

समाधान :

मान लीजिए कि A वह बिन्दु है जहाँ भाला गिरता है, α वह वृत्तीय चाप है जो A के सबसे नज़दीक है, और O α का केन्द्र है। सही माप सुनिश्चित करने के लिए टेप को A और O को जोड़ने वाली रेखा की सीध में होना चाहिए। माना कि C वह बिन्दु है जहाँ रेखा AO और वृत्तीय चाप α एक-दूसरे को काटती हैं। अगर शिक्षिका (जो कि रेफरी की भूमिका निभा रहीं हैं), α पर सही स्थान पर C बिन्दु नहीं ढूँढ़ पाती हैं तो मापने में गलती हो सकती है और उपविजेता द्वारा उठाया गया सवाल सही सिद्ध हो

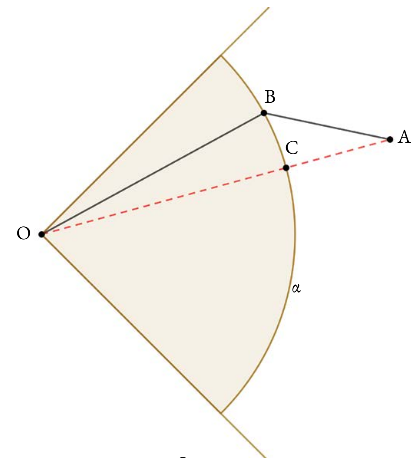


चित्र-1

जाएगा। रेफरी एकदम सही जगह पर बिन्दु C कैसे पता कर सकती हैं?

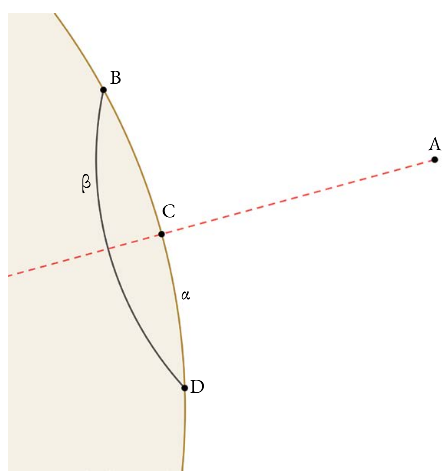
की-वर्ड : अनुप्रयोग, अन्त: विषयक, समस्या समाधान

यदि हम α पर कोई अन्य बिन्दु B चुनते हैं, तो त्रिभुज असमिका (triangle inequality) के अनुसार हमारे पास OB + BA > OC + CA = OA होगा।



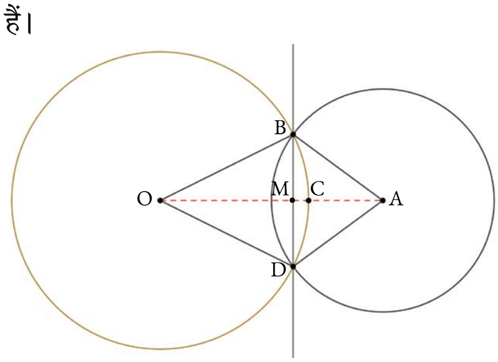
चित्र-2

इसलिए, यदि B चाप α पर C से अलग कोई बिन्दु है तो हम A को केन्द्र और AB को त्रिज्या रखकर एक और वृत्तीय चाप β खींच सकते हैं। अब β, α को मूल बिन्दु B पर और एक अन्य बिन्दु D पर काटता है। (क्या ऐसा तब भी होगा जब B और C दोनों बिन्दु ठीक एक ही जगह होंगे?)

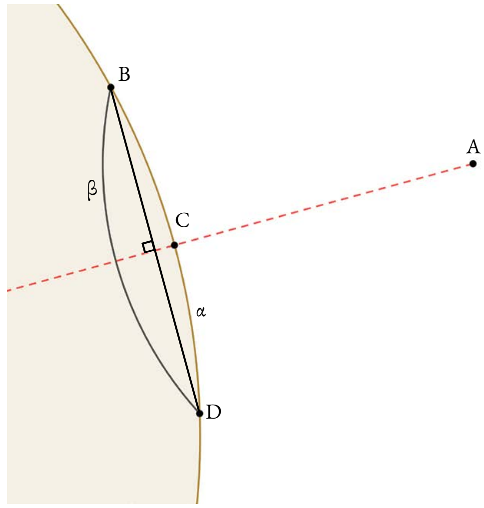


चित्र-3

नीचे दिए गए विस्तारित (चरम स्थिति के) चित्र पर नज़र डालते हैं। मान लीजिए कि B और D को जोड़ने वाली रेखा O और A को जोड़ने वाली रेखा को बिन्दु M पर काटती है। इस स्थिति में [SSS (भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसमता से)] त्रिभुज BOA और DOA सर्वांगसम हैं। इसका मतलब है कि ∠BOA = ∠DOA है, और इसलिए त्रिभुज BOM और DOM सर्वांगसम हैं [SAS (भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसमता से)]। इसका तात्पर्य है कि ∠OMB = ∠OMD हैं और समकोण हैं। इस प्रकार, रेखाएँ BD और OA एक-दूसरे के लम्बवत हैं।



चित्र-4



चित्र-5

इसलिए, यदि रेफरी वृत्तीय चाप α पर कोई भी बिन्दु B चुनती हैं, तो वह माध्यमिक कक्षा में पढ़ाई जाने वाली बुनियादी ज्यामितीय का उपयोग करके BD का लम्ब समद्विभाजक (या ∠BAD का कोण समद्विभाजक) खींच सकती हैं। इस तरह, चाप α को यह समद्विभाजक जिस जगह काटेगा वह बिन्दु C होगा।

सम्पादक टीप : जब हम ज्यामिति को वास्तविक दुनिया के अनुभवों से जोड़ते हैं तो यह अधिक रोचक बन जाती है। यहाँ चर्चा किए गए सिद्धान्त गोला फेंक, हैमर थ्रो और डिस्कस थ्रो जैसे खेलों में दूरी को मापने में, विशेषकर तार्किकता, त्रुटि विश्लेषण और प्रमाणिकता सिद्ध करने में मदद करते हैं।

इसके अतिरिक्त, यह चर्चा वृत्त की स्पर्श-रेखा की अवधारणा की ओर भी ले जाती है। यदि रेफरी बिन्दु B के बजाय बिन्दु C को चुनती हैं, तो स्पष्ट है कि नया वृत्तीय चाप β वृत्तीय चाप α को किसी अन्य बिन्दु पर नहीं काटेगा। इसलिए, बिन्दु C से गुज़रने वाली, AO की लम्बवत रेखा C के स्पर्शबिन्दु को दर्शाती है। यह अवधारणा निम्नलिखित प्रमेय को भी छूती (या रेखांकित करती) है, जिसे आमतौर पर विद्यार्थियों को बाद में पढ़ाया जाता है :

प्रमेय : वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से गुज़रने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।

आभार

एट राइट एंगल्स सुयश तिवारी के प्रति आभारी है। वे अज़ीम प्रेमजी स्कूल, धमतरी में गणित शिक्षक हैं। भाला फेंक में दूरी को मापने पर लिखी उनकी टिप्पणी ने इस लेख के विचार को जन्म दिया।

मोहन आर. अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय में गणित पढ़ाते हैं। मूलत: वे एक बीजगणितज्ञ हैं। वे गणित शिक्षा और गणित संवाद में रुचि रखते हैं। वे कर्नाटक के गणितीय ओलम्पियाड के क्षेत्रीय समन्वयक हैं। उनसे mohan.r@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : शौर्या बरतारिया **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अफसाना पठान