भिन्नात्मक त्रिक

विनय नायर

मुख्य शब्द : बाँटना (Sharing), गुणनखण्ड (Factors), गुणज (Multiples), अनुमान (Estimation)

इस पहेली पर विचार करें। तीन भाई हैं- सबसे छोटा, मँझला और सबसे बड़ा। प्रत्येक को विरासत के रूप में कुछ राशि मिलती है। सबसे छोटा भाई प्राप्त होने वाली राशि का आधा अपने पास रखता है और बची हुई राशि को मँझले और बड़े भाई के बीच समान रूप से वितरित करता है। मँझला भाई भी आधी राशि अपने पास रखता है और बाकी राशि को दोनों भाइयों के बीच समान रूप से वितरित करता है। सबसे बड़ा भाई भी अपने पास आधी राशि रखता है (अपने भाइयों से भी राशि प्राप्त करने के बाद) और शेष राशि को सबसे छोटे और मँझले भाई के बीच समान रूप से विभाजित करता है। अन्त में यदि तीनों भाइयों के पास समान राशि है, तो क्या हम ज्ञात कर सकते हैं कि प्रारम्भ में उनमें से प्रत्येक के पास कितनी राशि थी? अगर ऐसा है तो हम ऐसा कैसे करते हैं? अगर नहीं कर सकते, तो क्यों नहीं?

यह एक प्राचीन पहेली है, जिसे थोड़ा संशोधित किया गया है। आइए, संख्याओं का उपयोग करके पहेली पर थोड़ी छानबीन करें। हम शुरुआत में मान लेते हैं कि कहीं एक बैंक है, जहाँ से हम जितनी चाहें उतनी रकम निकाल सकते हैं (केवल प्राकृतिक संख्याओं में ही, कोई भिन्नात्मक संख्या नहीं)। हम तीन खिलाड़ियों A, B और C के खेल पर विचार करते हैं। जिस क्रम में वे खेल खेलते हैं वह कुछ इस प्रकार है- पहले A, उसके बाद B और फिर C । प्रत्येक खिलाड़ी अपनी बारी आने पर बैंक से एक निश्चित राशि निकाल लेता है। खिलाड़ियों को आवश्यकतानुसार कार्य करने के लिए, A को 4 के गुणज का प्रयोग करना ही होगा, तभी वह कथन के अनुसार बाँट पाएगा।

मान लें कि A 4 इकाइयाँ निकाल लेता है, तो B को कितनी निकालना चाहिए? ध्यान रहे, B को A से भी 1 मिलता है, क्योंकि A अपनी राशि के आधे भाग को B और C के बीच समान रूप से विभाजित करता है। जाहिर है, B एक सम संख्या नहीं ले सकता, क्योंकि एक सम संख्या और 1 मिलकर विषम संख्या बनाते हैं। B 1, 5, 9, 13 आदि जैसी विषम संख्याएँ भी नहीं ले सकता, क्योंकि यदि हम इनमें 1 जोड़ दें तो परिणामी संख्या एक सम संख्या होगी जो 4 से विभाजित नहीं होगी। इसलिए B को 3, 7, 11,... जैसी विषम संख्याएँ लेनी चाहिए। मान लीजिए कि B 7 इकाई लेता है, B को A से 1 मिलता है, जिसके परिणामस्वरूप कुल 8 होता है। वह अपने लिए 4 रखता है और शेष राशि को A और C के बीच समान रूप से विभाजित करता है। A के पास अब 4 इकाइयाँ हैं, B के पास 4 इकाइयाँ हैं, और C के पास अपनी राशि है और साथ-ही-साथ 1 इकाई है जो उसे A से प्राप्त हुई है, और 2 इकाइयाँ हैं जो उसे B से प्राप्त हुई हैं। अब C को कितनी मात्रा लेनी चाहिए ताकि वह पुनरावृत्त चरणों को पूरा कर सके? B की तरह, C के पास भी ऐसी राशि होनी चाहिए जो 4 का गुणज हो ताकि वह आधा अपने लिए रख सके और दूसरे आधे को A और B के बीच समान रूप से विभाजित कर सके। इसलिए

1, 5, 9, 13,... जैसी संख्याएँ C के लिए विकल्प संख्याएँ हैं। मान लीजिए कि C 5 इकाइयाँ लेता है, तो परिणाम कुछ ऐसा होगा।

	A	B	C
	4 − 2	7 + 1	5 + 1
शेष	2 + 2	8 − 4	6 + 2
शेष	4 + 2	4 + 2	8 − 4
शेष	6	6	4

अतः यदि A, B और C 4, 7 और 5 से शुरुआत करते हैं, तो वे 6, 6 और 4 (क्रमश:) पर समाप्त होते हैं। किसी भी खेल को बेहतर तरीक़े से समझना है तो यह बेहतर रहेगा कि इसे स्वयं खेला जाए।

तो थोड़ा रुकें, और तीन खिलाड़ियों के साथ खेलने की कोशिश करें। बारी-बारी से प्रत्येक खिलाड़ी एक निश्चित संख्या चुनता है। प्रत्येक खेल के अन्त में, तीनों खिलाड़ियों द्वारा शुरुआत में चुनी गई राशियों को लिखें और तीन राउंड के अन्त में तीनों खिलाड़ियों के पास कितनी राशि है उसे लिखें। उदाहरण के लिए, यदि A, B और C 4, 11 और 8 से शुरुआत करते हैं, तो यह होगा।

	A	B	C
	4 − 2	11 + 1	8 + 1
शेष	2 + 3	12 − 6	9 + 3
शेष	5 + 3	6 + 3	12 − 6
शेष	8	9	6

खेल के अन्त में, A के पास 8 इकाइयाँ बची हैं, B के पास 9 और C के पास 6। मान लीजिए, पहेली यह थी कि यदि आदान-प्रदान के बाद A, B और C के साथ जो संख्याएँ शेष हैं, वो 8, 9 और 6 हैं (क्रमशः), तो उनके पास प्रारम्भ में कितना था? इसे कैसे हल किया जाए? आइए, इस पहेली को पहेली #2 कहा जाए और इस लेख की शुरुआत में जो पहेली है उसे पहेली #1 । हम कुछ समय बाद इस पर विचार करेंगे। इस बीच, आप भी कुछ सोच-विचार कर सकते हैं कि इसे कैसे हल किया जाए।

जब हम कोई खेल खेलते हैं और परिणाम का अवलोकन करते हैं, तब हम कुछ सम्बन्ध और पैटर्न पाते हैं। तालिका-1 विभिन्न परिणामों को दर्शाती है यदि A 4 और B 11 चुनता है।

आरम्भिक राशि			अन्तिम राशि		
A	B	C	A	B	C
4	11	4	7	8	4
4	11	8	8	9	6
4	11	12	9	10	8
4	11	16	10	11	10
4	11	20	11	12	12
4	11	24	12	13	14
4	11	28	13	14	16

तालिका–1

B इस समान्तर श्रेणी में 3, 7, 11, 15 या कोई भी संख्या ले सकता था। तालिका 1 से पता चलता है कि A और B के चुनाव करने के बाद C के पास क्या विकल्प है। *हम 'अन्तिम राशि' की तालिका में कुछ पैटर्न देख सकते हैं : A और B के लिए आरम्भिक राशि समान है, C के लिए 4 इकाई की वृद्धि A, B और C की अन्तिम राशि में 1, 1 और 2 (क्रमशः) वृद्धि करती है।*

आइए, खेल को 'जीतने' के लिए नियम तय करें। जो व्यक्ति अन्त में सबसे कम स्कोर करता है वह खेल जीत जाता है। एक बार A और B ने 4 और 11 को चुन लिया तो C सबसे कम स्कोर करने के लिए 4, 8 या 12 को चुन सकता है। अगर C 16 चुनता है तो वह A (10-10) के साथ बराबरी कर लेता है। यदि C 20 चुनता है, तो वह B के साथ बराबरी कर लेता है। यदि C 24 के आगे कोई संख्या चुनता है तो वह खेल को अधिकतम राशि के साथ समाप्त करता है।

आइए खेल जीतने के नियमों को बदलने का प्रयास करें। वह व्यक्ति जो अधिकतम लाभ कमाता है (अन्तिम राशि-आरम्भिक राशि), वह खेल जीत जाता है। या जो व्यक्ति सबसे अधिक नुक़सान में है वह खेल जीत जाता है। खेल में किसे फ़ायदा होता है? या क्या यह एक निष्पक्ष खेल है?

कुछ और खेलों के स्कोर पर क़रीब से नज़र डालने से हम कुछ अन्य पैटर्न देख सकते हैं और कुछ अधिक नियम बना सकते हैं।

आरम्भिक राशि			अन्तिम राशि		
A	B	C	A	B	C
8	6	0	7	5	2
8	6	4	8	6	4
8	6	8	9	7	6
8	6	12	10	8	8

तालिका–3

आरम्भिक राशि			अन्तिम राशि		
A	B	C	A	B	C
4	3	2	4	3	2
8	6	4	8	6	4
12	9	6	12	9	6
$4x$	$3x$	$2x$	$4x$	$3x$	$2x$
8	10	11	11	10	8
16	20	22	22	20	16
$8x$	$10x$	$11x$	$11x$	$10x$	$8x$
4	7	13	8	8	8
8	14	26	16	16	16
$4x$	$7x$	$13x$	$8x$	$8x$	$8x$

तालिका–4

आरम्भिक राशि			अन्तिम राशि		
A	B	C	A	B	C
4	3	2	4	3	2
4	3	6	5	4	4
4	3	10	6	5	6
4	3	14	7	6	8

तालिका–2

उपरोक्त तालिकाएँ पैटर्न दर्शाती हैं जब अलग-अलग संख्याओं को प्रारम्भिक राशियों के रूप में चुना जाता है।

चलिए, खेल का सामान्यीकरण करते हैं। जब A कोई 8a - 4 रूप की संख्या चुनता है, B को इन रूपों में से किसी एक संख्या को चुनना होगा : 16b + 3, 16b + 7, 16b + 11, 16b + 15। तब, C को इनमें से किसी एक रूप की संख्या चुननी होगी : 4c + 2, 4c + 1, 4c, 4c + 3। इसी तरह, जब A 8a रूप की संख्या को चुनता है, B को इनमें से किसी एक रूप की संख्या चुननी होगी : 16b + 2, 16b + 6, 16b + 10, 16b + 14। तब, C को भी इनमें से किसी एक रूप की संख्या का चयन करना होगा : 4c + 1, 4c, 4c + 3, 4c + 2 (क्रमशः)।

तालिका #5 इस अवलोकन को सारांशित करती है :

A	B	C
$8a-4$	$16b+3$	$4c+2$
$8a-4$	$16b+7$	$4c+1$
$8a-4$	$16b+11$	$4c$
$8a-4$	$16b+15$	$4c+3$
$8a$	$16b+2$	$4c+1$
$8a$	$16b+6$	$4c$
$8a$	$16b+10$	$4c+3$
$8a$	$16b+14$	$4c+2$

तालिका–5

त्रिगुणों से सम्बन्धित पहेलियों को सुलझाना

आइए पहेली #2 पर वापस चलें, जहाँ यह ज्ञात है कि तीन आदान-प्रदान के बाद A, B और C के पास 8, 9 और 6 शेष हैं, और हमें आरम्भिक राशियों को ज्ञात करने की आवश्यकता है। आरम्भिक

राशियों को a, b और c मानकर और तीन समीकरण बनाकर बीजगणितीय तरीक़े से कोई भी यह ज्ञात कर सकता है। समीकरणों को हल करके हम मूल राशियों को ज्ञात करते हैं। हालाँकि पैटर्न का अध्ययन करके भी यह ज्ञात किया जा सकता है। यहाँ एक तरीक़ा सुझाया गया है।

A ने 4 के गुणज से प्रारम्भ किया होगा। इस उदाहरण में, A ने इनमें से किसी एक संख्या के साथ शुरुआत की होगी : 4, 8, 12, 16, 20।

केस-1 : क्या A 16 या 20 से शुरुआत कर सकता है? नहीं, क्योंकि पहले आदान-प्रदान के बाद ही उसके पास 8 या अधिक शेष रह जाएगा। दूसरे और तीसरे आदान-प्रदान के बाद भी खेल के अन्त में उसके पास अधिक राशि होगी। हालाँकि, यह ज्ञात है कि खेल के अन्त तक A के पास 8 शेष है। तो हम इस सम्भावना को नकार देते हैं।

केस-2 : क्या A 12 से शुरू कर सकता है? अगर ऐसा है तो पहली अदला-बदली के बाद उसके पास 6 शेष रहेंगे और खेल के अन्त में 8 तक पहुँचने के लिए केवल 2 की आवश्यकता होगी। ऐसा होने के लिए, B और C को चाहिए कि A को 1 प्रदान करें, या उनमें से किसी एक को 0 प्रदान करना चाहिए और दूसरे को 2 प्रदान करना चाहिए। यदि B 1 प्रदान करता है, तो B के पास 4 होना चाहिए। तब, C के पास 7 होंगे (23 - 12 - 4 = 7)। A और B के 1-1 हिस्से के साथ, C के पास 9 होगा जिसे विभाजित नहीं किया जा सकता है। इसलिए B A को 1 नहीं प्रदान कर सकता। आइए, अब B द्वारा A को 2 प्रदान करने पर विचार करें। इस स्थिति में, B के पास 8 होना चाहिए। यदि A के पास 12 है और B के पास 8 है, तो C के पास 3 होगा। चूँकि C के पास 3 है तो C में कुछ भी जोड़ा जाने पर कम-से-कम 1 A को प्रदान होगा, जो हम नहीं चाहते हैं। तो, हम इस सम्भावना को भी नकार देते हैं।

केस-3 : क्या A 8 से शुरुआत कर सकता है? यदि ऐसा है तो B के पास इन रूपों में से कोई एक संख्या होगी : 16x + 2, 16x + 6, 16x + 10, 16x + 14। C के पास इन रूपों में से कोई एक संख्या होगी : 4c + 1, 4c, 4c + 3, 4c + 2 (तालिका-5 देखें)। इन बिन्दुओं को ध्यान में रखते हुए, B के पास 2, 6, 10 या 14 हो सकते हैं। इस वजह से C के पास विकल्प के रूप में (23 - A की राशि - B की राशि) 13, 9, 5 या 1 (क्रमशः) बचता है।

- यदि B के पास 2 है, तो A से 2 का हिस्सा मिलने के पश्चात B को A को ¼ हिस्सा और C को ¼ हिस्सा प्रदान करना होगा, चूँकि C के पास 13 होना चाहिए (23 - A की राशि - B की राशि)। दूसरे आदान-प्रदान के बाद C के पास 16 होंगे लेकिन उसके पास केवल 12 होना चाहिए क्योंकि अन्त में उसके पास 6 बचा है। तो, यह कारगर नहीं है।
- यदि B के पास 6 है, तो C के पास 9 होगा और दूसरे आदान-प्रदान के बाद C के पास 12 की बजाय 13 शेष रह जाएगा।
- यदि B के पास 10 है, तो C के पास 5 होगा और दूसरे आदान-प्रदान के बाद C के पास 12 की बजाय 10 शेष रह जाएगा।
- हमें यह भी जाँचने की आवश्यकता नहीं है कि B के पास 14 है या नहीं क्योंकि पहले के मामले को देखने के बाद हम निश्चिंत हैं कि C के पास 10 से कम शेष रहेगा।

हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि A के पास 8 नहीं हो सकता। इसलिए A के पास 4 है।

केस-4 : A के पास 4 है। तालिका-5 के अनुसार, B के पास 3, 7, 11 या 15 होंगे और इसी अनुसार C के पास चार अलग-अलग मान होंगे। चार मामलों पर विचार करके, हम तीन को हटा देंगे और केवल एक मामला शेष रह जाएगा जो 4, 11 और 8 की प्रारम्भिक राशि है।

सामान्य रूप का उपयोग करके, हम पहेलियाँ बना सकते हैं, जहाँ तीन आदान-प्रदान के बाद अन्तिम परिणाम दिया गया है और किसी को आरम्भिक राशियों को ज्ञात करना है जो तीन लोगों के पास थी। पहेली को सुलझाने के लिए अन्य रणनीतियाँ हो सकती हैं जो पाठक अपने आप खोज सकते हैं।

चिन्तन करने हेतु कुछ बिन्दु

निष्कर्ष के पहले, यहाँ कुछ बिन्दुओं पर विचार करने की जरूरत है :

1. तालिका-4 में प्रारम्भिक कुछ पंक्तियाँ दर्शाती हैं कि जब हम 4x, 3x और 2x के रूप की तीन संख्याओं पर विचार करते हैं तो खेल पुनरावृति जैसा हो जाएगा। तो, (4, 3, 2) को एक ***आवर्ती भिन्नात्मक त्रिक*** कहा जाए।
2. तीन आदान-प्रदान के बाद (4x, 7x, 13x) रूप के त्रिक का परिणाम (8x, 8x, 8x) के रूप में हासिल होता है। चलिए, (4, 7, 13) को एक ***समान भिन्नात्मक त्रिक (Uniform Fractional Triplet)*** कहा जाए। क्या (4x, 7x, 13x) रूप का एक त्रिक ***समान भिन्नात्मक त्रिक*** नहीं है? यदि हाँ, तो कितने हो सकते हैं? अगर नहीं, तो क्यों नहीं हो सकते?
3. तीन आदान-प्रदान के बाद (8x, 10x, 11x) रूप के त्रिक का परिणाम (11x, 10x, 8x) के रूप में हासिल होता है। चलिए, (8, 10, 11) एक को एक ***विपरीत भिन्नात्मक त्रिक*** (Reverse Fractional Triplet) कहा जाए। क्या एक ***विपरीत भिन्नात्मक त्रिक*** (8x, 10x, 11x) के रूप का नहीं हो सकता है? यदि हाँ, तो कितने हो सकते हैं? अगर नहीं, तो क्यों नहीं हो सकते?
4. तीन आदान-प्रदान के बाद त्रिक (4, 15, 3) का परिणाम (8, 10, 4) के रूप में हासिल होता है। पर यह, यहीं नहीं रुकता। हम इसे आगे जारी रख सकते हैं और पाँच आदान-प्रदान के बाद (7, 6, 9) तक पहुँच सकते हैं। क्या कोई ऐसा त्रिक होगा जिसके लिए पाँच से अधिक आदान-प्रदान किए जा सकते हैं? यदि ऐसा है तो आदान-प्रदान की अधिकतम संख्या क्या है जो किसी प्रस्तुत त्रिक के साथ की जा सकती है? ऐसे कितने त्रिक हो सकते हैं? क्या हम इसे किसी उपपत्ति (प्रमाण) के साथ साबित कर सकते हैं?
5. त्रिक के बजाय, आइए हम एक क्वाडरप्लट (चार वस्तुओं का समुच्चय) (6, 5, 4, 3) पर विचार करें जहाँ चार व्यक्ति खेल खेलते हैं और तीन के बजाय चार आदान-प्रदानों की आवश्यकता होती है। चार पुनरावृत्तियों के बाद, (6, 5, 4, 3) का परिणाम (6, 5, 4, 3) प्राप्त होता है, यानी, वही क्वाडरप्लेट। तो, यह एक ***आवर्ती भिन्नात्मक क्वाडरप्लट (Repeating Fractional Quadruplet)*** है। इसी प्रकार (8, 7, 6, 5, 4) ***एक आवर्ती भिन्नात्मक क्वीनटप्लट (Repeating Fractional Quintuplet)*** है। क्या हम ऐसे और उदाहरण ढूँढ़ सकते हैं?
6. क्या हम ***भिन्नात्मक क्वाडरप्लट (Fractional Quadruplet)*** और ***भिन्नात्मक क्वीनटप्लट (Fractional Quintuplet)*** का सामान्य रूप ज्ञात कर सकते हैं?
7. क्या हम ***समान (Uniform), आवृति (Repeating), विपरीत (Reverse)*** त्रिक के अलावा नए प्रकार के त्रिक ज्ञात कर सकते हैं?

क्या हम पहेली#1 को हल कर सकते हैं, जब अन्तिम संख्याएँ (या तीनों के पास जो बचा है उसका कुल योग) मालूम नहीं है? आप क्या सोचते हैं?

विनय नायर *रेज़िंग अ मैथमेटेसियन फ़ाउण्डेशन* के सह-संस्थापक हैं। वह भारत के विभिन्न हिस्सों में गणित में अन्वेषणात्मक अध्ययन तथा प्राचीन भारतीय गणित से सम्बन्धित कई ऑनलाइन और ऑफलाइन कार्यक्रम संचालित करते हैं। वे विद्यालय के विद्यार्थियों के बीच एक शोधार्थी जैसी मानसिकता स्थापित करना चाहते हैं। उनसे vinay@sovm.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कुमार गन्धर्व मिश्र **पुनरीक्षण :** हृदय कान्त दीवान **सम्पादन :** राजेश उत्साही