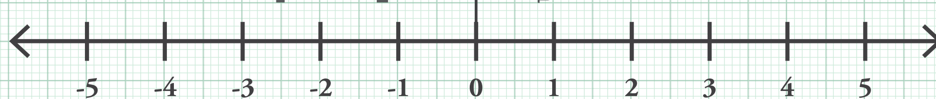
At Right Angles

A Resource for School Mathematics

शिक्षण पूर्णांक

पद्मप्रिया शिराली



Azim Premji University

A publication of Azim Premji University together with Community Mathematics Centre, Rishi Valley

पूर्णांक

प्रस्तावना : शुरुआत में ही यह बताना महत्त्वपूर्ण है कि कुछ अवधारणाओं को समझने में मदद के लिए तैयार की गई युक्तियाँ (manipulative) विषय के स्वयंसिद्ध (axiomatic) विकास के प्रतिस्थापन के लिए नहीं हैं। मूलत: इनका उद्देश्य विद्यार्थियों को गणितीय अवधारणाओं के लिए अपने स्वयं के मानसिक मॉडल तैयार करने में सक्षम बनाना है।

किसी भी नए विषय या अवधारणा से परिचय कराना हमेशा ही पेचीदा होता है। कहाँ से शुरुआत करना अच्छा रहेगा? क्या ज्ञात से शुरू करना चाहिए और फिर नए तत्वों की ओर बढ़ना चाहिए? इससे शैक्षिक समझ अच्छी होगी।

या दुनिया के साथ विद्यार्थियों के परिचय और सम्बन्ध के माध्यम से इस विषय (अनुप्रयोगों) से उनके सम्पर्क (exposure) की जाँच करके वहाँ से शुरुआत करनी चाहिए?

या उनसे कुछ ऐसे सवाल पूछने चाहिए जिनके जवाब उनके द्वारा हासिल किए जा चुके गणितीय ज्ञान के अन्तर्गत न आते हों?

या क्या कृत्रिम रूप से कुछ ऐसा रचा जा सकता है, जो अवधारणा को गढ़ता हो?

शायद कोई भी एक तरीक़ा सबसे अच्छा नहीं है। इस बारे में प्रत्येक शिक्षक का निर्णय अपने विद्यार्थियों के ज्ञान के स्तर, उनकी उम्र, उनके सम्पर्क, उनकी तैयारी व सीखने की उनकी इच्छा पर आधारित होता है।

बहुत-से लोगों के लिए पूर्णांकों और ख़ासकर ऋणात्मक संख्याओं को समझना चुनौतीपूर्ण होता है। इससे सम्बन्धित एक कठिनाई इस तथ्य में निहित है कि किसी वस्तु, किसी संख्या को इंगित करने वाली संख्या के साथ जो ऋणात्मक चिह्न इस्तेमाल किया जाता है, वही ऋणात्मक चिह्न घटाव (subtraction) की संक्रिया के साथ भी इस्तेमाल किया जाता है। दूसरी समस्या पढ़ने के हमारे तरीक़े में निहित है। उदाहरण के लिए, $-(-2)$ को हम ऋणात्मक 2 को घटाना (minus negative 2) पढ़ते हैं। इसे समझना आसान नहीं है। इनमें से कुछ समस्याओं को मूर्त से अमूर्त की ओर धीरे-धीरे बढ़ते हुए (जैसे कि इस पद्धति में दर्शाया गया है) दूर किया जा सकता है।

एक विषय के रूप में 'पूर्णांकों' से परिचय आमतौर पर कक्षा 6 में कराया जाता है। अधिकांश पाठ्यपुस्तकों में पूर्णांकों के प्रासंगिक उपयोग (तापमान, समुद्र तल, हानि और लाभ आदि) के बारे में बात की जाती है और गुणा या भाग की ओर बढ़ने से पहले जोड़ व घटाव को दर्शाने के लिए संख्या रेखा के इस्तेमाल के बारे में बताया जाता है। कुछ पुस्तकों में दो रंगों के काउंटर के इस्तेमाल से भी शुरुआत की जाती है।

मैं यहाँ एक ऐसी पद्धति साझा कर रही हूँ जो मैंने श्री पी. के. श्रीनिवासन से सीखी है। मैंने कई सालों तक विद्यार्थियों के बहुत सारे समूहों के साथ सफलतापूर्वक इसका उपयोग किया है और कार्यशालाओं के दौरान कई शिक्षकों के साथ इसे साझा किया है। इस पद्धति को काफ़ी सकारात्मक प्रतिक्रियाएँ मिली हैं और अपनी कक्षा में इसे लागू करने वाले कई शिक्षकों ने इसकी सराहना की है। कार्यशालाओं में इस पद्धति को साझा करना आसान होता है। वहाँ मैं इससे सम्बन्धित विभिन्न प्रश्नों व शंकाओं का जवाब स्पष्ट रूप से दे सकती हूँ। मुझे उम्मीद है कि मैं इस लेख में इस पद्धति में शामिल विविध चरणों को स्पष्ट रूप से बता पाऊँगी। साथ ही मैं इस पद्धति के प्रभाव व इसके आकर्षण को व्यक्त करने में भी सफल हो पाऊँगी।

आमतौर पर बच्चों (विशेषकर दस-ग्यारह साल के बच्चों) को खेल बहुत आकर्षित करते हैं। यह पद्धति भी एक खेल से ही शुरू होती है। यह एक ही सामग्री का इस्तेमाल करके जोड़ व घटाव सीखने की ओर बढ़ती है और विद्यार्थियों को जोड़ व घटाव के नियमों की उत्पत्ति का पता लगाने में मदद करती है। शुरुआती चरणों में ठोस सामग्री का इस्तेमाल करने से विद्यार्थियों को समस्या की कल्पना करने में आसानी होती है। इसके अलावा कई दिनों तक लगातार एक ही सामग्री और पद्धति का इस्तेमाल करने से समस्या को दर्शाने के अन्य रूपों से सामना होने से पहले ही विद्यार्थियों में समस्या को एक ख़ास तरह से देखने का तरीक़ा पुख़्ता हो जाता है।

खेल के ज़रिए पूर्णांकों से परिचय

गतिविधि 1 : विपरीत का खेल

उद्देश्य : पूर्णांकों के गुण (विपरीत पूर्णांक एक-दूसरे को काट देते हैं) का मॉडल तैयार करना।

सामग्री : लाल व हरे बटन (प्रत्येक रंग के 20 बटन), इन्हें रखने के लिए एक छोटी थैली और एक जोड़ी पासा।

खेल का नियम : दो विपरीत पूर्णांक एक-दूसरे को काट देते हैं।

लक्ष्य : किसके पास सबसे ज़्यादा जोड़ियाँ हैं?

विद्यार्थियों के दो समूह बनाए जा सकते हैं।

पहले समूह के खिलाड़ी पासा फेंकें और बटनों का रंग देखे बिना पासे में आई संख्या के बराबर बटन थैले में से निकाल लें। फिर वह उन बटनों को ज़मीन पर रख लें और एक-एक करके बटनों की जोड़ियों (एक लाल व एक हरा बटन) को अलग करते जाएँ। फिर वह जोड़ियों को गिनकर उनकी संख्या लिख लें। और फिर सारे बटन थैले में वापिस रख लें।

चित्र-1

इसी तरह दूसरे समूह के सदस्य भी पासा फेंकें और उसमें आई संख्या के बराबर बटन एकत्र करें। उन्हें ज़मीन पर रखें और जोड़ियों को अलग करके गिन लें। फिर बटनों को वापिस थैले में रख लें।

जिस समूह के पास ज़्यादा जोड़ियाँ होंगी उसे एक अंक मिलेगा। यदि दोनों समूहों के पास बराबर जोड़ियाँ हुईं तो किसी भी समूह को कोई अंक नहीं मिलेगा।

चित्र-2 : यहाँ 3 जोड़ियाँ दर्शाई गई हैं।

चित्र-3 : यहाँ 5 जोड़ियाँ दर्शाई गई हैं।

खेल को तब तक जारी रखा जा सकता है जब तक किसी एक समूह को एक बार में सभी छह जोड़ियाँ न मिल जाएँ। शिक्षण के अगले चरण पर जाने से पहले कई दिनों तक विद्यार्थियों को यह खेल खिलाया जा सकता है।

गतिविधि 2

उद्देश्य : पूर्णांकों के जोड़ का मॉडल तैयार करना।

सामग्री : लाल व हरे बटन (प्रत्येक रंग के 10), चित्र-6 में दिखाए अनुसार दो पासे (एक रंग के लिए और एक संख्या के लिए), परिणामों को दर्ज करने के लिए प्रत्येक विद्यार्थी के लिए चौकोर खाने वाले काग़ज़।

लक्ष्य : 12 लाल या हरे और खेल ख़त्म !

यह मिल-जुलकर खेले जाने वाला खेल है। विद्यार्थी **चित्र-8** में दर्शाए अनुसार इसके विभिन्न चरणों को चौकोर खाने वाले काग़ज़ में दर्ज करते जाएँ।

इस स्तर पर शिक्षक धनात्मक व ऋणात्मक शब्द से विद्यार्थियों का परिचय करवा सकते हैं कि हरा बटन धनात्मक व लाल बटन ऋणात्मक को दर्शाता है। 'यह धनात्मक 3 है।' 'यह ऋणात्मक 4 है।' और इसी तरह आगे भी।

चित्र-4

चित्र-5

चित्र-6

चित्र-7

लाल व हरे बटनों को अलग-अलग कर लें और मेज़ पर अलग-अलग रख लें।

पहला समूह पहले रंग वाले पासे को फेंके और फिर संख्या वाले पासे को फेंके और उसके हिसाब से बटनों को जमाए।

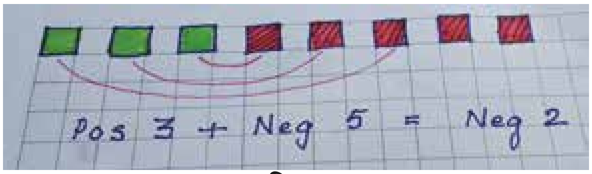
उदाहरण : यदि रंग वाला पासा लाल दर्शाए और संख्या वाला पासा 5 तो समूह को 5 लाल बटन उठाने होंगे।

अब दूसरा समूह अपने पासे फेंके और उसके हिसाब से बटनों को जमाए।

उदाहरण : यदि रंगों वाला पासा हरा और संख्या वाला पासा 3 दर्शाए तो समूह को हरे रंग के 3 बटन उठाने होंगे।

अब बटनों को एक साथ रखें (3 हरे और 5 लाल बटनों को एक साथ) और शिक्षक विद्यार्थियों को पढ़कर बताएँ, "अब हमारे पास धनात्मक 3 व ऋणात्मक 5 हैं।"

अब बटनों की जितनी भी जोड़ियाँ मौजूद हैं उन्हें अलग कर लें। इस स्थिति में (2 लाल बटन) ऋणात्मक 2 बचेगा। जैसा कि आप यहाँ देख सकते हैं, जोड़ के इस चरण को लिखकर व चित्र बनाकर दोनों तरह से दर्ज किया गया है।



चित्र-7 अ

यदि किसी भी समय योगफल (12 हरे या लाल बटन) धनात्मक 12 या ऋणात्मक 12 हो जाता है, तो खेल वहीं ख़त्म हो जाएगा।

टिप्पणी : *यह तीनों सम्भावित संयोजनों— धनात्मक और धनात्मक, ऋणात्मक और ऋणात्मक, धनात्मक और ऋणात्मक (हरे और हरे, लाल और लाल, लाल और हरे) को जन्म देगा। चूँकि यहाँ दी गई संख्याएँ छोटी (सभी 7 से छोटी) हैं, इसलिए विद्यार्थी बटनों का इस्तेमाल किए बिना भी जवाब दे सकते हैं। हालाँकि उन्हें परिणामों को दर्ज करने के लिए प्रोत्साहित करें क्योंकि यह जब भी ज़रूरी हो तब इसे पुनर्निर्मित करने की उनकी क्षमता को विकसित करने में सहायता करेगा और एक दृश्य याद (visual memory) के रूप में उनके लिए मददगार होगा।*

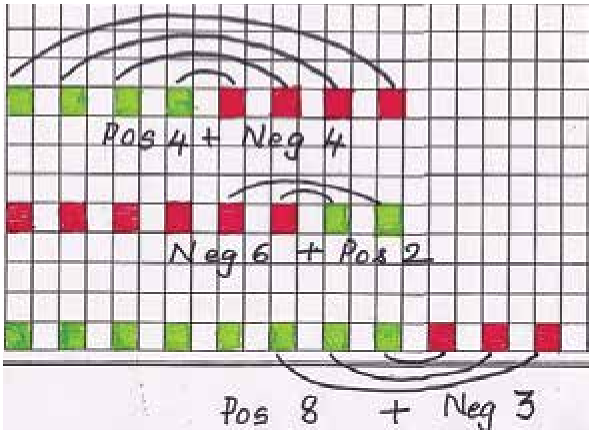
अतिरिक्त अभ्यास के तौर पर विद्यार्थियों से व्यक्तिगत कार्य करवाने के लिए शिक्षक बोर्ड पर कुछ अन्य संयोजन (10 से छोटी संख्याएँ इस्तेमाल करते हुए) भी लिख सकते हैं।

धनात्मक 4, ऋणात्मक 4

ऋणात्मक 6, धनात्मक 2

धनात्मक 8, ऋणात्मक 3

जिन विद्यार्थियों को अवधारणा अच्छी तरह समझ आ गई हो वह चित्रों का सहारा लिए बिना भी जवाब दे सकते हैं। हालाँकि उन्हें अपने जवाबों को चित्रात्मक मॉडल इस्तेमाल करके दर्शाने के लिए प्रेरित करना चाहिए।



चित्र-8

टिप्पणी : *शुरुआती स्तरों में आप धनात्मक व ऋणात्मक शब्दों का प्रयोग करें। बाद में जब जोड़ व घटाव की अवधारणाएँ पूरी तरह स्पष्ट हो जाएँ तो आप इन शब्दों के स्थान पर + और − चिह्न इस्तेमाल कर सकते हैं। यह बेहद महत्त्वपूर्ण है क्योंकि + व − के चिह्नों को दिए गए इन नए मायनों के साथ सहज होने में विद्यार्थियों को समय लगता है। यदि हम शुरुआत में अवधारणा पर ध्यान केन्द्रित करें और बाद में धीरे-धीरे चिह्नों से विद्यार्थियों का परिचय कराएँ तो उनके लिए आसानी होगी।*

वास्तव में इसका अर्थ यह है कि प्रारम्भ में + (जोड़) और − (घटाव) चिह्न केवल संक्रियाओं को दर्शाने के लिए इस्तेमाल किए जाएँगे, न कि संख्या का चिह्न बताने के लिए। चिह्नों को दर्शाने के लिए शुरुआत में हम 'धना' और 'ऋणा' लिखेंगे।

गतिविधि 3

उद्देश्य : पूर्णांकों के जोड़ का मौखिक कार्य।

लक्ष्य : पूर्णांकों के जोड़ की मानसिक कल्पना करने का अभ्यास करना।

एक बार जब दृश्य साधनों के ज़रिए अवधारणा विद्यार्थियों के दिमाग़ में पूरी तरह बैठ जाए तो वह अमूर्त विचार के लिए तैयार होते हैं। शिक्षक कुछ मौखिक सत्र रख सकते हैं जिनमें वे विद्यार्थियों को बड़ी सन्निकट संख्याएँ (rounded numbers) दे सकते हैं।

उदाहरण : ऋणात्मक 75, धनात्मक 40 या धनात्मक 200, ऋणात्मक 120 आदि।

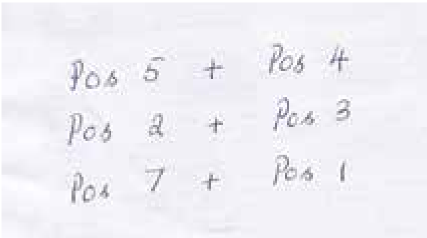
गतिविधि 4

उद्देश्य : पूर्णांकों के जोड़ के नियम।

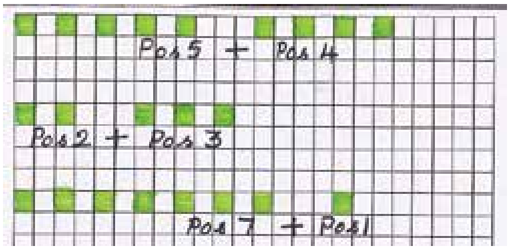
लक्ष्य : पूर्णांकों के जोड़ के नियमों का अवलोकन करना व उन्हें व्युत्पन्न करना।

शिक्षक पूर्णांकों के जोड़ की प्रत्येक प्रकार की स्थिति (धना+धना, ऋणा+ऋणा, धना+ऋणा) के लिए विविध प्रकार के सवाल विद्यार्थियों के सामने रखें।

उदाहरण : धना 5 + धना 4, धना 2 + धना 3, धना 7 + धना 1



चित्र-9

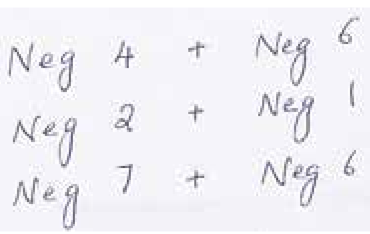


चित्र-9 अ

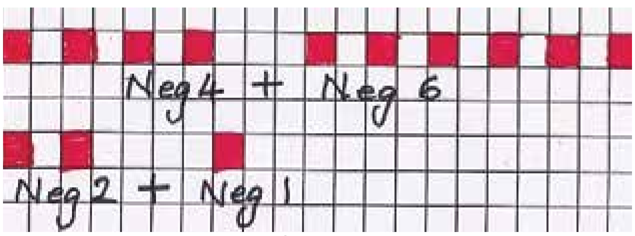
विद्यार्थी सामग्री का इस्तेमाल करें और परिणामों को चौकोर खाने वाले एक काग़ज़ पर दर्ज कर लें। वह ध्यान देंगे कि जब एक धनात्मक संख्या को एक धनात्मक संख्या में जोड़ा जाता है तो उत्तर भी धनात्मक होता है और संख्या दी गई दोनों संख्याओं का योगफल होती है।

इसी तरह के सवाल दो ऋणात्मक संख्याएँ देकर भी पूछे जा सकते हैं।

उदाहरण : ऋणा 4 + ऋणा 6, ऋणा 2 + ऋणा 1, ऋणा 7 + ऋणा 6



चित्र-10

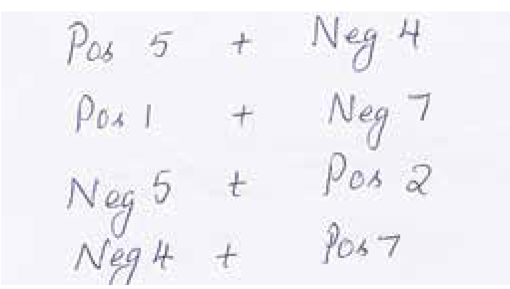


चित्र-10 अ

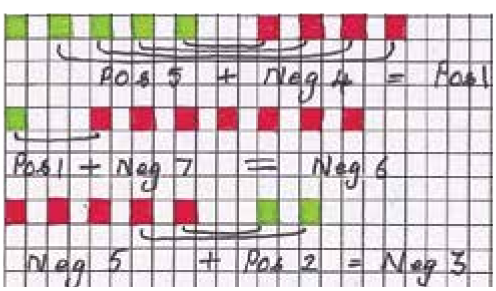
विद्यार्थी सामग्री का इस्तेमाल करें और परिणामों को चौकोर खाने वाले एक काग़ज़ पर दर्ज कर लें। वह देखेंगे कि जब एक ऋणात्मक संख्या को एक ऋणात्मक संख्या में जोड़ा जाता है तो उत्तर भी ऋणात्मक होता है और संख्या दी गई दोनों संख्याओं का योगफल होती है।

अगला चरण थोड़ा चुनौतीपूर्ण है, जब हम एक धनात्मक और एक ऋणात्मक संख्या के संयोजन पर विचार करते हैं।

उदाहरण : धना 5 + ऋणा 4, धना 1 + ऋणा 7, ऋणा 5 + धना 2, ऋणा 4 + धना 7



चित्र-11



चित्र-11 अ

एक बार फिर उन्हें सभी सवालों को चित्रों की सहायता से दर्ज करने को कहें।

पैटर्न को खोजने के लिए विद्यार्थियों को उपयुक्त सवालों के साथ मार्गदर्शन की आवश्यकता होगी।

शुरुआत में शिक्षक, विद्यार्थियों को उत्तर के संख्यात्मक हिस्से पर ध्यान केन्द्रित करने में मदद कर सकते हैं।

उत्तर दोनों संख्याओं से किस तरह जुड़ता है?

वह यह देख पाएँगे कि उत्तर की संख्या दी गई दोनों संख्याओं के बीच का अन्तर है।

हम कैसे पता करें कि परिणाम धनात्मक है या ऋणात्मक? शिक्षक किसी एक उदाहरण को लेकर विद्यार्थियों से यह सवाल पूछ सकते हैं, "यहाँ धनात्मक ज़्यादा हैं या ऋणात्मक?" "क्या इससे उत्तर पर कोई प्रभाव पड़ता है?"

धीरे-धीरे विद्यार्थियों को एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांक के जोड़ के लिए नियम बनाने में मदद करें।

जब एक धनात्मक और एक ऋणात्मक संख्या को जोड़ा जाता है तो उत्तर की संख्या दोनों संख्याओं का अन्तर होगी और चिह्न उस पूर्णांक का होगा जो शून्य से ज़्यादा दूरी पर हो।

गतिविधि 4 अ

उद्देश्य : पूर्णांकों के घटाव का मॉडल तैयार करना।

सामग्री : लाल और हरे बटन (प्रत्येक रंग के 20 बटन)।

लक्ष्य : सामग्री का इस्तेमाल कर घटाव करने में सक्षम होना।

पूर्णांकों के घटाव को दो प्रकार की स्थितियों में वर्गीकृत किया जा सकता है।

मैंने इन दोनों प्रकारों को उदाहरण के ज़रिए बताया है।

स्थिति 1 : जब अलग करने के लिए पर्याप्त संख्या हों :

धना 5 – धना 2 या ऋणा 7 – ऋणा 1

विद्यार्थियों को धना 5 से सम्बन्धित बटन लेने को कहें। उन्हें उसमें से धना 2 हटाने के लिए कहें। इसमें कोई कठिनाई नहीं है और इसका उत्तर है धना 3।

इसी तरह वे ऋणा 7 से सम्बन्धित बटन लें और उसमें से ऋणा 1 को अलग कर दें तो परिणाम होगा ऋणा 6।

एक बार फिर विद्यार्थी इन परिणामों को चौकोर खाने वाले एक काग़ज़ में दर्ज कर लें।

चित्र-12

स्थिति 2 अ : जब अलग करने के लिए पर्याप्त संख्या न हों और संख्याएँ विपरीत चिह्नों वाली हों।

धना 3 – ऋणा 2

विद्यार्थियों से धना 3 से सम्बन्धित बटन उठाने को कहें। वह 3 हरे बटन उठा लेंगे।

अब उनसे पूछें, "क्या इन बटनों से ऋणा 2 अलग करने का कोई तरीक़ा है?"

शुरुआत में उनका जवाब होगा, "नहीं!"

फिर भी कुछ संकेत देकर उन्हें और सोचने के लिए प्रेरित करें, "मैं इसमें से ऋणा 2 को केवल तभी अलग कर सकती/सकता हूँ जब मेरे पास यहाँ ऋणा 2 हो। क्या ऐसा कोई तरीक़ा है जिससे मेरे पास जो है उसका मान बदले बिना मेरे पास ऋणा 2 हो जाए?"

चित्र-13

चित्र-14

'इसका (धना 3) क्या मान होगा यदि यहाँ विपरीत पूर्णांकों की एक जोड़ी लाई जाए तो?'

विद्यार्थी देखेंगे कि इससे मान में कोई बदलाव नहीं आएगा क्योंकि जोड़ियाँ एक-दूसरे को काट देंगी। कुछ विद्यार्थी यह सुझाव भी दे सकते हैं कि दो जोड़ियाँ लाई जा सकती हैं और उन्हें इन बटनों के साथ जोड़ा जा सकता है।

चित्र-14 अ

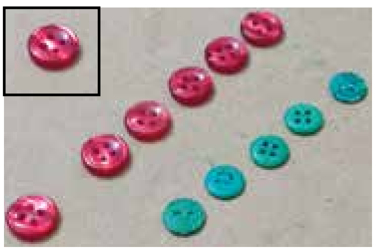
चित्र-14 ब

अब हमारे पास धना 5 और ऋणा 2 हैं। अब ऋणा 2 को हटाना सम्भव है।

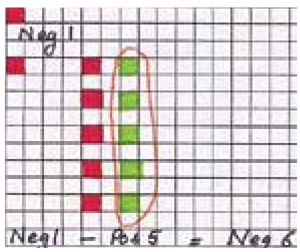
क्या बचा? धना 5

तो धना 3 – ऋणा 2 का परिणाम हुआ धना 5।

बाद में हम जिस तर्क व प्रक्रिया का पालन करेंगे उसे समझने के लिए इसे चित्रों के रूप में दर्ज करना और सम्बन्धित चरणों को संख्यात्मक रूप से लिखना बेहद महत्त्वपूर्ण है।



चित्र-15 अ



चित्र-15 ब

ऋणा 1 – धना 5 के लिए भी यही प्रक्रिया अपनाई जाएगी।

ऋणात्मक 1 को दर्शाने के लिए विद्यार्थी एक लाल बटन उठाएँगे। अब इसमें से धना 5 को हटाना है।

ऐसा करने के लिए हमें कितनी जोड़ियाँ लानी चाहिए? 5 जोड़ियाँ।

अब ऋणा 6 और धना 5 को एक साथ रखते हैं। धना 5 को हटा दें तो ऋणा 6 बचेगा।

तो इस प्रकार ऋणा 1 – धना 5 का परिणाम हुआ ऋणा 6।

स्थिति 2 ब : जब अलग करने के लिए पर्याप्त संख्या न हों और संख्याएँ समान चिह्नों वाली हों।

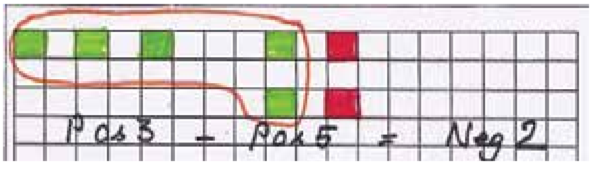
धना 3 – धना 5

इस स्थिति में हमें क्या करना चाहिए? धना 3 को दर्शाने के लिए विद्यार्थी 3 हरे बटन लेंगे। इसमें से धना 5 को कैसे हटाया जा सकता है? कुछ विद्यार्थी तुरन्त ही यह समझ जाएँगे कि हम यहाँ वही तरीक़ा अपना सकते हैं जो हमने पिछली बार अपनाया था यानी कि 5 जोड़ियाँ ले आएँ।

अब हमारे पास हुए धना 8 और ऋणा 5। अब धना 5 हटा लें।

यहाँ मौजूद तीन जोड़ियाँ भी हटा लें। तो क्या बचा?

इस प्रकार धना 3 – धना 5 का परिणाम हुआ ऋणा 2।



चित्र-16

हालाँकि कोई भी यह सुझा सकता है कि केवल 2 जोड़ियाँ और लाने से ज़्यादा आसानी होगी क्योंकि हटाना तो धना 5 को है। इस स्थिति में हमारे पास धना 5 और ऋणा 2 होंगे। और धना 5 को हटाने पर बचेगा ऋणा 2।

तो धना 3 – धना 5 हुआ ऋणा 2।

दोनों ही तरीक़े मान्य हैं और दूसरा वाला ज़्यादा प्रभावशाली है।

विद्यार्थियों को सामग्री का इस्तेमाल करके इस तरह के कई सारे सवालों का अभ्यास करना होगा, उन्हें चित्रों के माध्यम से दर्शाना होगा और चरणों को संख्यात्मक रूप से दर्ज करना होगा।

घटाव की विभिन्न स्थितियों के लिए विशेष नियम प्राप्त करना सम्भव है, जबकि इतने सारे नियम व शर्तों को याद रखना बोझिल और मुश्किल हो जाता है। इसके बजाय एक बार जब विद्यार्थी पहले बताई गई घटाव की अवधारणा के साथ सहज हो जाएँ तो यह दर्शाना आसान हो जाता है कि एक पूर्णांक का घटाव उसके योज्य प्रतिलोम (additive inverse) के जोड़ के समान है। यह उस संख्यात्मक प्रक्रिया से मेल खाती है जिसका पालन हम सामान्यत: करते हैं। इसे अगली गतिविधि में स्थापित किया गया है।

गतिविधि 5

उद्देश्य : ठोस सामग्रियों के इस्तेमाल की विधि और संख्यात्मक प्रक्रिया के बीच के सम्बन्ध को दर्शाना।

सामग्री : चौकोर खाने वाले काग़ज़।

लक्ष्य : यह समझाना कि घटाव को दूसरी संख्या के योज्य प्रतिलोम को जोड़कर किया जाता है।

विद्यार्थियों को सवाल दें, धना 3 – ऋणा 2

विद्यार्थियों से कहें कि पहले धना 3 को चित्र के रूप में दर्ज कर लें।

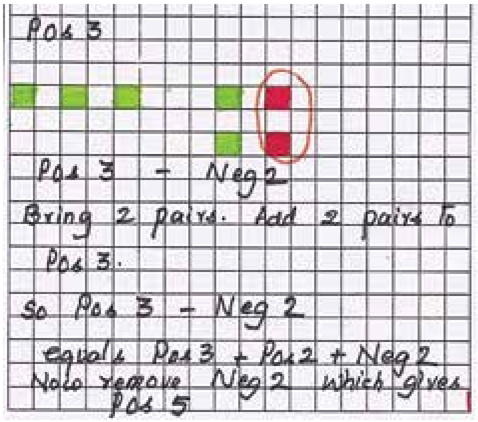
अब विद्यार्थियों को यह देखने में मदद करने के महत्त्वपूर्ण चरण पर आते हैं कि धनात्मक 3 में से ऋणा 2 को हटाना असल में दो जोड़ियों (धना 2 व ऋणा 2) को जोड़ना है।

धना 3, धना 3 + धना 2 + ऋणा 2 के बराबर ही है।

इस बात की ओर उनका ध्यान दिलाएँ कि धना 2 को ऋणा 2 का योज्य प्रतिलोम कहा जाता है क्योंकि धना 2 व ऋणा 2 मिलकर शून्य होते हैं।

अब दर्शाएँ कि ऋणा 2 को हटाने पर धना 5 बचता है।

यह स्पष्ट करने में उनकी मदद करें कि घटाव को उस पूर्णांक का योज्य प्रतिलोम जोड़कर भी प्राप्त किया जा सकता है जिसे घटाया जाना है।



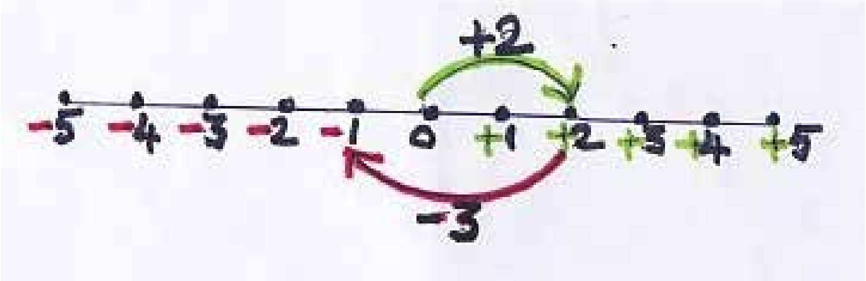
चित्र-17

गतिविधि 6

उद्देश्य : संख्या रेखा पर विपरीत संख्याओं को दर्शाना और + व – के चिह्नों से परिचय कराना।

सामग्री : चॉक।

लक्ष्य : धनात्मक व ऋणात्मक संख्याओं को समझाना और यह समझाना कि ऋणात्मक चिह्न वाली संख्याएँ शून्य से छोटी होती हैं।



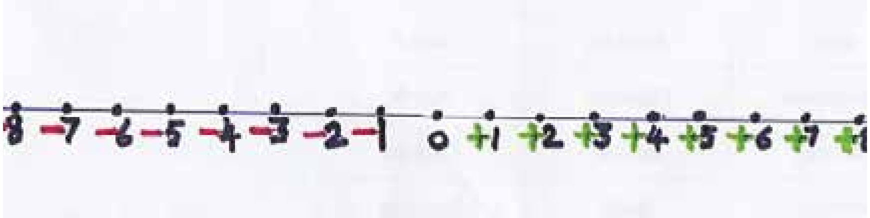
चित्र-18

शिक्षक किसी एक विद्यार्थी से तीन क़दम चलने को कहें। वह विद्यार्थी बिना कोई सवाल-जवाब किए तीन क़दम आगे की ओर चल सकता है। शिक्षक इस बात की ओर विद्यार्थियों का ध्यान दिला सकते हैं कि उन्होंने अभी यह स्पष्ट नहीं किया था कि किस दिशा में आगे जाना है।

अब शिक्षक फ़र्श पर एक लाइन बनाकर उसमें 0, 1, 2, 3, 4 व 5 अंकित कर सकते हैं। विद्यार्थी से शून्य पर खड़े होने को कहें और अब शिक्षक अपने निर्देश को दोहराएँ, "दो क़दम आगे की ओर चलो।" विद्यार्थी संख्या 2 तक पहुँच जाएगा। "अब तीन क़दम पीछे की ओर चलो।" विद्यार्थी देखेगा कि उसे शून्य के पार जाना होगा और वह शून्य के पीछे एक नई स्थिति में पहुँच जाता है।

अब शिक्षक विद्यार्थियों को यह समझाएँ कि नई स्थिति को ऋणात्मक के रूप में चिह्नित किया गया है। अब संख्या रेखा को दोनों ओर धनात्मक 10 से ऋणात्मक 10 तक आगे बढ़ाएँ।

अब शिक्षक धनात्मक व ऋणात्मक के चिह्नों से विद्यार्थियों का परिचय करा सकते हैं कि 'धनात्मक' को एक '+' चिह्न द्वारा और



चित्र-19

'ऋणात्मक' को एक '–' चिह्न द्वारा दिखाया जाता है। अब आप संख्या रेखा पर चिह्नों के साथ संख्याएँ अंकित करें।

अब शिक्षक उन्हें बता सकते हैं कि '+' चिह्न को अक्सर लिखा नहीं जाता है, यानी कि +2 को आमतौर पर 2 लिखा जाता है।

इस बात की ओर उनका ध्यान दिलाएँ कि जैसे-जैसे आप शून्य की बाईं ओर जाते हैं संख्याएँ छोटी होती जाती हैं और जैसे-जैसे आप शून्य के दाईं ओर जाते हैं संख्याएँ बड़ी होती जाती हैं। साथ ही संख्या रेखा की किन्हीं भी दो संख्याओं के लिए बाईं ओर की संख्या दाईं ओर की संख्या से छोटी होती है। इसका मतलब हुआ कि $-3 < -1$ जबकि $1 < 3$ होता है।

अब विद्यार्थी संख्या रेखा का इस्तेमाल कर संख्याओं की तुलना कर सकते हैं, बड़ी व छोटी, पूर्ववर्ती व परवर्ती संख्या निर्धारित कर सकते हैं और संख्याओं की तुलना करने के नियम व्युत्पन्न कर सकते हैं।

गतिविधि 7

उद्देश्य : तापमान के सन्दर्भ में पूर्णांकों के इस्तेमाल को दर्शाना।

सामग्री : कुछ ठण्डे स्थानों का तापमान चार्ट।

लक्ष्य : तापमान के सन्दर्भ में धनात्मक व ऋणात्मक संख्याओं को समझाना।

शिक्षक तापमान की अवधारणा और थर्मामीटर के ज़रिए इसे किस तरह डिग्री सेल्शियस में मापा जाता है इस पर विद्यार्थियों के साथ चर्चा करें। पहले सब मिलकर उनके क्षेत्र के तापमान चार्ट का अध्ययन कर सकते हैं। गर्मी के दिनों में सामान्य तापमान कितना होता है? सर्दियों में रात का तापमान कितना होता है? फ्रिज़ के अन्दर का तापमान कितना होता होगा? शिक्षक विद्यार्थियों को बता सकते हैं कि पानी 0° सेल्शियस पर जम जाता है और 100° सेल्शियस पर उबलता है।

अब शिक्षक विद्यार्थियों को बता सकते हैं कि बहुत ठण्डी जगहों में तापमान अक्सर 0° सेल्शियस से नीचे चला जाता है। तापमान की जानकारी को दर्ज करने के तरीक़े, – चिह्न का इस्तेमाल और सेल्शियस को दर्शाने के लिए C अक्षर के इस्तेमाल की ओर विद्यार्थियों का ध्यान आकर्षित किया जाना चाहिए।

शिक्षक और विद्यार्थी मिलकर कुछ ठण्डी जगहों के तापमान चार्ट पर चर्चा कर सकते हैं।

अब चार्ट के आधार पर कई तुलनात्मक कथन कहे जा सकते हैं :

- कौन-सा स्थान सबसे ठण्डा है?
- कौन-सा स्थान सबसे गर्म है?
- किन स्थानों का तापमान 0°C से कम है?
- किन स्थानों का तापमान –8°C से 5° ज़्यादा है?
- किन स्थानों का तापमान –10°C से 2° कम है?
- सबसे गर्म स्थान व सबसे ठण्डे स्थान के तापमान में कितना अन्तर है?

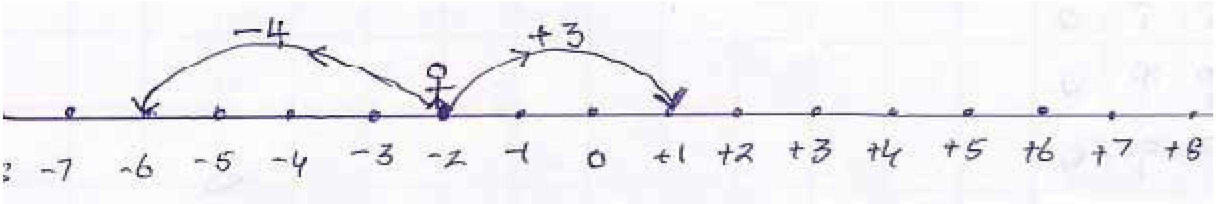
गतिविधि 8

उद्देश्य : संख्या रेखा पर पूर्णांकों के जोड़ को दर्शाना।

सामग्री : चॉक।

लक्ष्य : आगे बढ़ने को धनात्मक और पीछे जाने को ऋणात्मक से सम्बद्ध करना।

अभी तक विद्यार्थियों ने धनात्मक व ऋणात्मक को संख्या रेखा पर स्थितियों के साथ सम्बद्ध किया है। अब उन्हें धनात्मक जोड़ने को संख्या रेखा पर आगे बढ़ने और ऋणात्मक जोड़ने को संख्या रेखा पर पीछे जाने से सम्बद्ध करना होगा।



चित्र-20

फ़र्श पर –10 से +10 तक की संख्याओं को दर्शाती एक संख्या रेखा बनाएँ। यह समझने में विद्यार्थियों की मदद करें कि +2 जोड़ने का मतलब है अपनी वर्तमान स्थिति से दो क़दम आगे बढ़ना। –3 जोड़ने का मतलब है अपनी वर्तमान स्थिति से 3 क़दम पीछे की ओर जाना।

शिक्षक विद्यार्थियों से दिए गए किसी सवाल को संख्या रेखा पर दर्शाने के लिए कह सकते हैं।

उदाहरण : (–2) + (+3)

+3 के जोड़ को दर्शाने के लिए विद्यार्थी संख्या रेखा पर –2 से चलना शुरू करता है और 3 क़दम आगे की ओर बढ़कर +1 पर पहुँच जाता है।

उदाहरण : (−2) + (−4)

−4 के जोड़ को दर्शाने के लिए विद्यार्थी संख्या रेखा पर −2 से शुरू करके 4 क़दम पीछे की ओर चलता है और −6 की स्थिति पर पहुँच जाता है।

इस प्रकार के विविध सवालों का अभ्यास किया जा सकता है और एक मॉडल तैयार किया जा सकता है जब तक कि सभी विद्यार्थी इसे समझ न लें।

वे इसे विपरीत तरह से भी कर सकते हैं।

एक विद्यार्थी सवाल को दर्शाए। अन्य विद्यार्थी जोड़ के तथ्य बताएँ।

इस स्तर पर पाठक यह उम्मीद कर सकते हैं कि अगली गतिविधि संख्या रेखा पर घटाव की होगी। हालाँकि घटाव को संख्या रेखा पर दर्शाना सम्भव है, लेकिन प्रक्रियात्मक रूप से यह ज़्यादा जटिल हो जाता है। घटाव में संख्या रेखा पर विपरीत जाना होगा जिसे समझना विद्यार्थियों के लिए कठिन होता है।

व्यक्तिगत रूप से मैंने पाया है कि घटाव के लिए लाल व हरे बटन वाली पद्धति पर्याप्त है। हालाँकि यदि पाठक संख्या रेखा का इस्तेमाल कर घटाव सिखाना चाहते हैं तो वे एनसीईआरटी की कक्षा 6 की किताब देख सकते हैं।

***टिप्पणी :** अब यह ज़रूरी है कि संख्याओं के साथ काम करते हुए जिस पद्धति को हमने पहले अपनाया था और जो मानक विधियाँ हैं उनके बीच की कड़ी को देखने में विद्यार्थियों की मदद की जाए। शिक्षक कोष्ठक का इस्तेमाल कर सकते हैं यदि ऐसा करने से मदद मिलती है।*

उदाहरण के लिए :

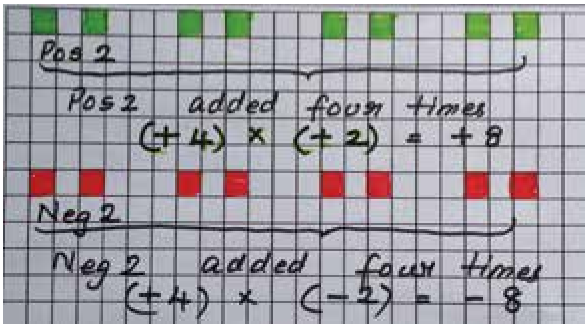
- धना 5 + ऋणा 4 को अब 5 + (−4) = 1 के रूप में लिखें।
- ऋणा 4 + धना 7 को अब (−4) + 7 = 3 के रूप में लिखें।
- धना 3 − ऋणा 2 को 3 − (−2) = 3+2=5 के रूप में लिखें।
- धना 3 − धना 5 को 3 − 5 = 3 + (−5) = −2 के रूप में लिखें।

गतिविधि 9

उद्देश्य : पूर्णांकों के गुणे को दर्शाना।

सामग्री : चौकोर खाने वाले काग़ज़।

लक्ष्य : गुणे को दर्शाना।



चित्र-21

उदाहरण : (+4) × (+2)

इसे इस तरह पढ़ते हैं कि धना 2 को चार बार जोड़ना है।

तो (+4) × (+2) = +8

उदाहरण : (+4) × (−2)

इसे इस तरह पढ़ते हैं कि ऋणा 2 को चार बार जोड़ना है।

तो (+4) × (−2) = −8

उदाहरण : (−4) × (−2)

इसे हम इस तरह पढ़ते हैं कि ऋणा 2 को चार बार घटाना है।

यहाँ ऐसा कुछ नहीं है जिसे किसी में से घटाना है। तो हम आवश्यक संख्याओं की जोड़ियाँ लेते हैं।

ऋणा 2 को इसके विपरीत धना 2 के साथ चार बार लाया जाता है।

अब हम चार बार (−2) को हटाते हैं। तो परिणाम होता है +8।

इसलिए (−4) × (−2) = +8

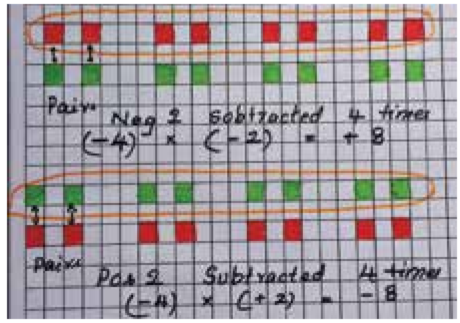
उदाहरण : (−4) × (+2)

इसे हम इस तरह पढ़ते हैं कि धना 2 को चार बार घटाना है।

एक बार फिर हमारे पास घटाने की शुरुआत करने के लिए कोई संख्या नहीं है। तो दो जोड़ियाँ चार बार लाते हैं।

अब हम धना 2 को चार बार हटा सकते हैं तो बचता है ऋणा 8।

तो (−4) x (+2) = −8



चित्र-22

गतिविधि 10

उद्देश्य : पूर्णांकों के गुणे को दर्शाना।

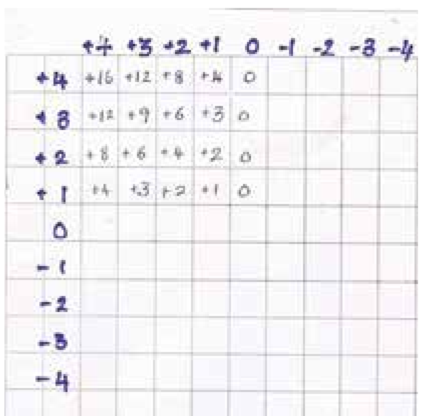
सामग्री : चौकोर खाने वाले काग़ज़।

लक्ष्य : पैटर्न के माध्यम से पूर्णांकों के गुणे के नियम व्युत्पन्न करना।

विद्यार्थियों को **चित्र**-23 में दिखाए अनुसार एक तालिका बनाने को कहें।

पहले चरण में, विद्यार्थियों से अपेक्षा है कि वह तालिका के पहले चौथाई हिस्से को भरें।

दूसरे चरण में, विद्यार्थी प्रत्येक पंक्ति का अवलोकन करें (कि संख्या किस तरह से घट रही है) और प्रत्येक पंक्ति को पूरा करने के लिए शून्य के आगे भी पैटर्न को जारी रखें।



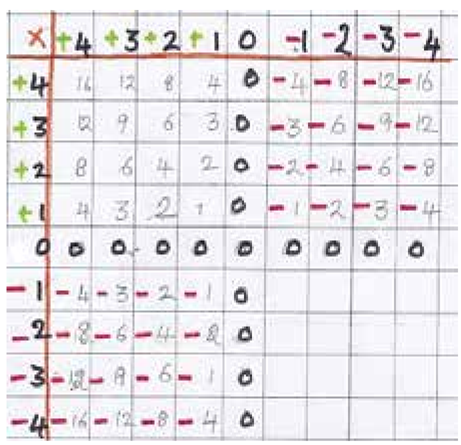
चित्र-23

चित्र-23 अ

तीसरे चरण में, विद्यार्थी +4 से 0 तक के स्तम्भों को एक-एक करके देखें और ख़ाली वर्गों को भरें।

अब महत्त्वपूर्ण हिस्से पर आते हैं। इस पैटर्न को स्तम्भवार और पंक्तिवार दोनों तरह से जारी रखा जा सकता है। चाहे जिस भी तरीक़े से करें विद्यार्थी यह देख पाएँगे कि अब संख्याएँ ऋणात्मक पक्ष से शुरू होती हैं और 1 या 2 या 3 के चरणों में बढ़ती हैं।

यह बताते हुए शिक्षकों को अतिरिक्त ध्यान रखने की ज़रूरत है कि अब पंक्तियाँ या स्तम्भ ऋणात्मक संख्याओं से शुरू होते हैं व धीरे-धीरे बढ़ते हैं और शून्य के बाद की संख्याएँ धनात्मक हो जाती हैं।

एक बार जब तालिका पूरी हो जाए और शिक्षक उसे जाँच लें तो विद्यार्थी पूर्णांकों के गुणे के नियम प्राप्त करना शुरू कर सकते हैं।

चित्र-23 ब

- क्या होता है जब एक धनात्मक संख्या को एक धनात्मक संख्या से गुणा किया जाता है?
- क्या होता है जब एक धनात्मक संख्या को एक ऋणात्मक संख्या से गुणा किया जाता है?
- क्या होता है जब एक ऋणात्मक संख्या को एक धनात्मक संख्या से गुणा किया जाता है?
- क्या होता है जब एक ऋणात्मक संख्या को एक ऋणात्मक संख्या से गुणा किया जाता है?

मेरा अनुभव रहा है कि पैटर्न पद्धति सरल व सन्तोषजनक है और विद्यार्थी इसे पसन्द करते हैं।

नीचे दी गई गतिविधि **10** अ, गुणे को दर्शाने के एक अन्य तरीक़े (जो कि पी. के. श्रीनिवासन द्वारा सुझाया गया है) का वर्णन करती है।

गतिविधि 10 अ

उद्देश्य : बटनों का इस्तेमाल करके गुणे को दर्शाना।

सामग्री : लाल व हरे बटन (प्रत्येक रंग के 20 बटन)।

नियम : धनात्मक का मतलब हुआ एक ही तरीक़े से दोहराना।
(यानी कि एक ही रंग को दोहराना)। ऋणात्मक का मतलब हुआ विपरीत तरीक़े से दोहराना (यानी कि विपरीत रंग को दोहराना)।

लक्ष्य : पूर्णांकों के गुणे के नियम व्युत्पन्न करना।

उदाहरण : (+4) × (+2) को दर्शाना

इसे हम कैसे पढ़ें? इसे इस तरह पढ़ा जा सकता है कि धनात्मक 2 को धनात्मक 4 बार दोहराया गया है।

इससे हम क्या समझते हैं? यह तो स्पष्ट है कि धनात्मक 2, यानी कि 2 हरे बटन।

धनात्मक 4 बार दोहराने का अर्थ है कि चार बार एक ही तरीक़े से दोहराना।

चित्र-24

चित्र-24 अ

चित्र-24 ब

तो 2 हरे बटनों को चार बार दोहराया जाता है जिससे कि 8 हरे बटन प्राप्त होते हैं।

उदाहरण : (+2) × (−2) को दर्शाना

इसे इस तरह पढ़ा जा सकता है कि ऋणात्मक 2 को धनात्मक 2 बार दोहराया गया है।

धनात्मक 2 बार दोहराने का अर्थ है कि दोनों बार **एक ही तरीक़े** से दोहराना है।

इस प्रकार (+2) × (−2) बराबर हुआ −4

उदाहरण : (−2) × (+4) को दर्शाना

यहाँ 4 हरे बटनों को दो बार दोहराया जाता है लेकिन विपरीत तरीक़े से (यानी कि रंग बदल जाता है)।

4 हरे बटनों को 4 लाल बटनों से बदल दिया जाता है और दो बार दोहराया जाता है।

इस प्रकार (−2) × (+4) हुआ −8

उदाहरण : (−2) × (−2) को दर्शाना

2 लाल बटनों को विपरीत तरीक़े से दो बार दोहराया जाता है।

इस प्रकार हमें मिलेंगे 4 हरे बटन।

(-2) × (-2) = + 4

गतिविधि 11

उद्देश्य : पूर्णांकों के विभाजन को दर्शाना।

लक्ष्य : भाग के सवालों को हल करने के लिए पूर्णांकों के गुणे के नियमों को लागू करना।

गुणे के नियमों से भाग के नियम स्वाभाविक रूप से निकलते हैं।

इसलिए भाग के सवालों को सम्बन्धित गुणन-तथ्यों का इस्तेमाल कर हल किया जा सकता है।

उदाहरण : $-10 \div (+5) = -2$ ($+5 \times -2 = -10$ का इस्तेमाल करके)

खेल 1 : आख़िरी सिरों तक दौड़!

उद्देश्य : पूर्णांकों के जोड़ का अभ्यास करना।

सामग्री : संख्या रेखा और काउंटर्स, पूर्णांक कार्ड्स (−1 से −10, +1 से +10)

लक्ष्य : कौन पहले +20 या −20 तक पहुँचता है?

खिलाड़ी दो अलग-अलग रंगों के काउंटर्स इस्तेमाल करें। दोनों खिलाड़ी शून्य से शुरू करें। पूर्णांक कार्ड्स को उलटा करके रखें। प्रत्येक खिलाड़ी एक पूर्णांक कार्ड उठाए और कार्ड में लिखी संख्या के अनुसार अपने काउंटर को संख्या रेखा पर उतने क़दम आगे की ओर या पीछे की ओर ले जाए।

उदाहरण :

यदि किसी खिलाड़ी के कार्ड में −2 लिखा होता है तो वह अपने काउंटर को शून्य से −2 तक ले जाता है। अगली बारी में यदि उसे −4 वाला कार्ड मिलता है तो वह अपने काउंटर को −2 से −6 पर ले जाता है। जो भी + या − 20 पर पहले पहुँचेगा वह जीत जाएगा।

खेल 2 : संख्याएँ काटने का खेल!

उद्देश्य : पूर्णांकों के जोड़ व घटाव का अभ्यास करना।

सामग्री : संख्याओं वाले 2 पासे

लक्ष्य : −5 से 12 तक की सभी संख्याओं को काटना

प्रत्येक खिलाड़ी −5 से 12 तक की एक संख्या रेखा बना लें। दोनों पासों को फेंकें और −5 से 12 के बीच ज़्यादा-से-ज़्यादा संख्याएँ बनाने के लिए पासे में आई संख्याओं को जोड़ें या घटाएँ। जो-जो संख्याएँ वह बना लें उन्हें काटते जाएँ। प्रत्येक खिलाड़ी बारी-बारी से पासा फेंके और कुछ संख्याओं को काटे। जो भी सबसे पहले सारी संख्याएँ काट लेगा वही जीतेगा।

आभार : सुश्री स्वाती सरकार को उनके सुझावों के लिए धन्यवाद।

पद्मप्रिया शिराली

पद्मप्रिया शिराली सह्याद्रि स्कूल (पुणे) और ऋषिवैली स्कूल (आन्ध्र प्रदेश) में स्थित कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेंटर से 1983 से जुड़ी हुई हैं। वहाँ वह विभिन्न विषय (गणित, कम्प्यूटर एप्लीकेशन, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू) पढ़ाती हैं। पिछले कुछ वर्षों तक वह टीचर आउटरीच कार्य में लगी हुई थीं। वर्तमान में वह एससीईआरटी (आन्ध्र प्रदेश) के साथ पाठ्यचर्या सुधार और प्राथमिक स्तर की गणित की पाठ्यपुस्तकों पर कार्य कर रही हैं। नब्बे के दशक में उन्होंने चेन्नई के प्रसिद्ध गणित-शिक्षक स्वर्गीय श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ मिलकर काम किया। वह उस टीम का हिस्सा थीं जिसने ऋषि वैली रूरल सेंटर के मल्टीग्रेड एलिमेंट्री लर्निंग प्रोग्राम (जिसे 'स्कूल इन अ बॉक्स' के नाम से जाना जाता है) का निर्माण किया था। उनसे padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कविता तिवारी **सम्पादन :** राजेश उत्साही