

## क्या कभी कोई समान्तर चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज नहीं भी होता है?

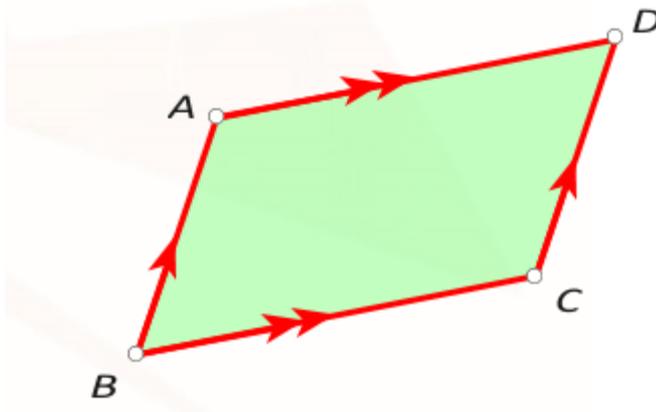
### कोमेक

**मुख्य शब्द :** चतुर्भुज, समान्तर चतुर्भुज, एसएस (भुजा-कोण-भुजा) सर्वांगसमता, एसएस (कोण-भुजा-कोण) सर्वांगसमता, एसएसएस (भुजा-भुजा-भुजा) सर्वांगसमता

दिखने में तो एक समान्तर चतुर्भुज, समतल ज्यामिति की एक बहुत सरल और बुनियादी आकृति लग सकती है, पर इसकी यह सरलता एक फ़रेब है; दरअसल, इसमें भरपूर संरचनात्मक समृद्धि समाई हुई है। इसकी यह समृद्धि तब उजागर होती है जब हम यह सवाल पूछते हैं : समान्तर चतुर्भुज की पहचान क्या है? दूसरे शब्दों में, किसी चतुर्भुज में कौन-से न्यूनतम गुणधर्म होने चाहिए जिनके आधार पर कहा जा सके कि यह एक समान्तर चतुर्भुज है?

समान्तर चतुर्भुज की संरचनात्मक समृद्धता का एहसास इसी तथ्य से हो जाता है कि इसे कई अलग-अलग तरीकों से परिभाषित किया जा सकता है और ये तरीके परस्पर समतुल्य होते हैं। ज्यामितीय आकृतियों का कोई ऐसा अन्य प्रकार नहीं है जो इतने अलग-अलग, फिर भी समतुल्य तरीकों से परिभाषित किया जा सके।

समान्तर चतुर्भुज की मूलभूत परिभाषा है : – एक समतल चतुर्भुजीय आकृति जिसकी भुजाओं के सम्मुख जोड़े एक-दूसरे के समान्तर होते हैं। अर्थात्, चार-भुजाओं वाली एक समतल आकृति  $ABCD$  एक समान्तर चतुर्भुज है, अगर और सिर्फ अगर  $AB \parallel CD$  और  $AD \parallel BC$



चित्र-1

यहाँ प्रस्तुत है समान्तर चतुर्भुज की एक परिभाषा जिससे पाठक अपरिचित हो सकते हैं, क्योंकि यह रूपान्तरण ज्यामिति की भाषा में गढ़ी गई है : – समान्तर चतुर्भुज द्वितीय श्रेणी की घूर्णन सममिति वाला एक चतुर्भुज होता है। अर्थात् यदि चतुर्भुज  $ABCD$  के तल में एक ऐसा बिन्दु  $O$  मौजूद हो जिसे केन्द्र मानकर आधा घुमाने पर  $ABCD$  पुनः मूल चतुर्भुज पर आरेखित हो जाए तो वह समान्तर चतुर्भुज है।

### अन्य वैकल्पिक परिभाषाएँ

समान्तर चतुर्भुज को परिभाषित करने के कुछ और तरीके देखिए। इनमें से हरेक परिभाषा ऊपर दी गई मूल परिभाषा के समतुल्य है। हरेक में हमने प्रमाण का एक-पंक्ति संकेत दिया है। हर जगह, हमने 'if and only if' (अगर और सिर्फ अगर) को संक्षिप्त रूप **iff** में लिखा है। इसके अलावा, हर जगह 'चतुर्भुज' से हमारा आशय 'समतल चतुर्भुज' है।

1. एक चतुर्भुजी आकृति  $ABCD$  एक समान्तर चतुर्भुज है, iff  $AB = CD$  व  $AD = BC$ । दूसरे शब्दों में, कोई चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज हो जाता है iff सम्मुख भुजाओं के दोनों जोड़े समान लम्बाई के हों। प्रमाण – त्रिभुजों की एक उपयुक्त जोड़ी पर भुजा-भुजा-भुजा (Side-Side-Side — SSS) सर्वांगसमता लागू करें।
2. एक चतुर्भुजी आकृति  $ABCD$  एक समान्तर चतुर्भुज है, iff  $\angle A = \angle C$  और  $\angle B = \angle D$ । दूसरे शब्दों में, – कोई चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है iff सम्मुख कोणों की दोनों जोड़ियाँ बराबर माप की हों। प्रमाण – त्रिभुजों की एक उपयुक्त जोड़ी पर कोण-भुजा-कोण (Angle-Side-Side — ASA) सर्वांगसमता लागू करें।
3. कोई चतुर्भुजी आकृति  $ABCD$  समान्तर चतुर्भुज है, iff  $AB \parallel CD$  व  $AD = BC$ । यानी कोई चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है, iff सम्मुख भुजाओं की एक जोड़ी की भुजाएँ परस्पर समान्तर हों और समान लम्बाई की हों। प्रमाण – त्रिभुजों की एक उपयुक्त जोड़ी पर भुजा-कोण-भुजा (Side-Angle-Side — SAS) सर्वांगसमता लागू करें।
4. कोई चतुर्भुजी आकृति  $ABCD$  समान्तर चतुर्भुज है, iff विकर्ण  $AC$  व  $BD$  एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। दूसरे शब्दों में, एक चतुर्भुज एक समान्तर चतुर्भुज हो जाता है iff विकर्ण एक-दूसरे को समद्विविभाजित करते हैं। प्रमाण – त्रिभुजों की एक उपयुक्त जोड़ी पर एसएसएस सर्वांगसमता लागू करें।

चूँकि ये वैकल्पिक परिभाषाएँ जानी-मानी हैं, सो हम अब इन पर और विचार नहीं करेंगे। हम तो कुछ नई सम्भावनाओं पर विचार करेंगे।

**क्या निम्नलिखित शर्तें एक समान्तर चतुर्भुज को परिभाषित करती हैं?**

नीचे हम एक समान्तर चतुर्भुज के पाँच अलग-अलग गुणधर्मों का हवाला देते हुए हरेक के सन्दर्भ में पूछेंगे कि क्या विचाराधीन गुणधर्म किसी समान्तर चतुर्भुज की पहचान है; अर्थात्, अगर किसी समतल चतुर्भुज में वह गुणधर्म है तो क्या वह अनिवार्यतः समान्तर चतुर्भुज होगा?

1. यदि  $ABCD$  एक समान्तर चतुर्भुज है, तो उसका प्रत्येक विकर्ण उसे समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुज-युग्मों में बाँटता है। तो क्या यह नियम एक समान्तर चतुर्भुज को परिभाषित करता है? दूसरे शब्दों में, यदि  $ABCD$  एक ऐसा चतुर्भुज है जिसका प्रत्येक विकर्ण इसे दो बराबर-बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बाँटता है तब क्या  $ABCD$  अनिवार्यतः एक समान्तर चतुर्भुज होगा?
2. यदि  $ABCD$  एक समान्तर चतुर्भुज है, और  $AB = CD$  व  $AD \parallel BC$  है। क्या यह स्थिति किसी समान्तर चतुर्भुज को वर्णित करती है? दूसरे शब्दों में, अगर  $ABCD$  एक ऐसा चतुर्भुज है जिसमें  $AB = CD$  व  $AD \parallel BC$  है तब क्या  $ABCD$  अनिवार्यतः एक समान्तर चतुर्भुज है?
3. यदि  $ABCD$  एक समान्तर चतुर्भुज है, तो  $AB = CD$  व  $\angle A = \angle C$  है। क्या यह परिस्थिति एक समान्तर चतुर्भुज को दर्शाती है? दूसरे शब्दों में, यदि  $ABCD$  एक ऐसा चतुर्भुज है कि  $AB = CD$  व  $\angle A = \angle C$  है तो क्या  $ABCD$  निश्चित ही एक समान्तर चतुर्भुज है?
4. यदि  $ABCD$  एक समान्तर चतुर्भुज है, तो उसकी भुजाओं के वर्ग का योग, उसके विकर्णों के वर्ग के योग के बराबर होगा। क्या ऐसा होने से वह एक समान्तर चतुर्भुज हो जाता है? दूसरे शब्दों में, यदि  $ABCD$  एक चतुर्भुज है, कुछ इस तरह कि  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$  तो क्या  $ABCD$  अनिवार्यतः एक समान्तर चतुर्भुज है?
5. यदि  $ABCD$  एक समान्तर चतुर्भुज है तो उसके किसी भी आन्तरिक बिन्दु से भुजाओं की लम्बवत दूरियों का योग उस बिन्दु की स्थिति से स्वतंत्र होता है। क्या यह स्थिति एक समान्तर चतुर्भुज की विशिष्टता है? दूसरे शब्दों में, यदि  $ABCD$  एक ऐसा चतुर्भुज है कि उसके किसी अन्दरूनी बिन्दु से उसकी भुजाओं तक की लम्बवत दूरियों का योग उस बिन्दु की स्थिति पर निर्भर नहीं करता, तो क्या  $ABCD$  अनिवार्यतः एक समान्तर चतुर्भुज होगा?

आपको यह जानकर आश्चर्य होगा कि इन पाँच परिस्थितियों में से तीन समान्तर चतुर्भुज को की वास्तविक विशेषताएँ हैं; लेकिन बाकी दो नहीं! अब हम यह आप पर छोड़ते हैं कि आप उन दो 'गड़बड़' परिस्थितियों का पता लगाएँ जो 'फिट नहीं बैठतीं'। (हाँ, इनमें से हरेक मामले में पहले वाक्य में किया गया दावा सही है। हो सकता है आप क्रमांक 4 व 5 में किए गए दावों से वाकिफ़ न हों।)

## References

1. Jonathan Halabi, 'Puzzle: proving a quadrilateral is a parallelogram' from <https://jd2718.org/2007/01/10/puzzleproving-a-quadrilateral-is-a-parallelogram/>
2. Wikipedia, 'Parallelogram' from <https://en.wikipedia.org/wiki/Parallelogram>

---

कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेंटर (कोमॅक) ऋषि वैली एजुकेशन सेंटर (आन्ध्र प्रदेश) व सहयाद्रि स्कूल (कृष्णमूर्ति फ़ाउण्डेशन) की एक विस्तार शाखा है। गणित अध्यापन के लिए यह कार्यशालाएँ आयोजित करती है और राज्य सरकारों तथा गैर-सरकारी संस्थाओं के लिए शिक्षण सामग्री तैयार करती है। इससे सम्पर्क का पता है – [shailesh.shirali@gmail.com](mailto:shailesh.shirali@gmail.com)

अनुवाद : मनोहर नोतानी      अनुवाद पुनरीक्षण : सुशील जोशी

कॉपी-एडिटर : अनुज उपाध्याय (सभी एकलव्य फ़ाउण्डेशन)

सम्पादन : राजेश उत्साही, कविता तिवारी