सममिति के लेंस से - भाग 2

हमारे आस-पास के वॉलपेपर पैटर्न और सममिति

गीता वेंकटरमन

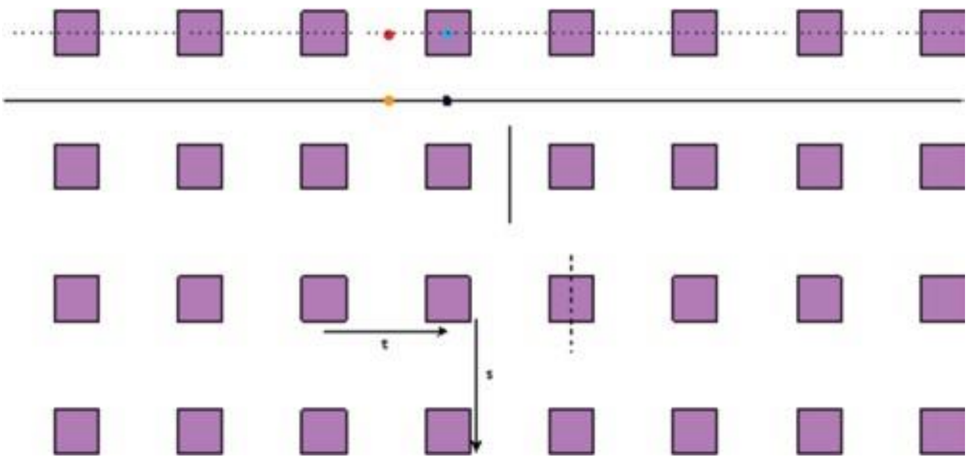
मुख्य शब्द : *सममिति, परावर्तन, घूर्णन, स्थानान्तरण, ग्लाइड, फ़्रीज़ पैटर्न, वॉलपेपर पैटर्न, टेसेलेशन, अल्हाम्ब्रा, एस्चर*

यह दो भागों वाले लेख का दूसरा भाग है जिसका उद्देश्य पाठकों को सममिति की गणितीय अवधारणा और मूलभूत विचार से परिचित कराना है। लेख का पहला भाग सममिति की 'कामकाजी परिभाषा' पर केन्द्रित था और उसमें सममिति को समझने की गणितीय बुनियाद भी तैयार की गई थी। इसमें ऐसे चित्रों की सममिति पर विचार किया गया था जिन्हें काग़ज़ की शीट पर बनाया जा सकता है तथा एक विशेष तरह के अपरिमित पैटर्न (*चित्रवल्लरी* या *फ़्रीज़ पैटर्न)* के विषय में चर्चा की गई थी।

इस भाग में हम एक और दो-आयामी पैटर्न (जिसे *वॉलपेपर पैटर्न* कहते हैं) पर ध्यान देंगे और हमारे आस-पास की रोज़मर्रा की चीज़ों में सममिति के पहलुओं का पता भी लगाएँगे। सहूलियत के लिए हम यहाँ सममिति की 'कामकाजी परिभाषा' को दोहरा लेते हैं।

सरल रूप में, सममिति किसी वस्तु पर की गई ऐसी क्रिया है जिससे वह वस्तु ठीक वैसी ही दिखाई दे और पहले की भाँति ही जगह घेरे। इस क्रिया के दौरान अगर कोई व्यक्ति अपनी आँखें बन्द रखे तो उसे पता भी नहीं चल पाएगा कि कोई क्रिया की गई है।

जिन भी वस्तुओं को काग़ज़ पर बनाया जा सकता है (परिमित समतल वस्तुएँ) उनमें मुख्यत: दो सममिति हो सकती हैं : घूर्णन और सम्भवत: परावर्तन। चित्रवल्लरी पैटर्न में एक नए तरीक़े की सममिति होती है, जिसे *स्थानान्तरण सममिति* (Translation Symmetry) कहते हैं। इसमें निम्नलिखित तरह की कुछ अन्य सममितियाँ भी हो सकती हैं : 180 डिग्री घूर्णन, परावर्तन (Reflection) और स्थानान्तरण-परावर्तन (Glide-reflection)। लेख के भाग-1 में इन सभी की विस्तार में चर्चा हुई है और पाठकों को सलाह दी जाती है कि वे उसकी मदद लें। अब हम वॉलपेपर पैटर्न या टेसेलेशन सममितियों की खोजबीन करेंगे।



चित्र-1

वॉलपेपर पैटर्न या टेसेलेशन (पच्चीकारी)

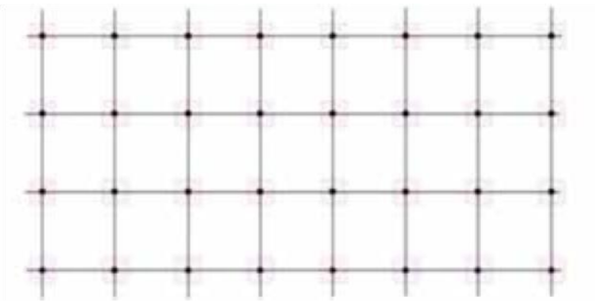
जैसा कि नाम से ही स्पष्ट है, यह एक अपरिमित पैटर्न होगा जो बाएँ-दाएँ और ऊपर-नीचे दोनों दिशाओं में फैला होगा। वॉलपेपर पैटर्न बनाने का पहला तरीक़ा है कि एक चित्रवल्लरी चुनकर उसे ऊपर तथा नीचे से समान अन्तराल पर जमाया जाए। **चित्र-1** वॉलपेपर पैटर्न का एक उदाहरण है।

चित्र-1 के वॉलपेपर पैटर्न में दो अलग-अलग दिशाओं में स्थानान्तरण है जिन्हें **s** और **t** से दर्शाया गया है। इसमें परावर्तन की दो प्रकार की ऊर्ध्व रेखाएँ हैं (टूटी रेखा और ठोस रेखा) और इसी तरह परावर्तन की दो प्रकार की क्षैतिज रेखाएँ भी हैं। इसमें चार अलग-अलग तरह के घूर्णन-केन्द्र हैं जिनमें से प्रत्येक के सापेक्ष 180 डिग्री घूर्णन सम्भव है। (ध्यान दें कि चूँकि **t** की लम्बाई **s** से अलग है इसलिए निर्मित ग्रिड आयताकार होगी न कि वर्गाकार। इसलिए विकर्ण रेखाओं पर परावर्तन या घूर्णन केन्द्र से 90 डिग्री घूर्णन हमें वॉलपेपर पैटर्न की सममिति नहीं देगा।) अब जब हमारे पास स्थानान्तरण और परावर्तन की सममितियाँ हैं तो हमारे पास स्थानान्तरण-परावर्तन भी होगा। पाठक ऊपर दिए गए वॉलपेपर पैटर्न में स्थानान्तरण-परावर्तन को अंकित करने की कोशिश कर सकते हैं।

वॉलपेपर पैटर्न का वर्गीकरण और भी अधिक जटिल है। कुल 17 प्रकार के वॉलपेपर पैटर्न[1] होते हैं। ऐसा माना जाता है कि स्पेन के ग्रेनाडा में चौदहवीं सदी के अल्हाम्ब्रा महल में सभी 17 प्रकार के वॉलपेपर पैटर्न मौजूद हैं। एक मायने में वॉलपेपर पैटर्न का वर्गीकरण उसमें अन्तर्निहित ग्रिड या जाली पर आधारित है।

[1] वॉलपेपर पैटर्न के बारे में अधिक जानकारी के लिए कृपया जोसेफ गैलियन की पुस्तक *कन्टेम्प्ररी एब्सट्रेक्ट एल्जेब्रा* देखिए। फ्रीज़ ग्रुप्स व क्रिस्टलोग्राफिक ग्रुप्स पर दिया गया अध्याय चित्रवल्लरी या फ्रीज़ पैटर्न को वर्गीकृत करने के साथ-साथ वॉलपेपर पैटर्न या टेसेलेशन को भी वर्गीकृत करने के एल्गोरिद्म प्रदान करता है।

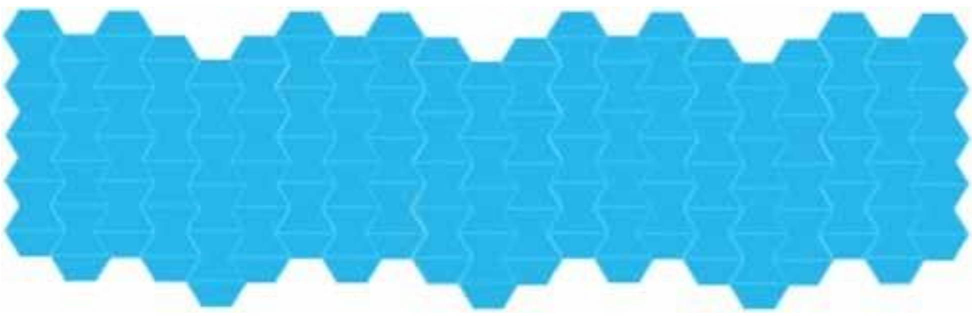
उदाहरण के लिए, ऊपर दर्शाए गए वॉलपेपर पैटर्न का उदाहरण लिया जा सकता है। हम ऐसा मान सकते हैं कि इसे सिर्फ़ ऊपर-नीचे की ओर बराबर अन्तराल पर पट्टी को दोहराकर नहीं बनाया गया है बल्कि निम्नानुसार भी बनाया गया है। **चित्र-2** में दिखाई गई आयताकार जाली या ग्रिड से किसी तल को ढँकने के विषय में सोचें। (काली रेखाएँ और उन पर बने वृत्त शीर्ष को दर्शा रहे हैं।) फिर जाली शीर्षों को चित्र के अनुसार वर्गों में बदल दें। तो काले बिन्दुओं को हल्के गुलाबी वर्गों में बदलकर और उसके बाद ग्रिड की रेखाओं को पूरी तरह हटाकर हल्के गुलाबी वर्गों के द्वारा एक वॉलपेपर बन जाता है।



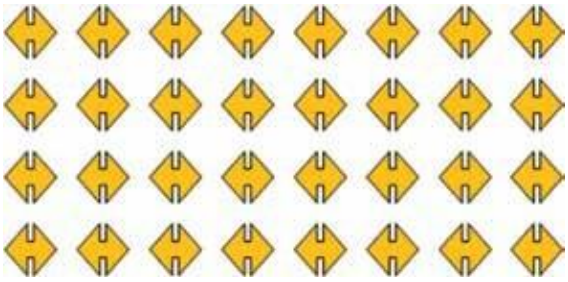
चित्र-2

पता यह चला है कि किसी भी वॉलपेपर पैटर्न में मात्र पाँच तरह की जालियाँ या लैटीस सम्भव हैं– वर्गाकार, आयताकार (ग़ैर-वर्ग), समान्तर चतुर्भुजाकार (ग़ैर-वर्ग, ग़ैर-आयत), समबाहु त्रिभुजाकार और सामान्य षट्भुजाकार। इनका और बुनियादी नमूनों की अलग-अलग स्थिति का उपयोग करके 17 वॉलपेपर पैटर्न बनाए जाते हैं।

अलग-अलग अन्तर्निहित जालियों का उपयोग करते हुए कुछ वॉलपेपर पैटर्न के उदाहरण नीचे दिए गए हैं। पाठकों को नीचे दिए गए वॉलपेपर पैटर्न में स्थानान्तरण, घूर्णन, परावर्तन और स्थानान्तरण-परावर्तन सममितियाँ खोजने के लिए आमंत्रित किया जाता है। स्थानान्तरण सममिति में मूल दूरी को दिशा के साथ दर्शाने का ध्यान रखें। घूर्णन सममिति में घूर्णन-केन्द्र के साथ-साथ घूर्णन कोण भी दर्शाए जाने चाहिए। परावर्तन सममिति में परावर्तन की रेखाएँ और स्थानान्तरण-परावर्तन में स्थानान्तरण रेखा और परावर्तन रेखा दर्शाई गई हो।

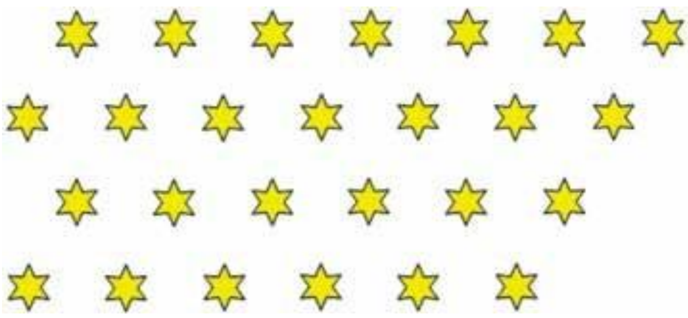


चित्र-3 : सामान्य षट्भुजाकार जाली पर आधारित वॉलपेपर पैटर्न



चित्र-4 : वर्गाकार जाली पर आधारित वॉलपेपर पैटर्न

चित्र-5 : ग़ैर-आयत समान्तर चतुर्भुजाकार जाली पर आधारित वॉलपेपर पैटर्न



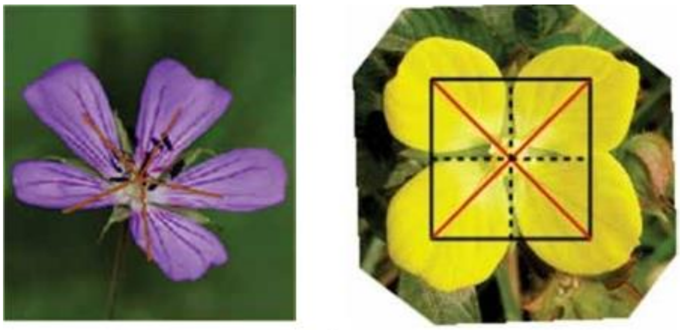
चित्र-6 : समबाहु त्रिभुजाकार जाली पर आधारित वॉलपेपर पैटर्न

अपने आस-पास सममिति की खोज

अब जब हमें परिमित समतल वस्तुओं, चित्रवल्लरियों और वॉलपेपर पैटर्नों में विभिन्न तरह की सममितियों का अन्दाज़ा हो गया है तब हम अपने ज्ञान का इस्तेमाल करते हुए अपने आस-पास की दुनिया को सममिति के नज़रिए से देख सकते हैं। बेशक, अभी हमारे पास सिर्फ़ समतल वस्तुओं की सममिति समझने की क्षमता है। ऐसे ही हम त्रि-आयामी वस्तुओं की सममिति के बारे में भी पढ़ेंगे लेकिन वह किसी अन्य लेख की विषयवस्तु है।

हमने आस-पास मिलने वाली वस्तुओं और उनमें अन्तर्निहित सममिति की खोज के कुछ उदाहरण नीचे दिए हैं। फ़ुरसत में पढ़ने और विश्लेषण करने के लिए पाठकों के लिए कुछ अन्य उदाहरण भी दिए गए हैं। एक ज़रूरी बात, जब भी हम वास्तविक जीवन में सममिति की खोज करते हैं तब हमें सममिति की सुन्दरता की सराहना के लिए अपूर्णताओं और दृश्यों के कुछ हिस्सों को नज़रअन्दाज़ करना होगा।

प्रकृति में सममिति के उदाहरण प्रचुर मात्रा में हैं। नीचे दो फूल (चित्र-7) दिए गए हैं। चलिए बैंगनी फूल पर विचार करें। हमने फूल को पाँच भूरी रेखाओं से चिह्नित किया है जिनमें से प्रत्येक क्रमिक रेखा के मध्य 72 डिग्री का कोण है। चित्र से स्पष्ट है कि ये रेखाएँ पँखुड़ियों को सटीकता से समद्विभाजित नहीं करती हैं। वाक़ई अगर हम पँखुड़ियों के ऊपरी छोरों के मध्य बिन्दुओं को मिलाते हैं तो हमें पाँच भुजाओं की आकृति मिलती है लेकिन यह एक नियमित पंचभुज नहीं है। भूरी रेखाओं के उपयोग से हम कह सकते हैं कि इनमें 0, 72, 144, 216 और 288 डिग्री का 'लगभग' घूर्णन है। इससे हम इस फूल को *सी*$_5$ क़िस्म में वर्गीकृत कर सकते हैं। (कृपया *एट राइट एंगल्स* के मार्च 2016 में लेख के भाग-1 में इस तरह के संकेतों का अर्थ देखें।) पीले फूल के मामले में वर्गाकार जाली 0, 90, 180 और 270 डिग्री के चार घूर्णन और चार परावर्तनों की सम्भावना दर्शाती है; इसलिए यह *डी*$_4$ क़िस्म का है। चित्र-8 की तितली में परावर्तन सममिति और 0 डिग्री घूर्णन (यानी कुछ न करो) सममिति है : अर्थात यह *डी*$_2$ क़िस्म की है।



चित्र–7

चित्र–8

हम अपनी पोशाकों की डिज़ाइन में भी चित्रवल्लरी और वॉलपेपर पैटर्न के उदाहरण ढूँढ़ सकते हैं। साड़ी की बॉर्डरें चित्रवल्लरी जबकि इंटीरियर सजावटें वॉलपेपर पैटर्न का अच्छा उदाहरण हैं। कुछ उदाहरण नीचे दिए गए हैं।

चित्र-9 में दर्शाई गई पट्टी एक साड़ी की बॉर्डर का हिस्सा है। इसका विश्लेषण करने पर हम पाते हैं कि इसमें ऊर्ध्व और क्षैतिज दिशाओं में स्थानान्तरण और परावर्तन सममितियाँ, 180 डिग्री घूर्णन और स्थानान्तरण-परावर्तन सममिति है। इसलिए यह VII क़िस्म की चित्रवल्लरी है। एक साथ रखी गईं चार पत्तियाँ कुशन कवर का हिस्सा हैं। साफ़ देखा जा सकता है कि इसमें चार घूर्णन और चार परावर्तन सममितियाँ हैं इसलिए यह *डी*$_4$ है।

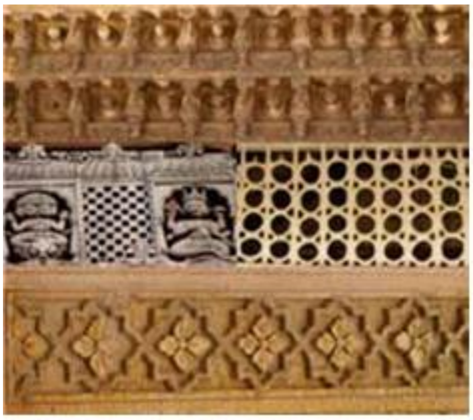
चित्र-10 में एक साड़ी के भाग का पैटर्न दिखाया गया है जिसे हम आयताकार जाली पर आधारित वॉलपेपर पैटर्न कह सकते हैं जिसमें दो अलग-अलग दिशाओं में स्थानान्तरण सममिति और परावर्तन व स्थानान्तरण-परावर्तन सममिति की दो अलग-अलग ऊर्ध्व रेखाएँ हैं। इसमें सिर्फ़ 0 डिग्री घूर्णन (जिसका मतलब है कोई क्रिया नहीं) सम्भव है।

चित्र–9

चित्र–10

चित्र–11

चित्र-11 का कोलाज, दिल्ली के क्राफ़्ट म्यूज़ियम की चार तस्वीरों से बनाया गया है। ऊपर और नीचे की तस्वीरों में चित्रवल्लरी, दाईं ओर मध्य की तस्वीर वॉलपेपर पैटर्न और बाईं ओर मध्य की तस्वीर परिमित समतल नमूना है।



चित्र–12

चित्र–13

पुराने स्मारक, नई इमारतें, खिड़की की जाली, बालकनी की रेलिंग, बाड़ और काफ़ी कुछ सममिति के नज़रिए से देखने के लिए दिलचस्प उदाहरण हैं। **चित्र-12** इसी का उदाहरण है और पिछले कोलाज की भाँति ही इसका विश्लेषण किया जा सकता है।

सममिति के लेख में एम सी एस्चर की कलाकृति का उल्लेख न करना बड़ी भूल होगी। हालाँकि कॉपीराइट की समस्या के कारण हम एस्चर के काम की तस्वीरें यहाँ नहीं छाप सकते। पाठकों को सलाह दी जाती है कि वे एस्चर के काम को उनकी आधिकारिक वेबसाइट www.mcescher.com पर जाकर देखें। हालाँकि हम पाठकों के लिए एस्चर के काम

से प्रेरित एक फ़र्श पहेली छोड़ देते हैं ताकि वे फ़ुरसत के समय इसका आनन्द ले सकें और सममिति के ज़रिए इसके रहस्यों को खोज सकें; देखें **चित्र-13**।

संदर्भ सूची :

1. M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry,* Springer Verlag, 1988.
2. David W. Farmer, *Groups and Symmetry*: A Guide to Discovering Mathematics, American Mathematical Society, 1995.
3. Joseph A. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*, 7th edition, Brooks/Cole Cengage Learning, 2010.
4. Kristopher Tapp, *Symmetry*: *A Mathematical Exploration*, Springer, 2012.
5. Herman Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press, 1952.

गीता वेंकटरमन अम्बेडकर विश्वविद्यालय दिल्ली में गणित की प्रोफ़ेसर हैं। परिमित समूह सिद्धान्त पर उन्होंने शोध किया है। वे कैम्ब्रिज विश्वविद्यालय प्रेस, यूके से प्रकाशित परिमित समूहों की गणना नाम के शोध प्रबन्ध की सह-लेखिका हैं। उन्हें गणितीय शिक्षा और गणित में महिलाओं से सम्बन्धित विषयों में भी रुचि है। उन्होंने एमए और डीफ़िल की उपाधि ऑक्सफ़ोर्ड विश्वविद्यालय से प्राप्त की है। उन्होंने दिल्ली विश्वविद्यालय के संट स्टीफ़न महाविद्यालय में 1993 से 2010 तक पढ़ाया है। उन्होंने स्कूल, स्नातक और स्नातकोत्तर स्तर के कई पाठ्यक्रम विकास मण्डलों में कार्य किया है। वे 2011-2013 के दौरान अम्बेडकर विश्वविद्यालय दिल्ली में स्कूल ऑफ़ अंडरग्रेजुएट स्टडीज़ की डीन थीं। वे वर्तमान में अम्बेडकर विश्वविद्यालय दिल्ली में असेसमेंट, इवैल्यूएशन एंड स्टूडेंट प्रोग्रेशन की डीन हैं।

अनुवाद : अनुज उपाध्याय **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी (एकलव्य फ़ाउण्डेशन)

सम्पादन : राजेश उत्साही