

भाग से क्यों भागना!

अंकित शुक्ल

प्राथमिक स्तर पर गणित सीखना जितना चुनौतीपूर्ण एक बच्चे के लिए होता है उतना ही चुनौतीपूर्ण उस अध्यापक के लिए गणित सिखाना होता है जो चाहता है कि बच्चों में गणितीय अवधारणाओं की ठीक समझ विकसित हो। ऐसे शिक्षक निरन्तर उन विधाओं की खोज और प्रयोग में रहते हैं जो बच्चों के लिए मददगार सिद्ध हो सकें। प्रस्तुत लेख में एक ऐसा ही प्रयोग है। शिक्षक ने भाग की अवधारणा पर काम करने के लिए मुद्राओं का उपयोग किया है। मुद्राएँ गणित की अमूर्तता को कुछ हद तक कम करती हैं, साथ ही गणित को जीवन के व्यवहारिक उदाहरणों से जोड़ती भी हैं। आप देख सकेंगे कि बच्चे अपने स्वाभाविक ज्ञान का उपयोग करते हुए कैसे भाग की मानक प्रक्रिया की ओर बढ़ते हैं। सं.

पृष्ठभूमि

भाग गणित की एक ऐसी संक्रिया है जिससे अधिकतर लोग भागते नज़र आते हैं। यही स्थिति वयस्कों की भी है और बच्चों की भी। बच्चों की स्थिति पर गौर करें तो, एनुअल स्टेटस ऑफ़ एजुकेशन रिपोर्ट और नेशनल अचीवमेंट सर्वे दोनों की ही रिपोर्ट इस बात का दावा करती हैं कि कक्षा 8 के बच्चे भी भाग की संक्रिया को अच्छे तरीके से नहीं कर पाते। केवल भाग ही नहीं, बल्कि गणित की किसी भी अवधारणा को सीखना बच्चों के लिए अकसर चुनौतीपूर्ण रहता है।

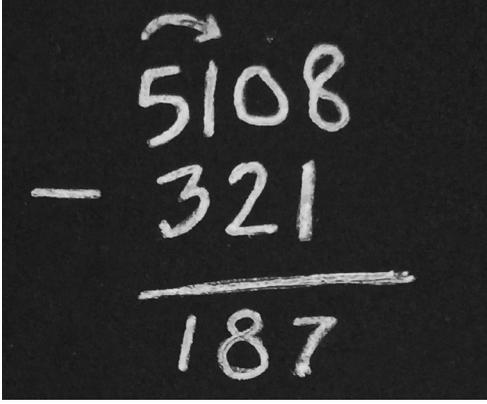
स्कूल में बच्चों के सीखने की स्थिति कोविड के बाद और भी चुनौतीपूर्ण हो गई है। इस लेख में, कोविड के लम्बे लॉकडाउन के बाद बच्चों के साथ गणित शिक्षण पर काम करने के अनुभव प्रस्तुत हैं। यह अनुभव भाग की संक्रिया पर काम करने के हैं।

छत्तीसगढ़ में कोविड के बाद जब स्कूल खुले तो शिक्षकों को बच्चों के साथ काम करने

में बहुत-सी चुनौतियाँ आ रही थीं। अधिकांश बच्चे नियमित रूप से स्कूल नहीं आ रहे थे। जहाँ भी बच्चे नियमित आ रहे थे, वहाँ उनके सीखने पर काम प्रारम्भ हो रहा था। एक स्कूल भ्रमण में मैंने देखा कि एक शिक्षक साथी को बच्चों के साथ भाग पर काम करने में बहुत समस्या आ रही थी। उनके साथ मिलकर इस अवधारणा पर काम करने की एक योजना बनाई गई जिसमें भाग की मूल अवधारणाओं, जैसे— बराबर बाँटना, घटाना आदि, से शुरू करते हुए भाग को समझने की तरफ़ बढ़ने की एक प्रक्रिया की शुरुआत की गई।

पूर्व ज्ञान

हम सब जानते हैं कि गणित की किसी अवधारणा को जानने के लिए इससे पहले की अवधारणाओं की गहरी समझ होना आवश्यक है। अगर हम भाग की बात करते हैं तो इससे पहले की अवधारणाएँ, जैसे— संख्या समझ, समूह की समझ, स्थानीय मान, घटाव, गुणा / पहाड़ा, आदि की समझ होना ज़रूरी हो जाता



चित्र 1

है। बच्चों में इन सबकी समझ को जाँचने के लिए उन्हें कुछ सवाल हल करने को दिए गए। उन्होंने दिए गए सवाल हल कर लिए।

कहानी से शुरुआत...

सवालों के बाद मैंने एक कहानी से काम की शुरुआत करने की योजना बनाई। कहानी इसलिए क्योंकि कहानियाँ बच्चों को रोचक लगती हैं और उन्हें वे ध्यान लगाकर सुनते हैं।

कक्षा में बच्चों से शुरुआती बातचीत के बाद मैंने पूछा, “कहानी सुनोगे?” सभी बच्चों ने उत्साहपूर्वक एक स्वर में “हाँ” कहा। मैंने कहानी शुरु की :

एक गाँव का नाम था भगोरा। उस गाँव में एक किसान रहता था जिसका नाम रामदीन था। किसान के तीन बेटे थे— लोटा, जलोटा और पलोटा। लोटा बहुत चालाक था। वह चाहता था कि हर बार उसे अधिक मुनाफ़ा हो। कभी वह अनाज की अधिक बोरियाँ रख लेता तो कभी चुपचाप अनाज बेच देता। वहीं पलोटा बहुत आलसी था। उसको जो मिलता, रख लेता। जलोटा को अपने भाइयों की ये आदतें पसन्द नहीं थीं, पर वह लिहाज़ के कारण कुछ कहता न था।

लोटा की धूर्तता धीरे-धीरे बढ़ती गई और आखिर एक दिन तीनों भाइयों

में लड़ाई हो गई। वे अपने पिता रामदीन के पास आकर बोले, “पिताजी! हमें साथ काम नहीं करना। हमारा बँटवारा कर दीजिए।”

रामदीन यह सुनकर बहुत दुखी हुआ किन्तु कुछ सोचकर उसने कहा, “ठीक है। मैं तुम्हें तुम्हारा हिस्सा दे दूँगा। लेकिन तुम्हें हर बार की तरह बेहतर फ़सल उगाकर दिखाना होगा, नहीं तो मैं सबकुछ बेच दूँगा और किसी को कुछ नहीं मिलेगा।”

किसान के पास तीन खेत, तीस बोरी अनाज और तीन घर थे।

तीन खेतों को तीनों बेटों में बराबर बाँटना था। एक बेटे को कितना मिला होगा?

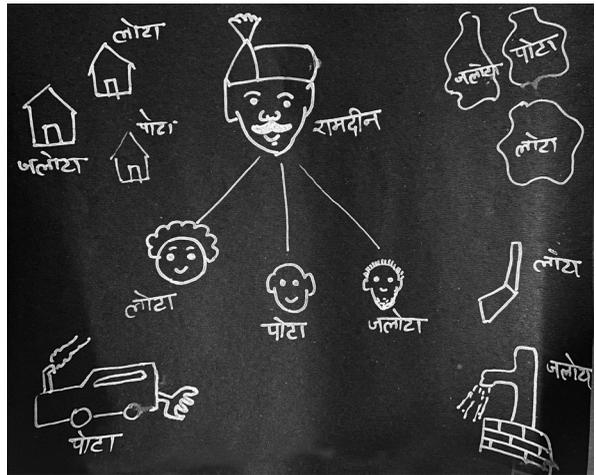
इसपर बच्चों ने कहा, “तीनों को एक-एक खेत मिला होगा।”

तीस बोरी अनाज को तीन बेटों में बाँटना था, प्रत्येक बेटे को कितना मिला होगा?

इसपर बच्चों ने कहा, “दस-दस बोरी अनाज हर एक को मिला होगा।”

ऐसे ही तीनों को एक-एक घर भी मिला होगा।

सभी बेटों को अपना-अपना हिस्सा मिल गया।



चित्र 2

पर रामदीन के पास एक ट्रैक्टर भी था, उसे वह बराबर नहीं बाँट सका। उसने अपने बेटों से कहा कि वे समय आने पर खेतों की जुताई के लिए ट्रैक्टर का उपयोग कर लें।

बारिश का मौसम आया। सभी बेटे अपनी-अपनी खेती में लग गए। किन्तु अनुभव की कमी और अकेले-अकेले काम करने के कारण वे अच्छी फ़सल नहीं ले पाए। वे बहुत दुखी हुए। उन्हें एहसास हो गया कि साथ मिलकर करने से काम आसान हो जाता है।

कहानी सुनाने के बाद जब शिक्षक से बात हुई तो उन्होंने बताया कि प्रायः चुप रहने वाले बच्चे भी कहानी के दौरान बहुत मुखर रूप से अपनी बात रख रहे थे। उन्होंने यह भी बताया कि बहुत-से बच्चे ऐसे थे जिन्हें पहले संख्या की समझ नहीं थी, वे भी संख्या को पहचान पा रहे थे।

बराबर-बराबर बाँटना...

अब मैंने बच्चों के साथ वास्तविक वस्तुओं को बाँटने का खेल शुरू किया। एक छात्रा ने पहले चार पुस्तकों को चार बच्चों में एक-एक कर बाँट दिया। इसपर उससे बात की गई। उसने बताया कि चार पुस्तकों को चार लोगों में बाँटने पर हर एक को एक-एक पुस्तक मिलेगी। हालाँकि इस कथन को गणितीय रूप में लिखने को कहने पर वह नहीं लिख पाई।

इसके बाद दूसरे छात्र को बुलाया और ब्लैकबोर्ड पर चॉकलेट के आठ चित्र बनाए। उन चित्रों को चार बच्चों में बाँटने के लिए कहा गया।

“यह कितने चॉकलेट हैं?”

“आठ हैं।”

“अब यह 8 चॉकलेट तुमको अपने चार दोस्तों— चैन कुमारी, मन्नत, तराना और आदित्य को बाँटना है। कैसे बाँटोगे?”

“सबसे पहले एक-एक दूंगा।”

“तो फिर कितना बचेगा?”

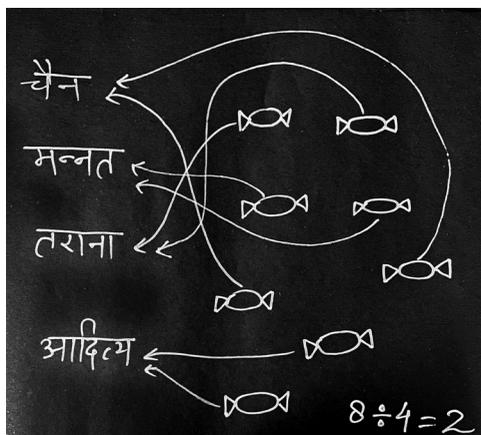
“चार बचेगा सर!”

“और बाँट पाओगे क्या?”

“हाँ सर!... एक-एक और मिल जाएगा इन लोगों को।”

“अच्छा! अब इन चारों के पास कितने-कितने चॉकलेट होंगे?”

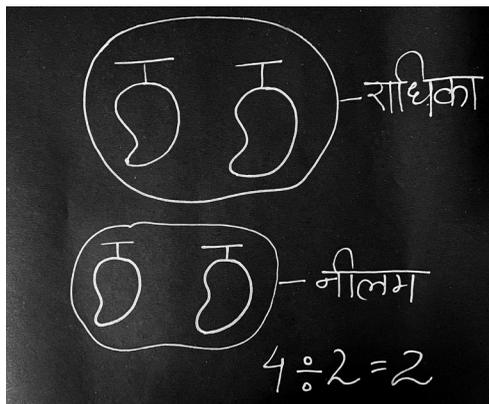
“सबके पास दो-दो चॉकलेट होंगे।”



चित्र 3

“अच्छा! अब इसको बोर्ड पर लिखकर बताओ।”

एक अन्य बच्चे को बुलाया। बोर्ड पर कुछ आम बनाए और उन्हें दो लोगों में बाँटने को



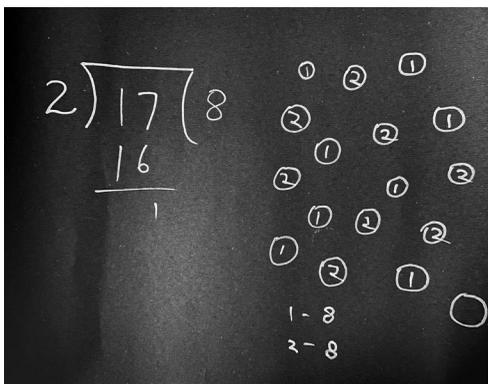
चित्र 4

कहा। उस छात्र ने सीधे बोला, “सर! चार आम दो लोगों में बाँटना हैं तो दोनों को दो-दो आम मिलेंगे।”

और फिर उसने उसका गणितीय रूप बोर्ड पर लिखा।

यह पूरी गतिविधि करने के बाद बच्चों में और उत्साह आ गया था। सभी बच्चे, ‘मुझे बुलाइए’, ‘मुझे बुलाइए’ बोलकर चिल्ला रहे थे। इस पूरी प्रक्रिया को शिक्षिका पीछे बैठकर बहुत ध्यान से देख रही थीं। इसके बाद मैंने एक और बच्चे को बुलाया जो कक्षा में थोड़ा शान्त प्रतीत हो रहा था। फिर मैंने बोर्ड पर कुछ चित्र बनाए और उससे कहा, “दो लोगों में यह लड्डू बाँटना हैं।” उसने कहा, “सर! पूरा नहीं बाँट पाएगा क्योंकि 17 लड्डू हैं और 2 लोगों में बाँटना हैं।”

मैंने उससे कहा, “दिखाओ, कैसे नहीं बाँटेगा?”



चित्र 5

उसने कुछ ऐसे बताया

अगर चित्र को थोड़ा ध्यान से देखेंगे तो प्रत्येक गोले में 1 या 2 लिखा हुआ है। इसका मतलब यह है कि कुल 8 लड्डू पहले व्यक्ति को मिलेंगे और 8 दूसरे को।

एल्गोरिदम की तरफ़...

इन गतिविधियों के बाद मुझे यह समझ में आया कि बच्चों को भाग की मूल अवधारणा

और इसके सन्दर्भों, अर्थात् समूहीकरण और बराबर-बराबर बाँटवारा की समझ भी है और भाग के चिह्न की पहचान भी। बच्चों को भाग की शब्दावलियों, मसलन, शेष किसे कहेंगे, भाजक क्या है, इत्यादि की भी थोड़ी-बहुत समझ है। अब उनको भाग की संक्रिया की तरफ़ ले जाना था। इसके लिए मैंने कुछ नकली रुपयों का उपयोग किया।

मैंने उनसे एक प्रश्न पूछा, “115 रुपए 3 लोगों में बाँटोगे तो प्रत्येक को कितना मिलेगा?”

बच्चे अपनी कॉपी में सवाल हल करने में जुट गए। मैंने सभी को रोक दिया। उनमें से एक बच्चे को बुलाया और कहा कि तुम्हारे सामने यह नोट रखे हुए हैं। अब तुमको इस बण्डल में से 115 रुपए निकालने हैं और इन्हें 3 लोगों में बाँटना है। उस नोट के बण्डल से बच्चे ने सबसे पहले सौ का एक नोट, दस का एक नोट और एक-एक के पाँच नोट निकाले और कहा, “सर! 115 रुपए हो गए।”

“ठीक है। अब इनको तीन लोगों में बाँटो।”

“सर! 100 के खुले लेने पड़ेंगे क्योंकि 100 का एक नोट है और उसे तीन लोगों में नहीं बाँट पाऊँगा।”

“ठीक है।”

बच्चे ने सौ का एक नोट रखकर दस-दस के दस नोट उठा लिए। अब उसके पास दस के ग्यारह और एक-एक के पाँच नोट थे। उसने एक-एक करके तीनों को दस-दस के नोट बाँटना शुरू किया। तीनों बच्चों को 3-3 नोट मिले। जब उसने बाँट दिया तो मैंने उससे पूछा, “कितना बाँटा?”

“सर! 90 रुपए बाँट चुका हूँ।”

“कितने बचे हैं?”

“25 रुपए।”

“अच्छा! प्रत्येक को अभी कितना मिला है?”

“सर! दस के तीन नोट मतलब तीस रुपए!”

“अभी तुमने जो किया है उसे इस तरह से लिखते हैं :

$$\begin{array}{r} 3) 115 (30 \\ -90 \\ \hline 25 \end{array}$$

“अभी तुम्हारे पास कितने बचे हैं?”

“25 रुपए!”

“तो उसको भी बाँट दो।”

“पूरा नहीं बँटेगा क्योंकि दस के नोट तो सिर्फ 2 ही हैं और एक-एक के पाँच नोट हैं।”

“तो अब क्या करोगे?”

“सर, मुझे अब एक-एक के बीस नोट चाहिए।”

इतना कहकर बच्चे ने दस के दो नोट रखे और उसके बदले एक के बीस नोट उठा लिए। फिर एक-एक कर आठ नोट तीनों को बाँट दिए। अब उसके पास एक रुपए का सिर्फ एक नोट बचा।

“तुम्हारे पास कितने बचे थे?”

“25 रुपए!”

“अब तुमने कितने बाँट दिए?”

“24 रुपए!”

“प्रत्येक को कितना-कितना मिला?”

“सर! पहले हर एक को तीस-तीस रुपए मिले थे और अब आठ-आठ रुपए और मिले। कुल मिलाकर 38 रुपए प्रत्येक को मिले।

“अच्छा, यह बताओ, तुमने पूरा बाँट दिया या तुम्हारे पास भी कुछ बचा?”

“मेरे पास एक रुपया बचा है ना!”

$$\begin{array}{r} 38 \\ 30+8 \\ \hline 3 \overline{) 115} \\ -90 \\ \hline 25 \\ -24 \\ \hline 1 \end{array}$$

चित्र 6

“अब चलो देखते हैं इसे लिखा कैसे जाए।”

जब संक्रिया पर बच्चों की थोड़ी समझ बन गई तब मैंने उन्हें भाग की शब्दावली से भी परिचित कराया। मैंने उन्हें उदाहरण के साथ बताया कि जिस संख्या में भाग देते हैं वह भाज्य कहलाती है। यहाँ पर 115 रुपए भाज्य है। जिस संख्या से भाग देते हैं वो भाजक होती है, यहाँ पर 3 भाजक है। भाग देने के बाद जो हिस्सा सबको मिलता है वह भागफल होता है। यहाँ 38 भागफल है। अगर पूरा-पूरा भाग न जाए और कुछ शेष बच जाए तो उसे शेषफल कहते हैं। यहाँ शेषफल 1 है।

इसके बाद बच्चों को हल करने के लिए कुछ सवाल दिए गए जो उनकी गणित की पुस्तक से ही थे।

इस पूरी प्रक्रिया के बाद हमने बच्चों को कुछ कार्यपत्रक हल करने के लिए दिए। उन्हें बच्चों ने सही तरीके से हल किया।

संक्षेप में

हमारी राष्ट्रीय पाठ्यचर्या के दस्तावेज़ में कुछ बातें उन चुनौतियों की तरफ़ ध्यान दिलाती हैं जो गणित शिक्षण के दौरान सामने आती हैं :

अभी भी गणित के प्रति एक सहज माहौल बनाने में हम नाकामयाब रहे हैं। हम उनको बुद्धिमान मान लेते हैं जो कुछ सूत्र, संख्या या संक्रियाओं को रट लेते हैं और सवालों का तेज़ी से हल निकाल लेते हैं। साथ ही जो लोग इसको नहीं कर पाते, हम उनके ऊपर बुद्ध होने का ठप्पा भी लगा देते हैं।

गणित की प्रकृति भी एक महत्वपूर्ण रोल अदा करती है। इसकी प्रकृति में अवधारणाओं की अमूर्तता, सर्पिलाकार क्रमबद्धता, सार्वभौमिकता व निगमनात्मक तर्क शामिल हैं। कुछ लोगों को अमूर्त में चिन्तन करने में परेशानी होती है। बच्चों से शिक्षक कहता है कि दो और दो चार होते हैं, फिर कहता है कि तीन और एक भी चार होते हैं। उसके बाद कहता है कि एक और तीन को मिला दें तो चार होता है। इन सारी प्रक्रियाओं में कोई बच्चा अपने को असहज पाता है और उसे गणित से भय लगने लगता है।

सीखने-सिखाने के परम्परागत तरीकों से निजात नहीं मिल पा रही है और शिक्षक साथी खुद को नए तरीकों से सुसज्जित नहीं कर पा रहे हैं। अमूमन किसी भी कार्यशाला के बाद उनकी कक्षा में जाकर देखने वाला कोई नहीं होता।

गणित सीखने में सामाजिक नज़रिया भी एक महत्वपूर्ण रोड़ा बन रहा है। कई लोगों का मानना है कि गणित सिर्फ बुद्धिमान लोगों के सीखने का विषयवस्तु है। इसके साथ ही लड़कियाँ गणित नहीं पढ़ सकतीं। इन सब भ्रान्तियों से हमें निकलना होगा।

गणित में आकलन का तरीका भी बहुत कठोर और बेजान है। यह प्रक्रिया पर ही आधारित हो गया है। हमारे पास आकलन के नए तरीके नहीं हैं जिनसे हम बच्चे के अवधारणात्मक ज्ञान को

जाँच सकें। सभी बच्चों का सीखने का स्तर अलग होता है, परन्तु पूरी शिक्षा व्यवस्था यह चाहती है कि सब एक बराबर सीखें जो मुमकिन नहीं है।

अगर हम गणित को अपनी पाठ्यचर्या के एक अभिन्न अंग की तरह देख रहे हैं तो यह हमारा कर्तव्य बनता है कि बच्चे खुद को इससे जोड़कर देख सकें। उन्हें यह विषय न बोझिल लगे और न ही उबाऊ। वे इस विषय से भावनात्मक रूप से जुड़ पाएँ। ज़मीनी स्तर पर अपनी बुद्धि से गणितीय क्षमता को समझने की आवश्यकता है। बच्चों को अपनी रुचि को खोजने के लिए आज़ाद करना होगा और साथ ही वे अपने काम से, सीखने से, प्रेम करना सीखें, इस दिशा में भी कोशिशें करनी होंगी। यही नहीं, पाठ्यचर्या के स्तर पर भी काम करने की ज़रूरत है। गणित शिक्षण के व्यापक उद्देश्यों को ध्यान में रखते हुए इसका निर्माण करना होगा।

हालाँकि एनसीएफ़ 2005 में गणित शिक्षण के व्यापक उद्देश्यों और सीखने-सिखाने के तरीकों के बारे में काफ़ी विस्तार से बात की गई है, लेकिन ज़मीनी स्तर पर एनसीएफ़ में दिए सिद्धान्तों पर काम होता कम दिखाई देता है। मुझे लगता है, कम-से-कम सभी बच्चे आंकिक ज्ञान, आँकड़ों का निरूपण और उनका विश्लेषण कर पाएँ, ताकि कहीं ये ग़लत सन्देश न पहुँच जाए कि गणित बहुत कठिन है।

कक्षा में भी शिक्षकों को काफ़ी बदलाव करने पड़ेंगे। एक शिक्षक को अपनी कक्षा में सीखने-सिखाने के अनुकूल महत्वपूर्ण वातावरण का निर्माण करना पड़ेगा। कक्षा में भय की जगह बिलकुल भी नहीं होनी चाहिए, और जितनी भी प्रक्रियाएँ हों वो बच्चे के स्तर को बढ़ा ही सकें, ऐसा प्रयास हो।

अंकित शुक्ल 7 वर्षों से शिक्षा के क्षेत्र में सक्रिय हैं। इन्होंने लगभग 6 वर्ष अजीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन में कार्य किया। इनकी गणित शिक्षण, शिक्षक प्रशिक्षण और सहायक सामग्री निर्माण में विशेष रुचि है। वर्तमान में यह लैंग्वेज एण्ड लर्निंग फ़ाउण्डेशन, रायपुर, छत्तीसगढ़ में कार्यरत हैं।

सम्पर्क : ankit.shukla@languageandlearningfoundation.org