Translation of Playing With Tiels Beginning to Tessellate : R.Gomathy From_Azim Premji University At Right Angles_March,2019

कक्षा से

टाइल्स से खेलना

टेसिलेशन की शुरुआत

आर. गोमती

मुख्य शब्द : टेसिलेशन, पैटर्न, खेल, टाइल, रंग, आकृति

अधिकांश लोग गणित को सिर्फ़ संख्याओं और उनसे जुड़ी संक्रियाओं का ही विषय मानते हैं। लिहाज़ा कौन गणित कर सकता है और कौन नहीं इससे जुड़े मिथक प्रचुर मात्रा में उत्पन्न होते हैं। यह सम्भव है कि बच्चे संख्याओं के साथ जूझें, पर यह मानना मुश्किल है कि ऐसा कोई बच्चा हो सकता है जो पैटर्न न समझ सके। हम हर समय बच्चों को पत्थर, डण्डियों, पत्तों, फूलों, उँगलियों के निशान, सब्ज़ियों के टुकड़ों, रबर स्टाम्प के छापों और गणितीय आकृतियों का उपयोग करके पैटर्न बनाते पाते हैं। अक्सर वे अनजाने में अपने खेल और गतिविधियों के हिस्से के रूप में पैटर्न बनाते हैं। बच्चों को गणित सीखने और समझने के माध्यम के रूप में पैटर्न की खोज करना चाहिए। “पैटर्न की खोजबीन दिमाग़ को उन समानताओं की तलाश और खोज करने के लिए प्रशिक्षित करती है जो असम्बद्ध प्रतीत होने वाली जानकारी को एक पूर्ण के रूप में एक साथ लाती हैं... एक बच्चा, जो यह अपेक्षा करता है कि वस्तुओं के कोई मायने हैं, जो वस्तुओं में मायने की खोजबीन करता है और इसी मायने से समझ विकसित करता है। एक बच्चा जो प्राय: पैटर्न देख नहीं पाता है, वस्तुओं में मायने से उसकी कोई अपेक्षा नहीं होती है और वह सारी घटनाओं को हिस्सों में, अलग-अलग और असम्बद्ध देखता है।” [बरेटा, जैसा कि बर्न्स (Burns) में उल्लेखित है, 112][1]

'टेसिलेशन' शब्द लैटिन शब्द '*टेसिला*' से आता है, जिसका अर्थ है एक छोटा घन या एक टाइल। जब हम टेसिलेशन कहते हैं, तो इसका अर्थ होता है बिना कोई ख़ाली जगह छोड़े या ओवरलैप किए बिना किसी सतह या तल को समतल आकृतियों से भरना। अत: इसे ऐसी आकृतियों के एक पैटर्न के रूप में समझा जा सकता है जो किसी सतह को ढँकने के लिए एक-दूसरे के साथ पूरी तरह से उपयुक्त बैठती हैं।

मैं इस लेख में एक ऐसा अनुभव साझा करना चाहती हूँ, जिसमें कक्षा तीन के मेरे विद्यार्थी द्विविमीय पैटर्न बनाने की एक गतिविधि (जिसे टेसिलेशन या टाइलिंग कहा जाता है) में शामिल हुए।

तो, आइए मैं अपने विद्यार्थियों से आपको परिचित कराती हूँ। हम सब पुदुचेरी के एक छोटे-से विद्यालय से जुड़े हुए हैं। मैं भाषा (अँग्रेज़ी), गणित और पर्यावरण अध्ययन पढ़ाती हूँ। हमारा कक्षा-कक्ष छोटा (22 X 22 फुट) है, पर मैंने उसमें गणित का एक कोना बना रखा है, जो कई जोड़-तोड़ करने वाली सामग्रियों से भरा पड़ा है। जैसे कि हमारे पास गिनती, स्थानीय मान, चार मूलभूत अंकगणित संक्रियाएँ और भिन्न सीखने के लिए सामग्री है। इन सामग्रियों की देखरेख और व्यवस्था की ज़िम्मेदारी विद्यार्थियों और शिक्षक दोनों की है।

शुरुआत

ऐतिहासिक स्मारकों में टेसिलेशन के कई बेहतरीन उदाहरण देखने को मिलते हैं। चूँकि विद्यार्थियों को वहाँ नहीं ले जाया जा सकता था, तो मैंने उन्हें आसानी से उपलब्ध संसाधनों से टेसिलेशन के उदाहरण दिखाने का सोचा, जैसे कि पुदुचेरी के भारती पार्क की सड़क, हमारे घरों के बरामदे की जाली, चर्च की खिड़कियों के डिज़ाइन, विद्यालयों और घरों के विश्राम कक्ष और रसोई की टाइलें और बच्चों के कपड़ों पर बने टाइलिंग पैटर्न।

हमारे पाठ्यक्रम में टाइलिंग पैटर्न की पढ़ाई कक्षा दो के बाद शुरू होती है। मैं पिछले वर्ष से कक्षा दो के विद्यार्थियों को टेसिलेशन गतिविधियों में शामिल करती आ रही हूँ। हालाँकि इस वर्ष टेसिलेशन की गतिविधियों को करने के दौरान मैंने बच्चों द्वारा अपनाए गए तरीक़ों में काफ़ी अन्तर पाया।

सामान्यत: कक्षा दो के विद्यार्थी इस गतिविधि को एक 'मनोरंजक गतिविधि' के रूप में देखते थे। विशेष रूप से वे इसे *कोलम* और फ़र्श सम्बन्धित अन्य डिज़ाइन बनाने के अपने पिछले अनुभवों से जोड़कर देखते थे। इस वर्ष, जब विद्यार्थी कक्षा तीन में पहुँच गए तो मैंने ग़ौर किया कि उनकी विधि अब और भी गणितीय होने लगी है। जिस तरह से उन्होंने टेसिलेशन की गतिविधियों के दौरान गणितीय शब्दावली का प्रयोग करना शुरू कर दिया था, उससे यह

स्पष्ट था। मैंने कई दफ़ा उन्हें 'वर्ग', 'त्रिभुज', षट्भुज', 'भुजाएँ (किनारे)', 'कोने (शीर्ष)', 'टाइलिंग' और 'ख़ाली स्थान' (gaps) जैसे शब्दों का प्रयोग करते सुना। जिस प्रकार वे गणित-केन्द्रित शब्दावली का प्रयोग कर रहे थे, उससे उनकी गणितीय परिपक्वता के उभरने की झलक मिल रही थी। सटीक गणितीय शब्दावली का उपयोग अवधारणाओं के साथ उनके जुड़ाव को दर्शा रहा था।

आगे बढ़ते हुए... गतिविधि में भागीदारी करना और सीखना

इस भाग में, कक्षा तीन के विद्यार्थियों की टेसिलेशन सीखने की यात्रा को साझा किया गया है। हमने 'पैटर्न पूरा करने' के अभ्यास से शुरुआत की और धीरे-धीरे द्विविमीय (2D) आकृतियों को टाइलिंग सीखने की ओर बढ़े।

पैटर्न को पूरा करना :

पैटर्न सम्बन्धित सारे अभ्यास किसी अधूरे पैटर्न को पूरा करने के साथ शुरू होते हैं। यह अभ्यास विद्यार्थियों को इकाइयों (टाइल) को उचित स्थान पर रखने सम्बन्धित पेचीदगियों से अवगत कराता है। मुझे मालूम था कि कक्षा तीन के मेरे विद्यार्थी रैखिक पैटर्न बनाना पहले से ही जानते थे, तो मैंने उन्हें द्विविमीय आकृतियों से सम्बन्धित एक पैटर्न को पूरा करने की गतिविधि में शामिल किया। संकेत के रूप में एक टेसिलेशन पैटर्न का उदाहरण कक्षा के सामने दर्शाया गया। और कक्षा को दी गई वर्कशीट्स में पहले इस पैटर्न की नक़ल करने और फिर इसे पूरा करने को कहा गया।

बच्चों के कार्य के आधार पर मैंने उन्हें तीन श्रेणियों में रखा :

1. वे बच्चे जिन्होंने पैटर्न को अपेक्षित रूप से पूरा किया। केवल 4 बच्चे ही टेसिलेशन पैटर्न को अपेक्षित रूप से आगे बढ़ा पाए थे।
2. वे बच्चे जिन्होंने पैटर्न को आंशिक रूप से पूरा किया। इन बच्चों ने अपनी समझ के अनुसार पैटर्न तो बनाया पर पैटर्न वैसा नहीं था जैसे उनसे अपेक्षित था। इस श्रेणी में 8 बच्चे थे ।
3. वे बच्चे जिन्होंने पैटर्न का विस्तार न करके इसे रंग भरने की एक 'मनोरंजक गतिविधि' समझा। तीन बच्चे इसे रंग भरने की गतिविधि समझ रहे थे।

पैटर्न को पूरा करने के पश्चात, बच्चों को अपने विचारों को समझाने का मौक़ा दिया गया। इस चर्चा ने बच्चों को उन ग़लतियों को पहचानने में मदद की जो उन्होंने की थीं। साथ ही अपने कार्य पर चिन्तन करने में भी मदद की कि उन्होंने गतिविधि को किस प्रकार ग़लत या सही समझा।

टेसिलेशन के मूलभूत तत्वों को समझना :

अब, हम टेसिलेशन की मूल बातों को सीखने की ओर बढ़ गए। हमने अपने गणितीय कोने में उपलब्ध टेसिलेशन किट से कुछ ज्यामितीय आकृतियों का उपयोग किया। मैंने कक्षा को 3 समूहों में बाँटा। प्रत्येक समूह में 5 बच्चे थे। उन्हें किट से आकृतियों का उपयोग कर मेज़ की ऊपरी सतह को कुछ इस प्रकार ढँकना था कि आकृतियों के बीच कहीं कोई ख़ाली जगह या ओवरलैप न हो। फ़र्श टाइलिंग के जो पैटर्न हमने पहले पुदुचेरी में और इसके आस-पास पहचाने थे उनके उदाहरण साझा किए गए। प्रत्येक समूह ने अपना टाइलिंग पैटर्न बनाया।

इस गतिविधि के पश्चात मैं विद्यार्थियों को अवधारणा की उनकी समझ के स्तर के आधार पर वर्गीकृत करना चाहती थी। कुछ विद्यार्थी सिर्फ़ प्रारम्भिक स्तर तक काम कर पाए, जबकि कुछ विद्यार्थियों ने इस अवधारणा को समझा और जटिल टेसिलेशन पैटर्न बनाए। जैसा कि देखा जा सकता है, प्रारम्भिक स्तर पर वे विद्यार्थी थे, जिन्होंने आकृतियों के किनारों (भुजाओं) को बिना किसी ख़ाली स्थान और बिना किसी ओवरलैप के साथ-साथ तो रखा, लेकिन वे पूरी सतह पर उस पैटर्न का विस्तार नहीं कर पा रहे थे।

प्रारम्भिक भागीदारी

जटिल पैटर्न

इस गतिविधि के दौरान बच्चों ने घूर्णन सममिति (rotational symmetry) के बारे में भी सीखा, ख़ासकर वर्ग, समबाहु त्रिभुज और सम-षट्भुज की घूर्णन सममिति के बारे में। मैंने बच्चों से कहा कि वे इन आकृतियों को घुमाएँ और देखें कि क्या 180° घुमाने पर इन आकृतियों के विन्यास (Orientation) में कोई बदलाव होता है। बच्चों ने बड़ी स्पष्टता से कहा, "वर्ग, वर्ग ही रहता है, इसी प्रकार षट्भुज भी षट्भुज ही रहता है, पर त्रिभुज उल्टा हो जाता है।" यह बात उन्होंने अपनी अनौपचारिक भाषा (तमिल, जो उनकी मातृभाषा है) में कही।

इसके पश्चात, बच्चों ने टाइलिंग पैटर्न बनाना शुरू किया, पर इस दफ़ा मुझे उनकी मदद करनी पड़ी। मैंने एक समूह को त्रिभुज और वर्ग, दूसरे समूह को षट्भुज और त्रिभुज और तीसरे समूह को त्रिभुज, वर्ग और षट्भुज दिए। उनका कार्य था दी गई आकृतियों से एक टाइलिंग पैटर्न बनाना।

शुरुआत में, बच्चे इन टाइलों के रंगों से आकर्षित थे और वे इन्हें टेसिलेशन नेटवर्क में रखने को लेकर बेफ़िक्र रहे। उनके कार्य में न सिर्फ़ टाइलों के बीच ख़ाली स्थान देखा जा सकता था बल्कि उन में कोई ख़ास पैटर्न भी नहीं उजागर हो रहा था। मुझे उन्हें वह सब याद दिलाना पड़ा जो उन्होंने पहले सीखा था। जल्दी ही बच्चों ने अपने कार्य को सुधारा और कुछ टाइलिंग पैटर्न बनाए।

फिर, मैंने उन्हें कुछ चौखाने वाले काग़ज़ दिए और उस पर अपने-अपने टेसिलेशन बनाने को कहा। मैं यह देख सकती थी कि बच्चे चौखाने वाले काग़ज़ पर टाइलिंग पैटर्न बनाने सम्बन्धित जटिलताओं से निपटने के लिए तैयार थे। उनके कार्य में उल्लेखनीय सुधार देखा जा सकता था।

कुछ विचार

कई दफ़ा, विद्यार्थियों को वस्तुओं की कल्पना करने में कठिनाई होती है। ऐसा करने के लिए अक्सर उन्हें किसी अतिरिक्त सहयोग की ज़रूरत पड़ती है और इस तरह की परिस्थितियों में ठोस सामग्री सहायक होती हैं। मुझे कोब्ब और बोवर (1999)[2] के विचार याद आ रहे हैं: "वॉयगॉट्स्की ने इस तथ्य में दिलचस्पी दिखाई कि मानवीय क्रिया को प्रतीकों और उपकरणों द्वारा मध्यस्थ किया जाता है। वह कहते हैं कि यह उपकरण भौतिक या मनोवैज्ञानिक हो सकते हैं। शोधकर्ताओं के अनुसार उपकरणों का गणितीय सोच और विद्यार्थियों द्वारा गणितीय

समझ विकसित करने के तरीक़े पर गहरा प्रभाव होता है।" इसे अपने कार्य से जोड़ते हुए मैं यह कह सकती हूँ कि टेसिलेशन की रंगीन किट ने टेसिलेशन की अवधारणा की समझ विकसित करने में मेरे विद्यार्थियों की मदद की। टेसिलेशन के मामले में कक्षा तीन के मेरे विद्यार्थी नौसिखिया थे। इसलिए, मुझे टेसिलेशन किट और 'रंगोमेट्री' का उपयोग करना पड़ा। कक्षा तीन की पाठ्यपुस्तक में, टाइलिंग की गतिविधि सिर्फ़ रंग भरने तक ही सीमित है। और बच्चों को पाठ्यपुस्तक से घूर्णन और सममित पैटर्न की कल्पना करना काफ़ी मुश्किल लगता है। जब वे किट की आकृतियों को पकड़ते हैं, तो वे यह गतिविधि करने के लिए प्रेरित होते हैं। आकृतियों का भौतिक स्पर्श उन्हें इनके गुणधर्मों से भी परिचित होने का मौक़ा देता है।

मैंने यह भी ग़ौर किया कि विद्यार्थियों को त्रिभुजों और षट्भुजों के साथ टेसिलेशन बनाना सबसे आसान लगता है। शायद ही कभी उन्होंने समबाहु त्रिभुजों और वर्गों को मिलाकर कोई टेसिलेशन बनाने की कोशिश की। इसका कारण घरों में बनाए जाने वाले *कोलम* और *रंगोली* डिज़ाइन का असर हो सकता है। एक लड़की रोहिणी ने कहा कि वह *कोलम* डिज़ाइन बनाने में अपनी माँ की मदद करती है और इसी कारण वह इतने आकर्षक डिज़ाइन बना सकी। कई अन्य लड़कियों ने भी इसी तरह के अनुभव साझा किए।

एक अन्य महत्त्वपूर्ण अवलोकन यह था कि कक्षा तीन के विद्यार्थी पूरी सतह की टाइलिंग में रुचि नहीं दर्शा रहे थे, बल्कि उन्हें घरों की आकृति, नाव, गमलों और रंगोली के डिज़ाइन बनाने में रुचि थी। यह दर्शाता है कि विद्यार्थी अपने आस-पास के परिवेश का काफ़ी ग़ौर से अवलोकन करते हैं और उससे बहुत जुड़े होते हैं। द्विविमीय टाइल बनाने की बजाय कुछ लड़कियों ने आकृतियों को एक के ऊपर एक रखकर ढेरी बनाना शुरू कर दिया। पूछे जाने पर उन्होंने बतलाया कि उन्हें इन टाइलों से बिल्डिंग बनाना अच्छा लगता है। मैं सोच रही थी कि क्या यह प्रतिक्रिया बिल्डिंग ब्लॉक से खेलने के पिछले अनुभव पर आधारित थी?

एनसीईआरटी के सीखने के प्रतिफल के अनुसार, जब बच्चे कक्षा तीन में आते हैं, तो उन्हें पैटर्न बनाना और उनका विस्तार करना आना चाहिए। टेसिलेशन की यह गतिविधि हमारे लिए सहायक सिद्ध हुई क्योंकि इसके माध्यम से कक्षा तीन के मेरे विद्यार्थी आकृतियों की कल्पना करने, उन्हें नियंत्रित करने और उनके गुणधर्मों का अनुमान लगाने में सक्षम हुए। मुझे विश्वास है कि यह आधारभूत गतिविधि मेरे विद्यार्थियों को ज्यामिति को बेहतर तरीक़े से समझने में मदद करेगी। मैंने उन्हें आकृतियों को पहचानने और उनके गुणधर्मों को समझाने में सक्षम पाया। नियमित बहुभुज टाइलों की मदद से वे बेहद जटिल मोनोहेड्रल टाइलिंग पैटर्न बना रहे थे। यद्यपि, एनसीईआरटी की कक्षा तीन की पुस्तकों में इन अवधारणाओं का विस्तृत रूप से उल्लेख नहीं किया गया है, पर मेरे विद्यार्थी अपने सहज ज्ञान से इसे पूरा कर रहे थे। वे आकृतियों में घूर्णन सममिति पहचान सकते थे; नियमित आकृतियों को पहचान सकते थे, उनके गुणधर्मों के बारे में भी बता सकते थे और गणित में शामिल सौन्दर्य पहलुओं की प्रशंसा भी कर सकते थे।

आभार : लेखक, डॉक्टर हनीत गांधी, दिल्ली विश्वविद्यालय के प्रति अपनी कृतज्ञता प्रकट करती हैं, जिन्होंने इस लेख के प्रस्तुतीकरण में महत्त्वपूर्ण योगदान किया।

References

1. Cobb, P., Bowers, J. (1999). Cognitive and Situated Learning Perspectives in Theory and Practice. Educational Researcher, Vol. 28, No. 2, pp. 4.
2. http://archive.dimacs.rutgers.edu/nj_math_coalition/fwfinal/ch11/ch11_k-02.html

गोमती राममूर्ति सावरयलू न्यागार सरकारी कन्या प्राथमिक विद्यालय, पुदुचेरी में प्राथमिक शिक्षक के तौर पर कार्यरत हैं। उन्होंने बीएससी गणित और बीएड की पढ़ाई की है और उन्हें 15 वर्षों का शिक्षण अनुभव है। वह पुदुचेरी के सीबीएसई पाठ्यचर्या कार्यान्वयन (Curriculum transaction) में एक स्रोत व्यक्ति हैं और अपने विद्यालय में गणित प्रयोगशाला का भी संचालन करती हैं। अवधारणात्मक समझ के लिए गणित-शिक्षण और अधिगम से जुड़ी विभिन्न शिक्षण विधियों के साथ प्रयोग करने में उनकी रुचि है। वह एससीईआरटी (तमिलनाडु) की पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति (2018) की सदस्य भी रह चुकी हैं। पहली कक्षा की गणित पाठ्यपुस्तक के निर्माण में उन्होंने एक लेखक के तौर पर योगदान किया है। उनसे gomurama@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कुमार गन्धर्व मिश्र
पुनरीक्षण एवं कॉपी एडीटिंग : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही