ज्यामितीय आकृतियाँ बनाना : डोरी का खेल

संध्या गुप्ता

यह लेख एक गतिविधि का वर्णन करता है जिसमें विद्यार्थियों ने बन्द-फन्देनुमा (closed-loop) डोरी का उपयोग करके विभिन्न ज्यामितीय आकृतियाँ बनाईं और आकृतियों के गुणधर्मों से जुड़ते हुए अवधारणात्मक समझ विकसित की। इस गतिविधि ने विद्यार्थियों को ज्यामितीय आकृतियों के बिन्दुओं, सीधी रेखाओं, किनारों (Edges), फलकों (Faces) और कोणों के अर्थ पर गहराई से सोचने का अवसर दिया। आमतौर पर उपलब्ध मानक मॉडलों से विद्यार्थी ज्यामितीय आकृतियों को केवल देखते हैं या सम्बन्धित निर्देशों का पालन कर इन्हें बनाते हैं। पर जिस गतिविधि का वर्णन यहाँ किया गया है, उसने विद्यार्थियों को मिल-जुलकर तरह-तरह की आकृतियाँ बनाने और इन आकृतियों के गुणधर्मों को सिद्ध करने के लिए रचनात्मकता से सोचने का अवसर दिया। और इस तरह उनकी गहन समझ को भी विकसित किया।

मुख्य शब्द (Keywords) : ज्यामितीय आकृतियाँ, कक्षा में भागीदारी, सिद्ध करना, कल्पना करना, द्विविमीय (2D) आकृतियाँ, त्रिविमीय (3D) आकृतियाँ, वर्ग, घन, चतुष्फलक (Tetrahedron), अष्टफलक (Octahedron), द्वादशफलक (Dodecahedron), खेल, काइनेस्थेटिक गतिविधियाँ।

अधिकांश कक्षाओं में गणित को एक अमूर्त विषय के रूप में पढ़ाया जाता है, जहाँ प्रक्रियात्मक ज्ञान (procedural knowledge) विकसित करने पर ज़ोर होता है। परिणामस्वरूप, ज़्यादातर विद्यार्थियों के लिए गणित एक उबाऊ और कठिन विषय बन जाता है। विद्यार्थी गणित के प्रति अपने मन में डर बैठा लेते हैं और इस विषय से जल्द से जल्द छुटकारा पाना चाहते हैं। जिस प्रकार विद्यार्थी गणित से जुड़ते हैं, न तो वह प्रत्यक्ष रूप से उपयोगी है और न ही रोचक है। अगर उन्हें गणित से जुड़ी सार्थक गतिविधियों में शामिल किया जाए, जो उन्हें गणितीय अवधारणाओं की खोजबीन करने और कल्पना करने (visualize) में सहायक हों, तो गणित काफ़ी हद तक उनके लिए एक रोचक विषय बन सकता है।

प्रमेय (Theorem) और प्रमाण (Proofs) तर्क और विवेचन के प्रमुख आधार हैं। पर जब यह दोनों विद्यार्थियों के सामने आते हैं, तब अधिकांश विद्यार्थियों का गणित के प्रति डर शुरू हो जाता है। विद्यालय की पाठ्यचर्या में ज्यामिति ही वह विषय है जिसके ज़रिए विद्यार्थी पहली दफ़ा प्रमाण और तर्क की धारणाओं से परिचित होते हैं। प्रमाण पर आने के पहले, विद्यार्थियों के लिए यह ज़रूरी है कि वह विभिन्न आकृतियों और उनके गुणधर्मों की कल्पना कर सकें एवं

इन आकृतियों की मूलभूत परिभाषा की अपनी समझ को पुख़्ता कर सकें। यह लेख एक ऐसी गतिविधि का वर्णन करता है, जहाँ कक्षा नौवीं के विद्यार्थियों ने विभिन्न 2D और 3D आकृतियों को बनाया। साथ ही उनके गुणधर्मों को सिद्ध किया व उसके लिए उचित कारण भी बताए। यह गतिविधि बचपन के लोकप्रिय खेल 'डोरी' पर आधारित है, जो शायद हममें से कई लोगों को याद हो। इसे गणित के एक खेल के रूप में प्रस्तुत किया गया है।

(जिन्होंने इस खेल के बारे में नहीं सुना है, उनके लिए मैं बता दूँ कि इस खेल में एक डोरी को खिलाड़ी की उँगलियों में लपेटा जाता है ताकि कोई पैटर्न बन सके। यह अकेले भी खेला जा सकता है और जोड़ी में भी। एक खिलाड़ी कोई पैटर्न बना सकता है और दूसरा उसी पैटर्न को आगे बढ़ा सकता है। इस प्रक्रिया में डोरी एक खिलाड़ी के हाथ से दूसरे खिलाड़ी के हाथ में तब तक आती-जाती रहती है, जब तक वे अटक न जाएँ और आगे कोई पैटर्न न बढ़ पाए या जब तक कोई खिलाड़ी ग़लती न करे। ऐसा होने पर खेल पुन: शुरू किया जाता है।)

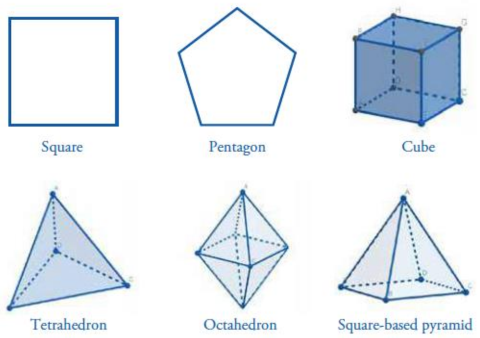
गणित की एक पारम्परिक कक्षा में, आकृतियों का परिचय आमतौर पर ब्लैकबोर्ड पर चित्र बनाकर दिया जाता है। कुछ विद्यालयों में, विद्यार्थियों को विभिन्न आकृतियों के 2D और 3D मॉडल दिखाए जाते हैं। एक प्रचलित हैंड्स-ऑन गतिविधि है–जाल (net) को काँट-छाँटकर किसी आकृति को बनाना। हालाँकि, इस तरह की गतिविधियाँ रोचक हैं एवं विद्यार्थियों को निर्देशों के अनुसार किसी आकृति को बनाने का मौक़ा प्रदान करती हैं, पर ऐसी गतिविधियाँ आकृतियों से सम्बन्धित ज्यामितीय तर्क-वितर्क के विकास में सहायक नहीं हैं।

गतिविधि

इस गतिविधि का उद्देश्य विभिन्न 2D और 3D आकृतियों को बनाना और इनके गुणधर्मों को तार्किकता[1] से सही साबित करना है। गुणधर्मों को सही साबित करने के लिए कैथी हंफ्रेस[2] द्वारा प्रस्तावित फ्रेमवर्क का उपयोग किया गया–*पहले ख़ुद को विश्वास दिलाओ, फिर एक मित्र को, फिर उस व्यक्ति को विश्वास दिलाओ जिसे शंका हो* । इस गतिविधि में एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों को शामिल किया गया था। उन्हें लगभग 4-4 के समूह में बाँटा गया। कार्य को पूरा करने की अवधि 90 मिनट थी। प्रत्येक समूह को एक 8 फुट लम्बी डोरी का बन्द फन्दा दिया गया था। उन्हें इस फन्दे की सहायता से दी गई आकृतियों को बनाना था। इन्हें बनाने की शर्तें कुछ इस प्रकार से थीं :

- **क.** डोरी की गाँठ को कभी भी खोलना नहीं है,
- **ख.** समूह के प्रत्येक व्यक्ति का कम से कम एक हाथ डोरी से जुड़ा रहना चाहिए,
- **ग.** समूह को समूची डोरी का इस्तेमाल करना है,
- **घ.** समूह को अपने दावे (claim) को सही साबित करना है, और
- **ङ.** आकृति बनाने या मापने के लिए ज्यामिति बॉक्स से किसी उपकरण का उपयोग नहीं करना है।

इस गतिविधि के लिए वर्ग, पंचभुज, घन, चतुष्फलक, वर्ग-आधारित पिरामिड और अष्टफलक आकृतियों का चयन किया गया था।



Square - वर्ग, Pentagon - पंचभुज, Cube - घन, Tetrahedron - चतुष्फलक, Octahedron - अष्टफलक, Square-based pyramid - वर्ग-आधारित पिरामिड

चित्र-1 : डोरी के बन्द फन्दे से बनाई जाने वाली आकृतियाँ

चर्चा

प्रत्येक आकृति को बनाने के लिए विद्यार्थियों द्वारा कई विधियाँ ईजाद की गईं। इस लेख में हम वर्ग और घन आकृतियों से सम्बन्धित विधियों पर चर्चा करेंगे। विद्यार्थी जब गतिविधि में व्यस्त थे, तब शिक्षकों ने सोचने पर मजबूर करने वाले सवाल पूछकर प्रक्रिया को आसान बनाया। गतिविधि के आरम्भ में, शिक्षकों और सहायक कर्मियों ने बन्द फन्दे की सहायता से एक समबाहु त्रिभुज को बनाना दर्शाया। इस प्रक्रिया के दौरान कुछ इस प्रकार के सवाल पूछे गए : आप कैसे जानते हैं कि यह आकृति एक त्रिभुज है? आप सारी भुजाओं को बराबर कैसे सिद्ध कर सकते हैं? कोणों के बारे में आपके क्या विचार हैं और क्यों हैं? ऐसा करते हुए शिक्षक ने एक मित्र और सन्देहवादी (sceptic) व्यक्ति की भूमिका निभाई और आकृतियों से सम्बन्धित अपने तर्कों को सही ठहराने और सोचने के विभिन्न रास्तों को देखने व बनाने के लिए विद्यार्थियों को 'प्रेरित' किया।

1. एक वर्ग बनाना

एक वर्ग बनाने के लिए भिन्न-भिन्न विधियों का उपयोग किया गया। इनमें से कुछ विधियों पर नीचे चर्चा की गई है :

क. फन्दे को कुछ इस प्रकार मोड़ा गया कि चार बराबर भुजाएँ प्राप्त हों, फिर इसे एक चतुर्भुज के रूप में खोला गया (**चित्र 2a**)। इसके अन्त:कोणों (interior angles) को समायोजित किया गया ताकि इसके चारों कोण बराबर माप (समकोण) के हों। कुछ समूहों ने यह सिद्ध करने का प्रयास किया कि सारे कोण 90 डिग्री के हैं, तो अन्य समूहों ने यह सिद्ध करने का प्रयास किया कि सारे कोण बराबर हैं। यह सिद्ध करने के लिए कि दिया गया कोण समकोण था विद्यार्थियों ने सन्दर्भ के तौर पर किसी पुस्तक के कोने या किसी दीवाल और फ़र्श के कोने का उपयोग किया। इस विधि में यह चुनौती थी कि किसी पुस्तक के कोने को समकोण कैसे सिद्ध करें? तो, इसके लिए तर्क दिया गया कि अगर सारे अन्त:कोण

पुस्तक के कोने से मेल खाते हैं, तो इसका मतलब होगा कि सारे कोण बराबर हैं, अत: चतुर्भुज एक वर्ग होगा।

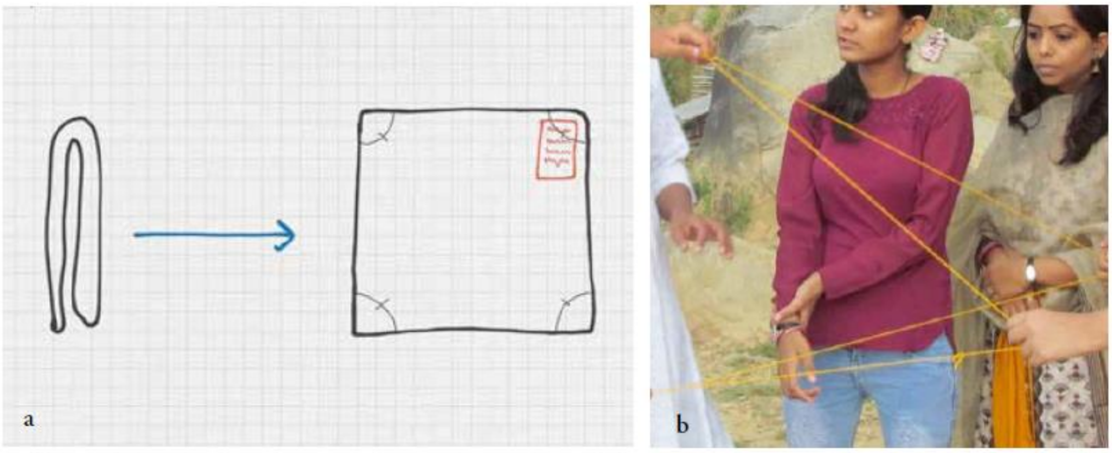


Figure 2: (a) Equally folded loop converted to square, angle measured with a book corner. (b) Students working on building a square

चित्र-2 : (a) बराबर मोड़े गए फन्दे को वर्ग में बदला गया, कोण को एक पुस्तक के कोने की सहायता से मापा गया। (b) एक वर्ग बनाने का प्रयास करते हुए विद्यार्थी।

ख. फन्दे को कुछ इस प्रकार मोड़ा गया कि दो विकर्णों के साथ एक चतुर्भुज बने (**चित्र 3**)। सभी भुजाएँ समान हैं यह सुनिश्चित करने के लिए सभी भुजाओं की तुलना की गई। दोनों विकर्णों को भी बराबर दर्शाया गया ताकि यह साबित किया जा सके कि यह चतुर्भुज वाकई में एक वर्ग है। कुछ समूहों ने विकर्ण नहीं बनाया, पर इसे एक डण्डे के सहारे मापा।

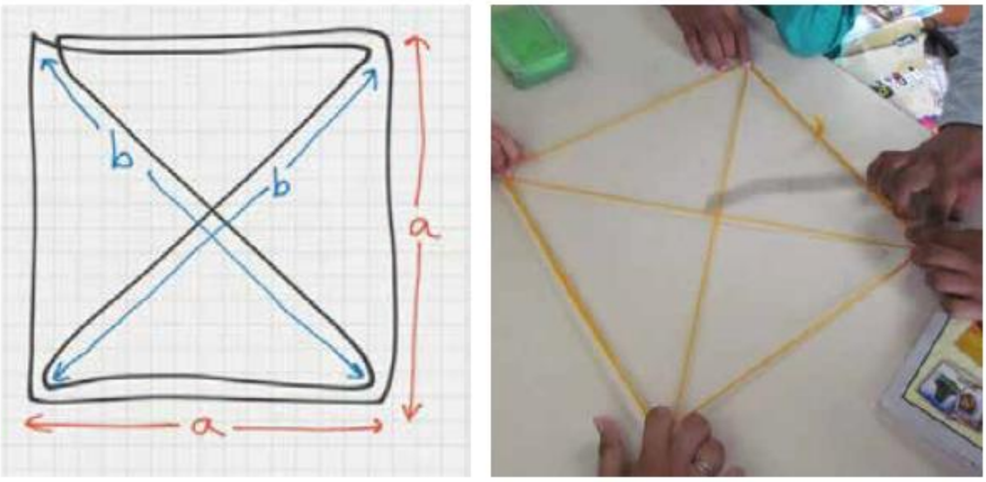


Figure 3a. Folding strategy for case (b)

Figure 3b. Students measuring the diagonal with a stick

चित्र-3a. : स्थिति (b) के अनुसार वर्ग बनाने के लिए फन्दे को मोड़ने की विधि (ऊपर)

चित्र-3b. : डण्डे की सहायता से विकर्ण मापते विद्यार्थी (नीचे)

ग. इस विधि में फन्दे को दो दफ़ा बराबर-बराबर मोड़ा गया ताकि आठ बराबर भुजाएँ प्राप्त हो सकें (**चित्र-4** देखें)। विद्यार्थियों ने केन्द्र बिन्दु (**चित्र-4** में दर्शाई गई W की आकृति का मध्य बिन्दु) को पकड़कर और भुजाओं को फैलाकर जोड़ के चिह्न की एक आकृति बनाई। जोड़ के चिह्न के चारों कोणों को एक पुस्तक के कोने की सहायता से बराबर दर्शाया गया। आख़िरकार, डोरी के चार केन्द्र बिन्दुओं को एक-दूसरे से दूर ले जाकर एक वर्ग बनाया गया।

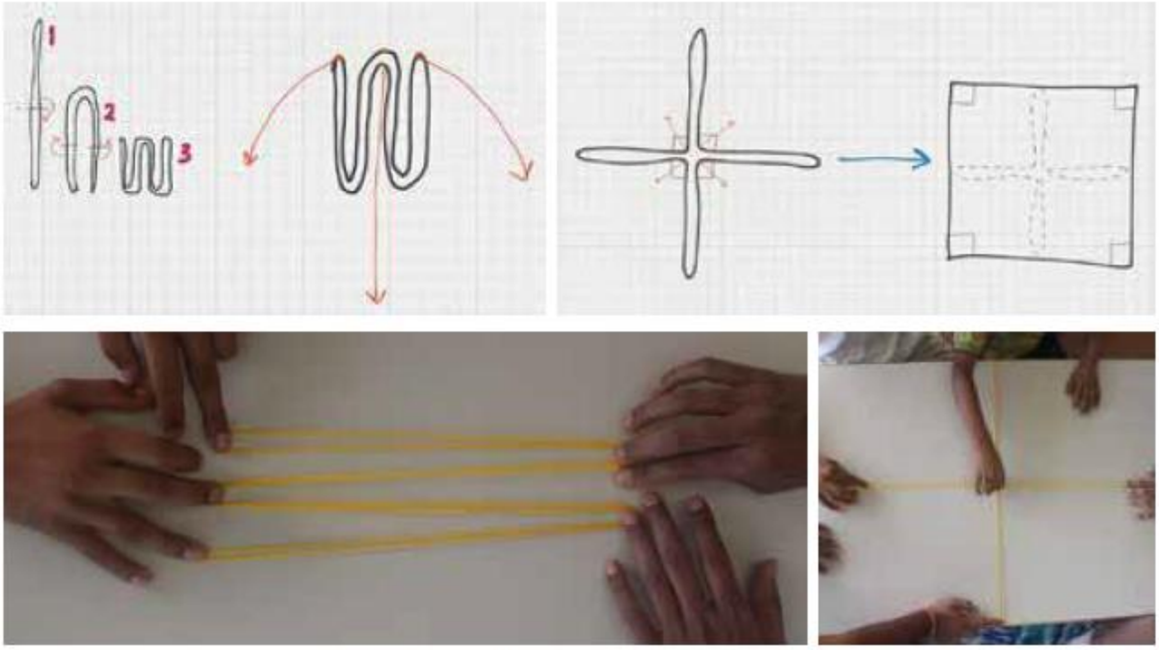


Figure 4: Folding strategy for case (c)

चित्र-4 : स्थिति (c) के अनुसार वर्ग बनाने के लिए फन्दे को मोड़ने की विधि

इस चर्चा में एक महत्त्वपूर्ण बिन्दु उभरा कि यह सिद्ध करना ज़रूरी है कि चारों बिन्दु एक ही तल में हैं। साधारणत: सारी भुजाओं को बराबर सिद्ध करना विद्यार्थियों को आसान लगा था, पर अधिकांश समूहों के लिए कोणों को बराबर सिद्ध करना थोड़ा चुनौतीपूर्ण रहा। शिक्षक ने इन प्रश्नों के ज़रिए विद्यार्थियों का मार्गदर्शन किया : समकोण होने का क्या मतलब है? हम अपने आस-पास इसे कहाँ देखते हैं? अगर सारे कोण 90 अंश के हैं, तो एक-दूसरे से इनकी तुलना कैसे हो सकती है? अगर कोई विद्यार्थी जवाब देता है कि इसका मतलब है कि सारे कोण बराबर हैं, तो आप इसे कैसे सिद्ध कर सकते हैं कि सारे कोण बराबर हैं? ऐसी तुलना के लिए कौन-सी विधि अपनाई जा सकती है?

एक समूह ने पाइथागोरियन त्रिक (3, 4, 5) के अनुसार गाँठ लगे एक अलग फन्दे को बनाने के विचार पर भी चर्चा की ताकि कोनों को समकोण साबित किया जा सके (**चित्र-5**)।

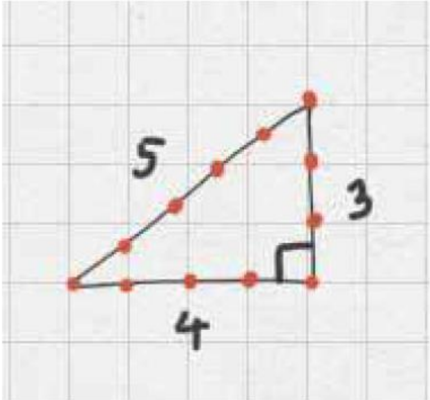


Figure 5: A closed loop with 12 equidistant knots being held as a right angled triangle

चित्र-5 : बराबर दूरी पर 12 गाँठों वाले इस बन्द फन्दे को एक समकोण त्रिभुज की तरह रखा गया है।

इस गतिविधि के समाप्त होने तक समूहों ने वर्ग की मूलभूत परिभाषा विकसित कर ली थी। उन्होंने स्पष्ट रूप से व्यक्त किया कि 'वर्ग एक चतुर्भुज है जिसकी सारी भुजाएँ और सारे कोण बराबर होते हैं।' एक महत्त्वपूर्ण समझ यह विकसित हुई कि सभी अन्त:कोणों को बराबर सिद्ध करना किसी कोण को 90 अंश के बराबर सिद्ध करने से अलग है। किसी आकृति को वर्ग सिद्ध करने के लिए यह शर्तें पूरी करना ज़रूरी है :

क. सारे बिन्दु एक ही तल में हों और चारों किनारे एक सीधी रेखा हों,
ख. सारी भुजाएँ बराबर हों, और
ग. इनमें से कोई एक :

- कोने के सारे अन्त:कोण बराबर हों,
- कोने के सारे अन्त:कोण समकोण हों,
- दोनों विकर्ण बराबर हों।

गतिविधि के पूर्व इन समूहों से जान-बूझकर आकृतियों के गुणधर्मों के बारे में नहीं पूछा गया था। शुरुआत में, जब विद्यार्थियों ने अपने-अपने समूहों में एक-दूसरे को वर्ग की परिभाषा पर यक़ीन दिलाने की कोशिश की, तब परिभाषा में शामिल अन्तर सामने नहीं आए। लेकिन, जब सुगमकर्ताओं और शिक्षकों ने सन्देहवादियों की भाँति सवाल पूछना शुरू किया, तब विद्यार्थियों को इसका एहसास हुआ कि वर्ग के उनके प्रमाण में क्या अधूरा था। जब उन्हें घन की आकृति बनाने को कहा गया तब तक वे शंका से भरे प्रश्न पूछना शुरू कर चुके थे।

2. एक घन को बनाना

जब विद्यार्थियों को फन्दे की सहायता से एक घन बनाने को कहा गया, तब शुरुआत में उन्हें थोड़ा संशय था, लेकिन जल्द ही वे इस कार्य में लग गए। संरचना से सम्बन्धित एक महत्त्वपूर्ण बिन्दु इस स्पष्ट समझ का होना था कि किसी फलक के वर्ग होने के लिए, सारे बिन्दुओं का एक ही समतल में होना ज़रूरी है। इस समझ ने घन बनाने से पहले एक काग़ज़ पर घन के स्वरूप (**चित्र-1** के अनुसार) को उकेरने में मदद की। घन की परिभाषा को समझने के साथ-साथ यह समझना भी महत्त्वपूर्ण था कि किसी संरचना को घन सिद्ध करने के लिए क्या शर्तें ज़रूरी हैं। एक उपयोगी तर्क के लिए सटीक गणितीय शब्दावली का महत्त्व स्पष्ट था।

घन बनाने के लिए उपयोग की गई कुछ विधियाँ निम्नलिखित हैं :

क. फन्दा विधि (Loop method) : घन की फलकों को अलग कर घन के जाल की कल्पना करें। **चित्र-6** में दर्शाए अनुसार चरण 1 से लेकर 3 तक का पालन करें। चरण 4 में दर्शाए अनुसार प्रत्येक फन्दे को वर्ग की आकृति में समायोजित करें। समान रंग वाले बिन्दु, समान शीर्ष पर मिल रहे वर्ग के कोनों को दर्शा रहे हैं। जब सारे शीर्ष जुड़ जाते हैं तब एक घनाभ की रचना होती है। वर्गाकार फलकों के लिए भुजाओं को समायोजित करना होगा।

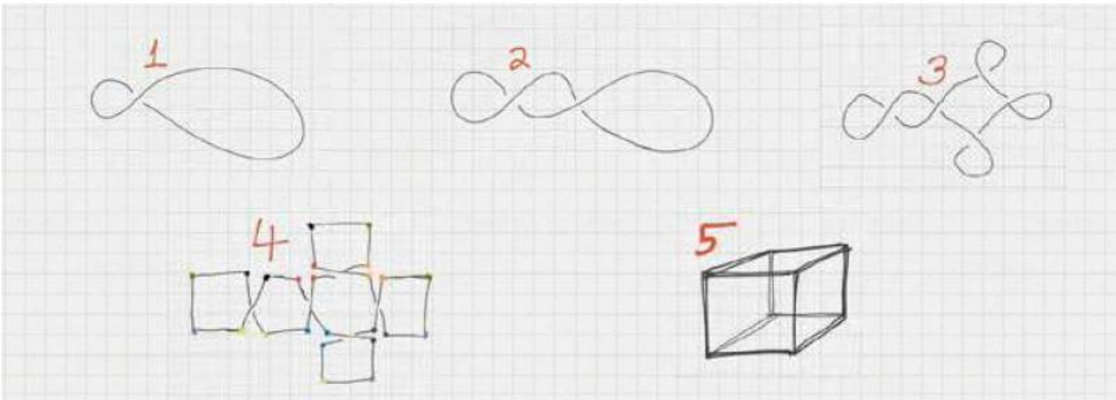


Figure 6. Loop method

चित्र-6 : लूप विधि

ख. नोक बनाकर विस्तार करना (Pinch-and-Extend Method) : एक समतल सतह पर एक वर्गाकार फलक बनाएँ और एक छोटा फन्दा बनाने के लिए किसी कोने पर एक नोक बनाएँ। छोटे फन्दे को वर्ग से दूर ले जाएँ, ताकि एक किनारा बन सके। मूल आकृति वर्ग ही रहने दें, पर इसे छोटा होने दें। मूल वर्ग के सभी चार कोनों के साथ यही प्रक्रिया दोहराएँ और वर्ग की सतह से नए चार किनारों को ऊपर की ओर सीधा ले जाएँ। अभी भी घन के चार किनारे बच रहे हैं। अब आगे, फन्दे के प्रत्येक किनारे का विस्तार करें और इसे 90 अंश पर मोड़ें ताकि बाक़ी चार किनारों को बनाया जा सके।

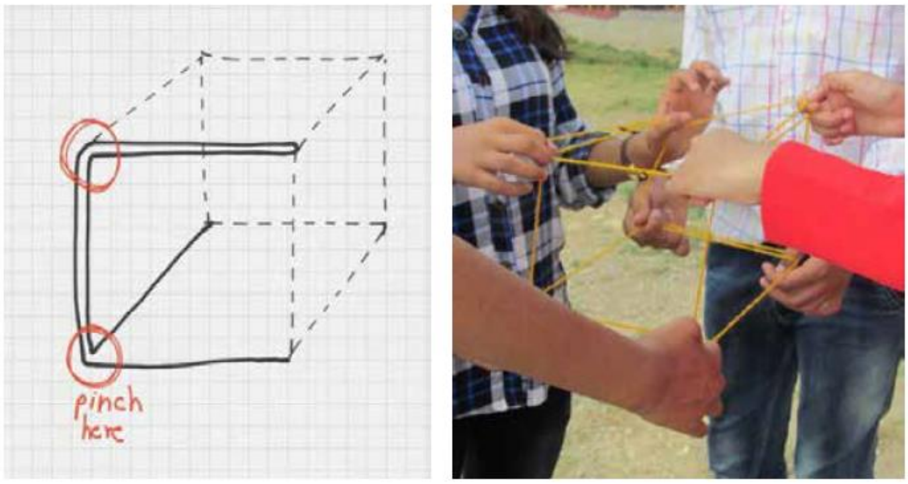


Figure 7: Pinch-and-Extend method

चित्र-7 : नोक बनाकर विस्तार करने की विधि

ग. **किनारा उकेरने की विधि (Trace-the-Edge method)** : एक वास्तविक घन के सारे किनारों को उकेरते हुए वापिस प्रारम्भिक बिन्दु पर आइए। घन बनाने के लिए सभी शीर्षों को पकड़कर फलकों को वर्गाकार बनाने की कोशिश करिए।

इस 3D डिज़ाइन को घन सिद्ध करना बहुतों के लिए एक चुनौती थी। घन के गुणधर्मों से सम्बन्धित अवधारणात्मक समझ ही इसका हल थी। कई समूह इसी विचार से जूझते रहे कि उन्हें प्रत्येक फलक को एक वर्ग सिद्ध करना होगा और यह भी सिद्ध करना होगा कि सारे निकटवर्ती तल एक-दूसरे पर लम्ब हैं। काफ़ी सोच-विचार के बाद, समूहों के अनुसार घन की यह परिभाषा तय की गई : *"एक घन छह वर्गाकार फलकों की एक बन्द 3D संरचना है, जहाँ प्रत्येक शीर्ष पर 3 फलक मिलते हैं।"* डोरी की मदद से किसी आकृति को घन सिद्ध करने की आवश्यक न्यूनतम शर्तें हैं :

क. 3D आकृति में छह फलकों की रूपरेखा (outline) हो,

ख. जिन फलकों की रूपरेखा बनाई गई है वे सभी फलक ऐसे वर्ग होने चाहिए, जो एक-दूसरे से सर्वांगसम (congruent) हों,

ग. प्रत्येक शीर्ष पर तीन फलक मिलें।

'फलक' से क्या आशय है, इस पर भी सोच-विचार हुआ। चूँकि डोरी का इस्तेमाल होना था, इसलिए वास्तविक फलक की बजाय डोरी की सहायता से फलक की रूपरेखा को ही बनाया गया था।

फन्दों की सहायता से विद्यार्थियों ने एक चतुष्फलक (tetrahedron) और एक अष्टफलक (octahedron) भी बनाया (**चित्र 8**)। इस दौरान आकृति बनाने और इनके गुणधर्मों को सिद्ध करने का तरीक़ा विकसित करने के लिए पिछली प्रक्रियाओं का पालन किया गया। 90 मिनट के इस सत्र की समाप्ति तक कुछ समूहों ने अन्य आकृतियों जैसे– द्वादशफलक पर भी काम किया।

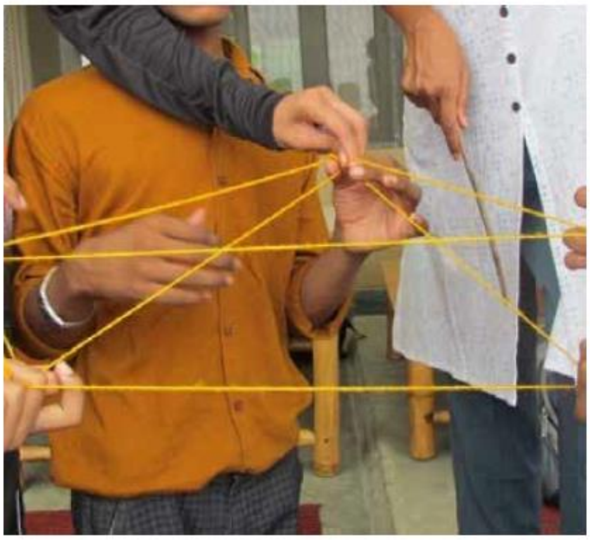


Figure 8: Students building square based prism and octahedron

चित्र-8 : अष्टफलक और वर्ग आधारित प्रिज़्म बनाते विद्यार्थी

सत्र के सुगमकर्ताओं ने सन्देहवादी व्यक्तियों की भूमिका निभाई। उन्होंने विद्यार्थियों को ज्यामितीय परिप्रेक्ष्य में किसी बिन्दु, कोई सीधी रेखा, एक किनारा, फलक या किसी कोण के बारे में गहराई से सोचने का मौक़ा दिया। कुछ विद्यार्थियों ने शीर्ष को उँगलियों से पकड़ कर इसके अर्थ पर भी तर्कपूर्ण चर्चा की। कई ज्यामितीय अवधारणाओं की परिभाषाओं पर पुनर्विचार किया गया, सवालात हुए और चर्चा भी हुई। संवाद के दौरान उचित शब्दावली और इसके गणितीय अर्थ की महत्ता सामने आई। उदाहरण के लिए– किसी घन के लिए 'भुजा' शब्दावली का प्रयोग नहीं होता है, बल्कि 'फलक' प्रयोग होता है, 'भुजा' शब्द वर्ग के सन्दर्भ में प्रयोग किया जाता है; घन की शब्दावली में 'कोने' का प्रयोग नहीं होता बल्कि 'शीर्ष' का प्रयोग किया जाता है; यह ज़रूरी नहीं है कि किसी पंचभुज की सारी भुजाएँ और सारे अन्त:कोण बराबर हों, केवल समपंचभुज में ही ऐसा सम्भव है और इसी प्रकार आगे और भी शब्दावलियों पर चर्चा हुई। यह देखना काफ़ी सन्तोषजनक था कि गतिविधि में समूह के प्रत्येक सदस्य ने असफल होने के डर के बिना सक्रिय भागीदारी की। इस कार्य को विद्यार्थियों ने कई तरीक़ों से पूरा किया, एक-दूसरे के विचारों को सुना और एक-दूसरे के कार्यों में सहयोग किया। बहुत सारे विद्यार्थियों ने यह महसूस किया कि उन्होंने पहली दफ़ा इन आकृतियों की स्पष्ट समझ विकसित की। जो विद्यार्थी पहले वर्ग को समान भुजाओं वाले चतुर्भुज के रूप में परिभाषित करते थे, उन्होंने अपनी परिभाषा में 'समान अन्त:कोण' को भी जोड़ा। किसी आकृति को एक घन सिद्ध करने के लिए आवश्यक बिन्दुओं का पता लगाने के सन्दर्भ में विद्यार्थियों ने न सिर्फ़ दो फलकों के बीच कोणीय सम्बन्ध पर ध्यान दिया, बल्कि दो समतलों के बीच कोणीय सम्बन्ध पर भी ज़ोर दिया। विद्यार्थियों ने यह भी महसूस किया कि उन्हें अब आकृतियों के गुण जैसे फलकों की संख्या, किनारों, शीर्षों, अन्त:कोणों आदि को याद करने की ज़रूरत नहीं थी क्योंकि वे अब इन आकृतियों की कल्पना कर सकते हैं और आवश्यकता अनुसार इनके गुणधर्मों को आज़माकर परख सकते हैं। आकृतियों की यह खोजबीन इस सत्र के साथ यहीं

समाप्त नहीं हुई, बल्कि इस सत्र के कई दिनों बाद भी यह चर्चा का बिन्दु बनी रही। सचमुच, ऐसा होना इस गतिविधि की पराकाष्ठा थी।

आभार

लेखक सरित शर्मा, भारत श्रेष्ठ और अपूर्वा हुडा सहित आविष्कार टीम के सदस्यों का उनके सहयोग के लिए धन्यवाद करती हैं। वह प्रतिभागी शामली मनस्वी का भी धन्यवाद करती हैं, जिन्होंने गतिविधि से सम्बन्धित अपने विचार, चित्र और रचनात्मक फीडबैक सुझाए।

सन्दर्भ

1. Boaler, J., “Building Shapes”, Week of Inspirational Math, Grade 9-12, youcubed.org.
2. Boaler, J., Humphreys, C., “Connecting Mathematical Ideas: Middle School Video Cases to Support Teaching and Learning”, published by Heinemann; 2nd Edition (March 24, 2005)

संध्या गुप्ता आविष्कार की संस्थापक हैं जो विज्ञान, गणित, कला और प्रौद्योगिकी का केन्द्र है। आविष्कार हिमाचल प्रदेश के पालमपुर के पास स्थित है। संध्या को गणित सम्बन्धित रचनात्मक विधियों को विकसित करने और उन पर शोध करने से विशेष लगाव है। वे विद्यार्थियों और शिक्षकों के लिए गणित को प्रासंगिक, विज़ुअल और वास्तविक बनाने में ख़ासी दिलचस्पी रखती हैं। उन्होंने इओवा स्टेट यूनिवर्सिटी, इओवा, यूएसए से इलेक्ट्रिकल इंजीनियरिंग में पीएचडी की उपाधि प्राप्त की है। उनसे aavishkaar.palampur@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कुमार गंधर्व मिश्र
पुनरीक्षण एवं **कॉपी-एडीटिंग** : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही