Translation of **The Conjecturing Classroom : Anushka Rao Fitzherbert From Azim premji University At Right Angles_ March, 2018**

अनुमान की एक कक्षा

अनुष्का राव फिट्ज़हर्बट

मुख्य शब्द : शिक्षणशास्त्र, कक्षा में पढ़ाने के तरीक़े व नियम, बच्चों का जुड़ाव, अनुमान, जाँच, विरोधाभास, प्रमाण

यूनाइटेड किंग्डम (UK) में अपने शिक्षक-प्रशिक्षण (PGCE) के दौरान पहली बार अनुमान की कक्षा का विचार मेरे सामने आया था। हम गणित की कक्षा में 6-7 वर्षीय बच्चों की एक वीडियो क्लिप देख रहे थे। कक्षा साधारण-सी लग रही थी। पंक्तियों में बैठे बच्चे। थोड़ी-सी बातचीत और मामूली व्यवधान, मेज़ पर बिखरी हुई किताबें, पेंसिल, इरेज़र और सामने बिना किसी शानदार संसाधन के, एक साधारण-सा व्हाइटबोर्ड पैन पकड़े हुए शिक्षिका थीं। अपने कोर्स के दौरान अभी तक मैंने जिन नए रोमांचक विचारों के बारे में सुना था– जैसे कि बच्चों और संसाधनों को व्यवस्थित करने के रचनात्मक तरीक़े, समूह-कार्य का जादू, जोड़-तोड़ का उपयोग आदि– वह कहीं दिखाई नहीं दे रहे थे। यह एक नीरस, नियमित कक्षा जैसी लग रही थी। फिर शिक्षिका ने यह कहते हुए शुरुआत की : “कल लूसी ने जो अनुमान बताया था उसे कौन बता सकता है?” कई सारे हाथ उठे और जो कुछ भी वह कह रहे थे, शिक्षिका ने उसे बोर्ड पर लिखना शुरू किया : “प्रत्येक संख्या को क्रमागत संख्याओं के योग के रूप में लिखा जा सकता है” और इसके बाद उन्होंने लिखा “लूसी का अनुमान”।

मैं इसमें खो-सी गई थी। शिक्षिका और इन 6-7 साल के बच्चों द्वारा इस्तेमाल की गई भाषा वैसी बिल्कुल नहीं थी, जैसी भाषा की कल्पना मैंने गणित की कक्षा में की थी। उन्होंने ‘अनुमान के परीक्षण’ और उसे ‘कैसे सिद्ध या अस्वीकृत’ किया जाए, इसकी ‘रणनीतियों’ पर चर्चा की। जैसे-जैसे कक्षा आगे बढ़ती गई, शिक्षिका द्वारा अन्य बच्चों के सम्बन्धित अनुमानों, मसलन “यह केवल धनात्मक संख्याओं के लिए काम करता है” या “प्रत्येक संख्या को अन्य संख्याओं के गुणन के रूप में लिखा जा सकता है” को जोड़ने से प्रवाह अक्सर बाधित होता था। हर बार वह बच्चों द्वारा बोले गए कथनों के ऊपर उनके नाम लिख देतीं जैसे कि “एली का अनुमान" या “कियान का अनुमान”। अक्सर बच्चों के चिल्लाने की आवाज़ें आती रहतीं, जैसे कि “मैंने इसे ग़लत साबित कर दिया है– यह 6 के लिए काम नहीं करता है”। और फिर कुछ मिनटों के बाद एक और बच्चा कहता “यह करता है!” और उनमें अपने निष्कर्षों की तुलना करने का उतावलापन होता। जब यह पाठ ख़त्म होने को आया तो, कुछ बच्चों ने ध्यान दिया कि यह अनुमान सभी विषम संख्याओं के लिए सही लग रहा था, और यहाँ तक कि वह इसके प्रमाण के क़रीब भी थे, जिसे उनमें से एक ने बोर्ड पर समझाने की कोशिश भी की।

पाठ के बारे में सोचते हुए, मुझे महसूस हुआ कि जो बात मुझे छू गई थी, वह बच्चों की इस चर्चा में सक्रिय भागीदारी व अधिकार (agency) था। किन्हीं मानकों से देखने पर यह काफ़ी अराजक और यहाँ तक कि थोड़े शोर से भरा भी था, लेकिन ऐसा प्रतीत होता था (कम-से-कम एक उत्सुक व उत्साही नए शिक्षक को, जो एक स्क्रीन की सुरक्षित दूरी से देख रहा है) कि बच्चे इसमें पूरी तरह शामिल थे, और वे गणित को रचने में शामिल लग रहे थे। बिना यह सुनिश्चित किए कि वे वास्तव में कहाँ जा रहे थे, वे नई चीज़ों को आज़माने में भी सहज महसूस करते लग रहे थे। और, मेरे ख़याल से वे ख़ुद को महत्त्वपूर्ण महसूस कर रहे थे, उनके अनुमानों को उनका नाम दिया जा रहा था, और कक्षा के अन्य बच्चे उन अनुमानों को उपयुक्त महत्त्व दे रहे थे। वे वास्तव में छोटे-छोटे गणितज्ञों के एक समूह की तरह लग रहे थे, एक और बात जो शिक्षिका अक्सर अपने बच्चों का वर्णन करने के लिए या उन्हें प्रोत्साहित करने के लिए इस्तेमाल करती थीं, वह थी– "एक अच्छा गणितज्ञ अपने काम को कैसे रिकॉर्ड करेगा?"

मुझे पता था कि यह उस तरह की कक्षा थी, जैसी मैं चाहती थी— यानी कि ध्यानपूर्वक बनाई गई पाठयोजनाओं (जो खोजबीनों और खुले कार्यों से भरपूर थीं) से सुसज्जित कक्षा। तो जब मेरे पास अपनी कक्षा थी तो मैंने तत्परता से काम शुरू किया। लेकिन परिणाम मेरी उम्मीदों से एकदम उलट रहा। मुझे यह समझने में एक लम्बा समय लगा कि मेरे सपनों के अनुमान की इस कक्षा को प्राप्त करने के लिए शिक्षक को कितना विचार और काम करना पड़ा होगा। देखने से सब कुछ बिना तनाव का और आसान लग रहा था, लेकिन वास्तव में वह शिक्षिका बहुत काम कर रही थीं; जो बहुत गूढ़ था।

अब मेरा मानना है कि अनुमान की कक्षा बनाने के लिए, मुझे, यानी एक शिक्षक को पूरी तरह से इसमें निवेश करना चाहिए। यदि मैं ऐसा करती हूँ, तो मैं एक विचारशील अनुमान को उतना ही महत्त्व दूँगी जितना कि उस अनुमान को देती हूँ जो मुझे पता है कि सही है। जब कोई अनुमान सिद्ध या अस्वीकार हो तो मुझे समान रूप से ख़ुश होना चाहिए। मुझे बच्चों को उस दिशा में जाने देने के लिए तैयार रहना चाहिए, जिसमें वे रुचि रखते हैं, भले ही वह कक्षा के बाक़ी लोगों के काम से अलग हो। अनुमान की कक्षा बनाना यानी जिज्ञासा को महत्त्व देना और बच्चों को अपने जिज्ञासु प्रश्नों की यथासम्भव खोज करने की अनुमति देना है। बेशक, हर पाठ ऐसा नहीं हो सकता है या होना भी नहीं चाहिए। ऐसा भी समय होता है जब मुझे पाठ्यचर्या की ख़ातिर या किसी पूर्णत: नई अवधारणा के लिए बच्चों को तैयार करने के लिए उनका स्पष्ट रूप से मार्गदर्शन करने की आवश्यकता होती है। फिर भी मैं चाहती हूँ कि मेरे बच्चे गणित की खोजबीन करते समय पूरी तरह से सहज महसूस करें और प्रश्नों से भरपूर हों, और इसके लिए उन्हें, अनुमान लगाने के लिए बहुत सारे अवसरों की ज़रूरत होती है। साथ ही कक्षा में दिशानिर्देशों का एक सेट होना भी आवश्यक है। अनुमान को बढ़ावा देने वाले कामों में बच्चों द्वारा उचित मात्रा में स्वतंत्र रूप से कार्य की आवश्यकता होती है। स्पष्ट दिशानिर्देश होने से उन्हें कार्य करने में मदद मिलती है। दिशानिर्देशों में साथी सहपाठियों का सम्मान

करना भी शामिल होना चाहिए। बच्चे इसमें पूरी तरह शामिल होते हैं और इस तरह के दिशानिर्देशों से सहमत होते हैं, जैसे कि “जब कोई बात कर रहा है, या समझा रहा है, तो हमेशा सुनें” और “किसी को अपने बात या स्पष्टीकरण को समाप्त करने दें”; अगर आपको लगता है कि कोई ग़लत है, तो सम्मानजनक भाषा का उपयोग करें, जैसे “मुझे लगता है कि आपके काम करने में कोई त्रुटि हो सकती है” या “मैंने देखा है कि आप जो कह रहे हैं वह फलां-फलां स्थिति के लिए काम नहीं करता है, मुझे लगता है कि ऐसा इस कारण से है।” यदि चर्चा के दौरान माहौल गर्म हो जाए और कोई ज़ोर-से चिल्लाए, “आप पूरी तरह से ग़लत हैं!” तो तुरन्त ही उन्हें दिशानिर्देशों की याद दिलाएँ और बच्चे इसको मानने के लिए सहर्ष तैयार होते हैं। विशेष रूप से अगर वे सभी स्कूल सत्र की शुरुआत में कक्षा के लिए तय किए गए दिशानिर्देशों का हिस्सा थे और उनसे सहमत थे।

मैंने पिछले साल ऋषि वैली स्कूल में सातवीं कक्षा को पढ़ाना शुरू किया। यहाँ तीन पाठों की संक्षिप्त जानकारी के साथ एक विवरण दिया गया है कि अनुमान की कक्षा को बनाने की दिशा में, पूरे वर्ष किस तरह काम हुआ है। मैं कक्षा 7 के दो वर्गों (कक्षा 7 ‘अ’ और कक्षा 7 ‘ब’) को साथ-साथ में, अक्सर एक ही पाठ को लगातार पढ़ा रही थी। यहाँ जो विवरण है, वह दोनों वर्गों में हुई चीज़ों का एक सम्मिश्रण है, हालाँकि वास्तव में बहुत बार पाठ समान रूप से सामने आते हैं। इसलिए मैं 7 ‘अ’ और 7 ‘ब’ दोनों के बारे में एक ही कक्षा के रूप में बात करूँगी।

पाठ 1 : हिचकी संख्याएँ

उनके साथ मेरा पहला पाठ एक खोज कार्य था, जिसे मैंने 'हिचकी संख्या' कहा। यह पता चला कि उनमें से कुछ ने पिछले वर्ष इस खोज पर काम किया था, हालाँकि एक अलग तरीक़े से, लेकिन यह अभी भी अनुमान लगाने के लिए एक अच्छी शुरुआत थी। मैंने कक्षा को तीन अंकों की एक संख्या चुनने के लिए कहा। तब मैंने एक नई (और बनाई गई) क्रिया ‘हिचकी’ का परिचय दिया। मैंने इसे एक उदाहरण की मदद से समझाया : 142 की ‘हिचकी’ 142142 है। मैंने उनसे अपनी चुनी हुई तीन अंकों की संख्या को हिचकी देने के लिए कहा और फिर उसे 13 से विभाजित करने, फिर उत्तर को 11 से विभाजित करने, और अन्त में उस उत्तर को 7 से विभाजित करने के लिए कहा। बच्चों के छोटे-छोटे सिर भाग की लम्बी मानक विधि को लागू करते हुए गम्भीर एकाग्रता में झुक गए थे। उनमें से ज़्यादातर भाग की विधि के साथ काफ़ी सहज लग रहे थे (इससे मुझे कक्षा में चारों ओर घूमने, बच्चों का काम देखने और भाग की इस प्रक्रिया से जूझने वालों की मदद करने का मौक़ा मिल गया था)। जल्द ही, एक नन्हे-से सिर ने आश्चर्य और उल्लास के भाव के साथ देखा। और कुछ अन्य बच्चे भी सामने आए। उन्होंने हमारी कक्षा के दिशानिर्देश निर्धारित करते समय तय किए गए मेरे निर्देशों को याद रखा था, कि कभी भी अपना जवाब चिल्लाकर न दें या “मैंने कर लिया है” या “मुझे मिल गया है” ऐसे नहीं चिल्लाएँ। इसके बजाय मेरी आँखों में देखते हुए थम्ब्स-अप कर दें जिससे कक्षा में बाक़ी बच्चों का ध्यान भंग किए बिना केवल मुझे पता चल जाए कि उन्होंने इसे हल कर लिया है। यह छोटे-छोटे तरीक़े अनुमान की एक कक्षा में काम करने के लिए महत्त्वपूर्ण

होते हैं, क्योंकि इनका उद्देश्य है कि पूरी कक्षा अनुमान लगा पाए। और ऐसा करने के लिए यह ज़रूरी है कि, कक्षा में हर कोई न्यूनतम सामान्य अनुशासन को बनाए रखे अन्यथा इनसे दूसरों का मनोबल कम हो सकता है। जब हम यह कर रहे थे, तो उन्होंने उत्साहित होकर फुसफुसाते हुए कहा कि उन्हें अपनी मूल संख्या वापिस मिल गई है। तब मैंने कहा, “हम्म, दिलचस्प है,... एक और कोशिश करो?” यह कार्य बहुत तेज़ी-से आगे बढ़ा और उनमें से एक बच्चे ने अनुमान लगाते हुए कहा, “यह हमेशा काम करता है।” मैंने उपयुक्त शब्दों वाले एक अनुमान पर ज़ोर दिया जिसमें स्पष्टता हो व अनावश्यक बातें न हों। कई प्रयासों के बाद और कक्षा में मौजूद दूसरे बच्चों की मदद से हमने यह अनुमान लगाया : “तीन अंकों की एक संख्या जिसे हिचकी संख्या बनाया गया है, वह मूल संख्या को वापस दे देगी जब उसे 13, 11 और 7 से क्रमिक रूप से विभाजित किया जाएगा।” मैंने इसे बोर्ड पर लिखा और इसके ऊपर लिखा, “अजय का अनुमान।” मैंने अनुमानों व प्रमाणों के बारे में और कैसे एक गणितज्ञ का उद्देश्य, पैटर्न को नोट करने और अनुमान लगाने के बाद उसे साबित या अस्वीकृत करना होता है, के बारे में बच्चों को छोटा-सा भाषण दिया। ग्यारह साल के यह बच्चे मेरे द्वारा इस्तेमाल की गई नीरस भाषा और उन्हें गणितज्ञ कहने पर थोड़ा घबराई हुई-सी हँसी हँसे और मज़ाक भी बनाया। लेकिन मैं नहीं हँसी। मैं बेहद गम्भीर थी। इसके बाद बच्चों ने आश्चर्यजनक ढंग से बहुत जल्दी ही इस भाषा को अपना लिया।

[थोड़ा हटकर देखें तो, एक बच्चे के नाम पर एक अनुमान के कथन का नामकरण करने का काम नौटंकी जैसा है, लेकिन मुझे लगता है कि ऐसा करना और पाठ और गणित के स्वामित्व को बच्चों को सौंपना, एक अद्भुत बात है। वर्ष की शुरुआत में ‘अपने’ अनुमान पर शुरुआती उत्साह के बाद बच्चों को इसकी आदत हो गई और कुछ दिलचस्प उदाहरण भी सामने आए। मसलन बच्चों द्वारा पिछले किसी पाठ में अपने सहपाठियों द्वारा दिए गए अनुमानों का उल्लेख करना, लंच करते समय फ़लाँ-फ़लाँ अनुमान के बारे में की जा रही उनकी बात को (संयोग से) मेरे द्वारा सुन लेना, एक बच्चे का मुझे उत्साहपूर्वक यह बताना कि उसने अपने ही अनुमानों को ग़लत सिद्ध कर दिया है। मुझे ऐसा लगा कि बच्चों ने अपने नाम पर अनुमान का नाम रखे जाने में कम गर्व महसूस किया, क्योंकि इस बात की नवीनता फीकी हो गई थी, लेकिन जो बचा रहा, वह था बच्चों द्वारा अपने विचारों को बनाने के लिए साहस की भावना।]

अजय के अनुमान को जल्दी ही दूसरों ने सत्यापित किया, एक या दो बच्चों ने कहा कि, “यह फ़लाँ-फ़लाँ संख्याओं के लिए काम नहीं करता है,” तो अन्य बच्चे यह जाँचने की कोशिश करने लगे कि यह वास्तव में उन संख्याओं के लिए काम करता है। अनुमान के कुछ कम महत्त्व वाले परिवर्तित रूप भी पेश किए गए। उदाहरण के लिए, “इस बात से कोई फ़र्क़ नहीं पड़ता कि आप भाग को किस क्रम में करते हैं।” कई बच्चे यह समझाने में सक्षम थे कि भाग देने का क्रम बदलने से कोई फ़र्क़ क्यों नहीं पड़ता है। कई बच्चों ने यह भी देखा कि वास्तव में भाजक संख्या 1001 थी, और कुछ बच्चे इस बात पर ग़ौर करने लगे कि यह जादुई तरीक़ा कैसे काम करता है और इसलिए अनुमान सही साबित हुआ। एक नए अनुमान के रूप में, “4-अंकीय संख्या के लिए हिचकी संख्या 10001” को प्रस्तावित किया गया था।

इस पाठ की गणितीय विषयवस्तु इस कक्षा के बच्चों की समझ के पूरी तरह अनुरूप थी, लेकिन इस पाठ के लिए मेरा उद्देश्य एक कौशल (अनुमान लगा पाने के कौशल) का परिचय देना था। यह पाठ, उनके गणितीय ज्ञान में कुछ जोड़ने के बारे में नहीं था। हालाँकि, यह लम्बे भाग का अभ्यास करने के लिए एक अच्छा प्रयोग साबित हुआ, जिसमें कुछ बच्चों ने संघर्ष किया, और स्वयं जाँच करने वाले इस कार्य ने उन्हें 'उद्देश्य के साथ अभ्यास' करने के बहुत सारे मौक़े दिए। मुझे यह काम अच्छा लगा क्योंकि भले ही अजय अपने अनुमान को बताने वाला पहला बच्चा था, लेकिन कक्षा में कमोबेश लगभग सभी बच्चे एक ही निष्कर्ष पर पहुँचे थे, या उन्हें इस बात का शक था कि यह हमेशा होगा। यह उनके आत्मसम्मान और आत्मविश्वास के लिए अच्छा था कि वे अनुमान लगा सकते थे।

साल भर मैंने एक बेहतरीन वेबसाइट nrich (www.nrich.maths.org) एवं वहाँ पर दिए गए पाठ्यचर्या मानचित्रण (Curriculum mapping) का उपयोग उन कार्यों में किया, जिनमें बच्चे उस विषय से सम्बन्धित गणित की छानबीन कर सकते थे, जिस विषय पर हम काम कर रहे थे। इसके कुछ उदाहरण निम्नलिखित हैं।

1. कुछ खोज कार्य, जो समृद्ध चर्चाओं, अनुमान लगाने और व्यजंकों में ऊपरी तौर पर दिलचस्पी लेने का कारण बनें :
   - अ. परिमाप व्यंजक (https://nrich.maths. org/7283);
   - ब. संख्या पिरामिड (https://nrich.maths. org/2281);
   - स. हमेशा एक गुणज (https://nrich.maths. org/7208).

2. कुछ खोज कार्य जो द्विघात के परिचय के बाद वर्ष के अन्त में करने के लिहाज़ से बेहतरीन थे :
   - अ. गुणन वर्ग (https://nrich.maths. org/2821);
   - ब. हमेशा सटीक (https://nrich.maths. org/2034).

3. खोज कार्य जो ज्यामिति के शिक्षण में बहुत उपयोगी साबित हुए :
   - अ. बदलते क्षेत्रफल, बदलते आयतन (https://nrich.maths.org/7535);
   - ब. वार्मस्नग डबल ग्लेज़िंग (https://nrich. maths.org/4889);
   - स. रंगा हुआ घन (https://nrich.maths. org/2322); यह शानदार है और मेरे पसन्दीदा में से एक है; यह क्षेत्रफल और आयतन पर अनुमान लगाने और विस्तृत चर्चा को प्रोत्साहित करता है।
   - द. चक्रीय चतुर्भुज (https://nrich.maths. org/6624);
   - इ. झुके हुए वर्ग (https://nrich.maths. org/2293) (इसके बारे में और बात हम बाद में करेंगे)

आख़िर के दो खोज कार्य (3 द और 3 इ) अनुमानों को प्रमाणों में बदलने के अनुभव के चलते विशेष रूप से महत्वपूर्ण थे।

पाठ 2 : एक मूक पाठ

स्कूल वर्ष के मध्य में, पर्याप्त मात्रा में इन कार्यों को करने और कई सारे अनुमान लगाने के बाद, मैंने एक मूक पाठ किया। मूक पाठ एक और तरीक़ा है जिसमें बच्चे यह अनुमान लगाते हैं कि क्या आने वाला है और फिर उसे शब्दों और बीजगणित (बोलने की अनुमति नहीं होती) के साथ स्पष्ट रूप से व्यक्त करते हैं। भले ही इस पाठ के अनुमान शब्दों वाले न हों, फिर भी इसमें बच्चों को दूसरों के सिद्धान्तों या सूत्रों का परीक्षण करने के साथ-साथ अपने स्वयं के सूत्र व सिद्धान्त बनाने के लिए प्रोत्साहित किया जाता है। मैं बताती हूँ कि इस पाठ में क्या हुआ : मैंने कक्षा में प्रवेश किया। सामान्यत: मैं कक्षा को शान्त करने के लिए उल्टी गिनती पढ़ती हूँ पर इसकी बजाय मैं चुपचाप और शान्त चेहरा लिए खड़ी हो गई। कक्षा के सामने किसी भी भावना को प्रकट किए बिना, मैं एक ख़ुशनुमा मुस्कान के साथ बच्चों को देख रही थी। “अक्का, क्या हमें हमारी किताबें मिलेंगी?” और इस तरह के अन्य सभी प्रश्नों के जवाब में अपने होंठों पर उँगली रखकर और मुस्कराकर दे रही थी। कक्षा भी शान्त हो गई थी। कुछ बातूनी बच्चों को अन्य बच्चों के द्वारा डाँट लगाई गई और मुझे बस इतना करना था कि मैं धैर्यपूर्वक प्रतीक्षा करूँ। जब हर किसी का ध्यान मुझ पर केन्द्रित हो गया, और वह आश्चर्य से यह सोचने लगे कि मैं यहाँ खड़े होकर क्या कर रही हूँ, तब मैंने अपनी उँगली फिर से अपने होंठों पर रख दी, चॉक का टुकड़ा उठाया, और नाटकीय अन्दाज़ में, धीमे-से बोर्ड की ओर बढ़ी। फिर मैंने उस पर, प्रत्येक तीर के बाद सोचने के लिए रुकते हुए जान-बूझकर और धीरे-धीरे लिखा।

मैंने कक्षा में ख़ुशी से देखा, और लिखा :

1 → 7

2 → 12

3 → ?

फिर मैंने हैरानी से देखा और इसका जवाब देने के लिए चॉक कक्षा की ओर बढ़ाई। किसी ने सवाल पूछा तो मैंने नाटकीय ढंग से अपनी उँगली को होंठों पर रख दिया। एक हाथ ऊपर उठा और मैंने उस बच्चे को अपनी चॉक दे दी। जहाँ प्रश्न चिह्न था, वहाँ बच्चे ने 17 लिखा। मैं धीरे-धीरे बोर्ड के पास गई, और 17 के बग़ल में एक हँसता हुआ चेहरा बना दिया। कक्षा इस पर हँस पड़ी और मैंने तुरन्त अपनी उँगली अपने होंठों पर रख दी। फिर मैंने लिखा :

4 → ?

एक दूसरे बच्चे ने आकर 22 लिखा। मैंने एक हँसता हुआ चेहरा बनाया और फिर 5, 6 और 7 लिखते समय अमूमन कक्षा के हर बच्चे का हाथ जवाब के लिए उठ रहा था। फिर मैंने लिखा :

37 → ?

अब तक, बच्चे यह देख रहे थे कि पैटर्न क्षैतिज रूप से कैसे बदल रहा था (प्रत्येक बार 5 जोड़कर)। मैं चाहती थी कि अब वे इस पर लम्बवत रूप से लागू होने वाले सूत्र या सामान्यीकरण के बारे में सोचें। कुछ ग़लत उत्तरों और उनके बग़ल में बने उदास चेहरों के बाद, जब मैंने अलग-अलग संख्याएँ लिख दीं तो कुछ बच्चों ने सूत्र सुझाए और उन्हें उत्तर मिलने लगे। तब मैंने बोर्ड के दाहिने कोने पर एक बॉक्स बनाया और लिखा : "अपने साथी सहपाठियों को संकेत दें।" इनमें से कुछ संकेतों के चलते अधिकांश बच्चे अब सूत्र को लेकर आश्वस्त महसूस कर रहे थे, और फिर मैंने लिखा :

n → ?

हम इसी तरह आगे बढ़ते रहे, अब सूत्र पहले से अधिक जटिल होते जा रहे थे। पाठ के अन्त में, वर्गों वाले एक ठीकठाक पेचीदा सूत्र की खोज के बाद, मैंने चॉक को उठाया और जब एक बच्ची इसे लेने के लिए आगे आई तो (मैं उसके स्थान पर बैठ गई) यह इस बात को बता रहा था कि वह एक सूत्र बना सकती थी!

कक्षा में धारण किए गए मौन का कारण (इसकी नवीनता के अलावा) बच्चों का ध्यान पैटर्न पर केन्द्रित करना है। हालाँकि कक्षा पूरी तरह चुप्पी में थी, फिर भी बच्चे अन्त में थक चुके थे, क्योंकि वे लगातार ख़ुद के और अन्य बच्चों के सूत्रों का परीक्षण कर रहे थे, हर उदास चेहरे के साथ लगातार अपने विचारों को बदल रहे थे। अनुमान लगाने के अलावा, बीजगणितीय व्यंजकों को लिखने में सहजता हासिल कर पाना इस पाठ का उद्देश्य था।

पाठ 3 : झुके हुए वर्ग

मैं तीसरे पाठ के बारे में संक्षेप में बताऊँगी। यह एक खोज कार्य है जो पाइथागोरस प्रमेय की खोज की ओर ले जाता है। इसे हमने साल के अन्त में किया। nrich वेबसाइट पर पर इसे झुके हुए वर्ग (https://nrich. maths.org/2293) कहा जाता है। यह एक बहुत ही समृद्ध खोज है, लेकिन यहाँ विस्तार से इसका वर्णन करना बहुत ज़्यादा हो जाएगा। nrich वेबसाइट में इससे परिचय कराता हुआ एक ज्ञानवर्धक वीडियो है।

इस खोज कार्य पर काम करने के दौरान, बच्चों ने विभिन्न प्रकार के झुके हुए वर्गों का वर्णन करने के लिए अपने स्वयं के प्रतीक बनाए। उदाहरण के लिए, '3 ↑ 1 →' का अर्थ "3 ऊपर और 1 आड़ा" या एक झुका हुआ वर्ग जिसे बिन्दुदार काग़ज़ पर 3 बिन्दु ऊपर और प्रत्येक कोने से

1 बिन्दु आड़ा जाकर बनाया जा सकता है; एक अन्य बच्चे ने इसी वर्ग का वर्णन करने के लिए + + + − का इस्तेमाल किया। बच्चों ने विभिन्न आकारों के क्षेत्रफलों या वर्गों के 'झुकाव' को खोजने के तरीक़ों के बारे में अनुमान लगाया (कुछ बच्चों ने झुके हुए वर्ग के चारों ओर बने सीधे वर्ग की ओर देखा और त्रिभुजों को घटाया। जबकि कुछ बच्चों ने झुके हुए वर्ग के अन्दर के वर्ग को देखा और त्रिभुजों को जोड़ दिया।) पाठ के दौरान, पूरी कक्षा की रणनीतियों को साझा करने के बाद, वे सहमत हुए कि किन्हीं भी उभरते हुए पैटर्नों को समझने का प्रभावी तरीक़ा उन्हें सारणी के रूप में लिखना होगा, और जल्द ही बोर्ड अनुमानों से भर गया। अन्तत: जब बच्चे कोष्ठक के विस्तार के अपने हालिया अर्जित कौशल का उपयोग करते हुए पाइथागोरस प्रमेय के क़रीब पहुँचे तो यह उपलब्धि का वास्तविक भाव था। कई बच्चे, अलग-अलग समय पर, विभिन्न तरीक़ों का उपयोग करते हुए स्वतंत्र रूप से प्रमेय तक आ पाए और कुछ सहपाठियों की मदद से या मुझसे कुछ मार्गदर्शन पाकर। जब मैंने उन्हें बताया कि इस अनुमान/प्रमेय का पहले से ही एक नाम है और वह गणित में सबसे प्रसिद्ध लोगों में से एक थे तो उन्होंने इसे मानने से इन्कार कर दिया। अगर कुछ था, तो वह उनका था, और हमेशा उनका रहेगा, कक्षा 7 'अ' का प्रमेय।

अनुष्का राव फिट्ज़र्हर्बट ऋषि वैली स्कूल, आन्ध्र प्रदेश में गणित की शिक्षक हैं। उन्होंने अपना शिक्षक-प्रशिक्षण, पीजीसीई, ऑक्सफोर्ड विश्वविद्यालय में किया और भारत वापस आने से पहले यूके में कॉम्प्रिहेन्स्वि स्कूलों में पढ़ाया। वह गणित की शिक्षा से सम्बन्धित सभी चीज़ों में गहरी रुचि रखती हैं। अपने पति और तीन बच्चों के साथ वह स्कूल परिसर में रहती हैं। https://taminindiablog.wordpress.com/ कक्षा ग्यारहवीं और बारहवीं को गणित पढ़ाने से सम्बन्धित उनका एक ब्लॉग है जिसमें वह समय-समय पर लिखती रहती हैं। उनसे anushkarao@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : निदेश सोनी
पुनरीक्षण एवं कॉपी-एडीटिंग : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही