5 संख्या के शिक्षण में संरचना और खेल की भूमिका

शैलेष शिराली

संख्या की अवधारणा गणित का केन्द्रीय तत्व है, पर हो सकता है कि इसकी उत्पत्ति हमारे लिए हमेशा एक रहस्य रहे क्योंकि वह सुदूर अतीत में कहीं छिपी हुई है। मनुष्यों ने चीजों को दर्ज करने के लिए गणना रेखाओं का तरीका (टैली सिस्टम) इस्तेमाल करना निश्चित ही बहुत समय पहले शुरू किया होगा – लेकिन ठीक–ठीक कब, यह शायद हमें कभी पता नहीं चलेगा। बेल्जियम कॉगो में 1960 में खोजी गई इशांगो हड्डी, जो ईसापूर्व 20000 वर्ष पुरानी है, से संकेत मिलता है कि गणितीय सोच के बीज, जितना माना जाता था, शायद उससे और पहले अंकुरित हुए होंगे। इस हड्डी पर उकेरी गई गणना रेखाओं (टैली मार्क्स) को जान–समझकर समूहों में बनाया गया है जो एक गणितीय संरचना जैसी प्रतीत होती है (उसमें दोगुनी होती हुई संख्याओं की शृंखला का संकेत भी मिलता है: 2, 4, 8)। पर जब तक और अधिक प्रमाण नहीं खोज लिए जाते तब तक यह

एक तरह की अटकलबाजी ही रहेगी। ज्यादा जानकारी के लिए आप विकीपीडिया में http://en.wikipedia.org/wiki/Ishango_bone पर दी गई जानकारी देख सकते हैं।

रेखाओं से गिनती करने का प्रचलन 50000 वर्षों जितना पुराना भी हो सकता है, और विभिन्न सन्दर्भों में, जैसे कि कक्षा के चुनाव में, हम आज भी गणना करने के लिए इसका उपयोग करते हैं।

दस के आधार वाली संख्या प्रणाली

संख्याओं के जो चिन्ह हम आज इस्तेमाल करते हैं –दस–आधारित या दशमलव प्रणाली– का स्रोत प्राचीन प्रचलनों में है। बहुत समय पहले बैबीलोन के लोग 60 के गुणकों पर आधारित प्रणाली का उपयोग करते थे। उस चलन के कुछ चिन्ह आज भी बचे हुए हैं – अभी भी हमारे एक मिनिट में 60 सेकेण्ड होते हैं और एक घण्टे में 60 मिनिट। कोणीय मापन के लिए भी एक डिग्री में 60 मिनिट होते हैं। बाद में मिस्र के लोगों ने दस की घातों पर आधारित प्रणाली विकसित की जिसमें 10 से लगाकर 10 लाख तक हर घात को उसके अपने विशेष चिन्ह से दर्शाया जाता था। पर इसमें हमारी प्रणाली से एक महत्वपूर्ण अन्तर था –इसमें शून्य के लिए कोई चिन्ह नहीं था।

शून्य के चिन्ह के बिना अंकगणित की कोई प्रणाली दो कठिनाइयों से ग्रस्त होती है। पहली यह कि इसमें ऐसी संख्याओं के बीच भ्रम पैदा होता है, जैसे कि 23, जो 2 दहाइयों तथा 3 इकाइयों को दर्शाती है, तथा 203 जो 2 सैकड़ा और 3 इकाइयों को दर्शाती है। शून्य के चिन्ह के अभाव में, कोई अन्य ऐसा तरीका खोजना होगा जो दर्शा सके कि किसी 2 का अर्थ '2 सौ' है न कि '2 दस'। यह किया तो जा सकता है, पर इसका तरीका काफी बोझिल होता है। लेकिन इससे भी बड़ी कठिनाई यह है कि फिर गणनाएँ बहुत मुश्किल हो जाती हैं और अंकगणित में आगे बढ़ना और भी कठिन हो जाता है।

यूनानी लोगों के पास शून्य के लिए कोई प्रतीक नहीं था, इसलिए आश्चर्य नहीं कि उन्होंने गणित तथा बीजगणित का वैसा विकास नहीं किया जैसा रेखागणित का, जिसे वे बड़ी ऊँचाइयों तक ले गए। शून्य का चिन्ह और उसका प्रयोग करने के नियम, तो भारत में ही अस्तित्व में आए (शायद पाँचवीं सदी ई. जितना पहले)। अतः यह संयोग नहीं है कि भारत में आर्यभट्ट, ब्रम्हगुप्त, महावीर, भास्कराचार्य द्वितीय और अनेक अन्य विद्वानों के हाथों अंकगणित और बीजगणित की बहुत प्रभावशाली ढंग से प्रगति हुई।

> *"अवधारणाएँ सिखाई नहीं जातीं, बल्कि ग्रहण की जाती हैं।" वस्तुओं के समूहों के वास्तविक सम्पर्क में आने से ही व्यक्ति के मस्तिष्क में अवधारणाएँ निर्मित होती हैं।*

वहीं दूसरी ओर, प्राचीन भारतीय रेखागणित के अपने अध्ययन में कतई उतना आगे नहीं गए। लेकिन यह गौर करने की बात है कि एक क्षेत्र जिसमें बीजगणित और विश्लेषण की विधियाँ सहज ढंग से रेखागणित में प्रवेश करती हैं, अर्थात् त्रिकोणमिति, की उत्पत्ति अवश्य ही भारत में हुई (पाँचवीं ईसवीं सदी की आर्यभट्ट की कृति में)।

अमूर्तकरण एवं संख्या की अवधारणा

हमारे मस्तिष्क में अन्तर्निहित एक असाधारण क्षमता है? अवधारणाएँ निर्मित करने की क्षमताएँ वस्तुओं या गतिविधियों के

समूहों में साझा विशेषता और गुणों को अमूर्त रूप में देख सकने की क्षमता। यही क्षमता है जो भाषा के निर्माण का आधार बनती है, और यही हमें संख्याओं का 'आविष्कार' करने के काबिल बनाती है। इसका क्या तात्पर्य है, यह समझने के लिए, किसी संख्या, मान लीजिए कि तीन, के बारे में सोचिए। क्या तीन अपने आपमें कोई वस्तु है? क्या यह कहीं स्थित हो सकती है? नहीं, नहीं हो सकती, लेकिन हमारे दिमाग में 'तीनपन' का गुण देख पाने की क्षमता हैः तीन उँगलियाँ, तीन चिड़ियाँ, तीन बिल्ली के बच्चे, तीन पिल्ले, तीन लोग – तीनपन का गुण इनकी साझा विशेषता है। यह क्षमता हमारे मस्तिष्क की संरचना में ही निहित है। यदि यह नहीं होती तो हम कभी भी संख्या की अवधारणा नहीं सीख पाते। असल में ऐसी कोई भी अन्य अवधारणा नहीं सीख पाते क्योंकि कोई भी अवधारणा अन्ततः अमूर्त होती है।

गणना रेखाओं से गिनती करने – वस्तुओं के किसी समुच्चय और गणना रेखाओं के समुच्चय में 1 का 1 से पारस्परिक सम्बन्ध स्थापित करने – जैसी सरल बात में भी हमारा मस्तिष्क अमूर्तकरण करने की नैसर्गिक क्षमता प्रदर्शित करता हैः वह जानबूझकर विभिन्न वस्तुओं की खासियतों को नजर अन्दाज करके, उन्हें निराकार इकाइयों की तरह देखता है।

अध्यापनकला की दृष्टि से इस अन्तर्दृष्टि का एक महत्वपूर्ण परिणाम इस बुद्धिमत्तापूर्ण कथन से प्रकट होता है कि, ''अवधारणाएँ सिखाई नहीं जातीं, बल्कि ग्रहण की जाती हैं''। वस्तुओं के समूहों के वास्तविक सम्पर्क में आने से ही व्यक्ति के मस्तिष्क में अवधारणाएँ निर्मित होती हैं। अभी भी इसे अच्छे से नहीं समझा जा सका है कि यह ठीक–ठीक कैसे होता है। लेकिन यहाँ मुझे बहुत पहले सुकरात द्वारा की गई एक टिप्पणी याद आती है– *शिक्षक की भूमिका बहुत कुछ एक दाई जैसी होती है जो प्रसव में सहायता करती है।*

बीजगणित का आविष्कार अमूर्तकरण की सीढ़ी में एक कदम ओर ऊपर की अवस्था को निरूपित करता है। इसका क्या अर्थ है यह समझने के लिए आइए हम इन संख्यात्मक तथ्यों की पड़ताल करेंः $1+3 = 4$, $3 + 5 = 8$, $5 + 7 = 12$, $7 + 9 = 16$, $9 + 11 = 20$। हमें यहाँ एक स्पष्ट विन्यास दिखाई देता है कि लगातार क्रम में आने वाली दो विषम संख्याओं का योग हमेशा 4 का गुणक होता है। इस वक्तव्य की ऐसे सभी सम्भावित सम्बन्धों की सूची बनाकर पुष्टि नहीं की जा सकती, क्योंकि वे बहुत अधिक हैं – वास्तव में वे अनन्त हैं। लेकिन यहाँ हम बीजगणित के तरीके इस्तेमाल कर सकते हैं। हमें केवल इस प्रेक्षण को एक बीजगणितीय वक्तव्य में अनूदित करना पड़ता है $(2n - 1) + (2n + 1) = 4n$; यह इस कथन को तत्काल सिद्ध कर देता है। ऐसी है बीजगणित की ताकत और अमूर्तकरण की भी ताकत – और यह क्षमता भी हमारे मस्तिष्क में स्वाभाविक रूप से निहित है।

संख्याओं की संरचनाएँ

मस्तिष्क की एक अन्य नैसर्गिक विशेषता है खेल की इच्छा और क्षमता। लगता है कि यह अधिकांश स्तनपाइयों में होती है, जैसा कि हमें उनके बच्चों की खेलने की हरकतों में दिखता है। कितना मजेदार होता है बिल्ली के बच्चों, पिल्लों या शिशु बन्दरों को खेलते हुए देखना। लेकिन मनुष्यों में इसके आगे एक और क्षमता होती है; अपने खेलों में नियमित संरचनाएँ निर्मित कर सकना। जब हमारा क्रीड़ा प्रेम हमारे संरचना प्रेम और संख्या की अवधारणा से जुड़ जाता है तो गणित का जन्म होता है क्योंकि गणित अन्ततः संरचनाओं का विज्ञान है।

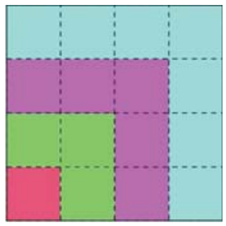
गणित में निहित क्रीड़ा–तत्व को समझना बेहद जरूरी है क्योंकि हमसे बार–बार गणित की उपयोगिता का बखान किया जाता है कि कैसे यह जीवन के इतने सारे क्षेत्रों में केन्द्रीय भूमिका निभाता है, और कैसे यह कार्यक्षेत्र में व्यक्ति की प्रगति के लिए महत्वपूर्ण है। पर इस दृष्टिकोण में खेल का तत्व उपेक्षित रह जाता है, और यह ऐसा विषय बनकर रह जाता है जिसे जानना अनिवार्य होता है। और इस तरह गणित से एक लम्बे समय तक चलने वाले भयभीत रिश्ते की बुनियाद रख दी जाती है।

अति प्राचीन समय से – बैबीलोन, यूनान, चीन और भारत में – संख्याओं की संरचनाओं और संख्याओं से जुड़ी रैखिक आकृतियों के प्रति एक कौतुकपूर्ण आकर्षण रहा है। इसी से संख्या परिवारों की उत्पत्ति हुई है – अभाज्य संख्याएँ, त्रिकोणीय संख्याएँ, वर्ग संख्याएँ इत्यादि।

जरा देखें कि इस सन्दर्भ में 'संरचना' शब्द से क्या अर्थ है। हम गिनती करने वाली संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.... को दो उपवर्गों में बाँटते हैं, विषम संख्याएँ (1, 3, 5, 7, 9, 11...), तथा सम संख्याएँ (2, 4, 6, 8, 10, 12...)। यदि हम विषम संख्याओं के लगातार बढ़ते हुए योग को लिखते जाएँ तो हम पाते हैं किः 1, $1+3=4$, $1+3+5=9$, $1+3+5+7=16$, $1+3+5+7+9=25$. वाह! यह तो हमें पूर्ण वर्ग संख्याओं की सूची प्राप्त हो गई !

लगातार क्रम में आने वाली विषम संख्याओं के योगों और वर्ग संख्याओं के बीच के सम्बन्ध को दर्शाने वाला एक बढ़िया तरीका है; यह देखने में मजेदार होने के साथ–साथ एकदम मन में उतर जानेवाला है। हमें बस अगले पेज पर बने चित्र पर गौर करना है? इस गुण का घनिष्ठ सम्बन्ध त्रिकोणीय संख्याओं से है, अर्थात् इस श्रेणी सेः 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55... जो गणना संख्याओं के

लगातार योगों से बनती हैः 1, 1+2=3, 1+2+3=6, 1+2+3+4=10, आदि। ये त्रिकोणीय संख्याएँ इसलिए कहलाती हैं क्योंकि इन संख्याओं के साथ हम त्रिकोणीय आकृतियों का सम्बन्ध जोड़ सकते हैं। लाल चौखाना केवल एक है; जब हम इससे सटाकर तीन हरे चौखाने रख देते हैं तो वे मिलकर 2 गुणित 2 का वर्ग बना देते हैं। इस प्रकार हम पाते हैं कि 1+3= 2 गुणित 2।

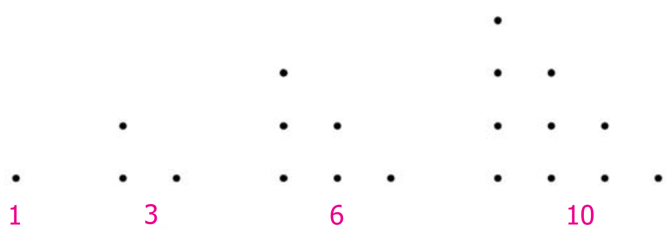


फिर उसके आगे पांच बैंगनी चौखाने जोड़ दें तो अब आपको 3 गुणित 3 का वर्ग प्राप्त होगा। इसलिए 1+3+5= 3 गुणित 3।

इसके बाद सात नीले चौखाने रख दें तो आपको 4 गुणित 4 का वर्ग मिलेगा, इसलिए 1+3+5+7= 4 गुणित 4, और इसी प्रकार आगे भी।

त्रिकोणीय संख्याओं को वर्ग संख्याओं (1, 4, 9, 16 आदि) से जोड़ने वाले दो महत्वपूर्ण गुण हैं, और बच्चे इन्हें आसानी से ढूँढ सकते हैंः (1) दो लगातार त्रिकोणीय संख्याओं का योग एक वर्ग संख्या होती है, उदाहरण के लिए , 1+3=4, 3+6=9, 6+10=16... (2) यदि किसी त्रिकोणीय संख्या में 8 का गुणा करके उसमें 1 जोड़ दिया जाए तो हमें वर्ग संख्या प्राप्त होती है, जैसे कि (8X3) + 1 = 25, (8X6) + 1 = 49, (8X10) + 1 = 81

इनमें ऐसा बढ़िया सम्बन्ध क्यों है? मनन करने के लिए यह मजेदार प्रश्न है, है न?



यहाँ एक और संरचना है। लगातार क्रम में कोई भी तीन संख्याएँ लें, जैसे कि 3, 4, 5। बीच की संख्या का वर्ग करने पर हमें 16 मिलता है। बाहरी दोनों संख्याओं का आपस में गुणा, 3 X 5 करने पर हमें 15 मिलता है। गौर करें कि 16 – 15 =1; इस तरह प्राप्त दोनों संख्याओं में 1 का अन्तर है। किसी अन्य त्रिगुट के साथ इसे आजमा कर देखें, जैसे 7, 8, 9ः 8 का वर्ग है 64, 7 गुणित 9 है 63 और 64 – 63 = 1, फिर हमें 1 का अन्तर प्राप्त होता है। क्या यह सिलसिला आगे भी जारी रहेगा? हाँ, और इसे बीजगणित का प्रयोग करके आसानी से दिखाया जा सकता है; लेकिन जरा सोचिए कि संख्याओं से खेल रहे किसी छोटे बच्चे के इस सम्बन्ध को खोज लेने पर उसे कितना आनन्द मिलेगा!

हमें इसी के समान, पर इससे अधिक जटिल एक संरचना फिबोनाची क्रम में मिलती है जो इस प्रकार है 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,...; यहाँ पहली दो संख्याओं के बाद आने वाली हर संख्या उससे पिछली दो संख्याओं का जोड़ है (जैसे कि 8 = 5 + 3)। ऊपर की गई गणना को इस क्रम के साथ दोहराएँ । त्रिगुट 2, 3, 5 के साथ हम पाते हैं कि 3 का वर्ग 9 है, और 2 से 5 का गुणनफल 10 है; इस प्रकार बीच की संख्या का वर्ग अन्य दोनों संख्याओं के गुणनफल से 1 कम है। त्रिगुट 3, 5, 8 में हम पाते हैं कि 5 का वर्ग है 25, और 3 गुणित 8 है 24, अब वर्ग संख्या 1 अधिक है। आगे 5, 8, 13 में हमें दिखता है 8 गुणित 8 है 64, और 13 गुणित 5 है 65, इस बार फिर वर्ग संख्या अन्य दो के गुणनफल से 1 कम है। और यह सिलसिला ऐसा ही चलता रहता है एक विचित्र, बारी–बारी से उलटी होती हुई संरचना।

यही बात हमें चार क्रमिक फिबोनाची संख्याओं के समूहों का अध्ययन करने पर भी दिखाई देती है, उदाहरण के लिए 1, 2, 3, 5 में बाहरी दो संख्याओं का गुणनफल है 5 और भीतरी दो का गुणनफल है 6; अर्थात् उनमें 1 का अन्तर है। ऐसा एक अन्य समूह लें 3, 5, 8, 13, बाहरी दो का गुणनफल है 39 और भीतरी दो का है 40, एक बार फिर 1 का अन्तर है। और यहाँ भी बारी–बारी से उलटी संरचना दिखती है। चकित करने वाली बात यह है कि प्रकृति को भी फिबोनाची संख्याओं का उपयोग करना उचित लगता है। यदि हम विभिन्न फूलों में पंखुड़ियों की संख्या का निरीक्षण करके दर्ज करें तो हम पाते हैं कि वह आमतौर पर फिबोनाची संख्या होती है। सूरजमुखी के फूल के बीच में परागकणों की कुण्डलीदार जमावट का अध्ययन करने पर आप पाएँगे कि ये कुण्डलियाँ घड़ी की सुई की दिशा में और उसके विपरीत दिशा में घूमती हैं, आप पाएँगे कि प्रत्येक प्रकार की कुण्डलियों की संख्या एक फिबोनाची संख्या है। प्रकृति भी संरचनाओं की उतनी ही शौकीन है जितने हम!

कई वर्ष पहले मैंने एक पाठ्यपुस्तक इस्तेमाल की थी जिसका नाम था 'संरचनाएँ और गणित की शक्ति'। पाठ्यपुस्तक के लिए यह अच्छा शीर्षक है क्योंकि यह पूरा विषय ही संरचनाओं के बारे में है, और यही इसे इसकी चमत्कारी शक्ति देता है। पर और भी महत्वपूर्ण बात यह है कि सबसे पहले यही विशेषता हमें इस विषय का अध्ययन करने को आकर्षित करती है।

बड़ी संख्याएँ , छोटी संख्याएँ

संख्याएँ होती हैं, और फिर बड़ी संख्याएँ होती हैं। बच्चों को स्वाभाविक रूप से बड़ी संख्याएँ अच्छी लगती हैं, और उनमें से कई अपने आप यह खोज लेते हैं कि कोई अन्तिम संख्या नहीं होती, कोई कितनी भी बड़ी संख्या क्यों न बताए, उससे बड़ी

संख्या पाने के लिए बस उसमें 1 जोड़ने की जरूरत होती है। इसलिए संख्याओं के संसार की कोई सीमा नहीं होती! कुछ बच्चे ऐसी ही खोज दूसरे छोर पर छोटी संख्याओं के सम्बन्ध में कर लेते हैं। मुझे याद आता है कि कई साल पहले एक छात्रा ने मुझे बताया था कि कैसे वह किसी संख्या को सिर्फ बार–बार आधी करके छोटी से छोटी होती हुई भिन्न संख्याओं की अन्तहीन शृंखला प्राप्त कर सकती थी; उसे यकीन नहीं हो रहा था कि इतनी छोटी संख्याएँ भी हो सकती थीं। उसने यह विस्मयकारी खोज अपने आप की थी, और वह इससे बहुत रोमांचित थी।

प्राचीन भारतीयों को बड़ी संख्याओं से प्रेम था, और यहाँ इस प्रेम को दर्शाने वाली एक समस्या प्रस्तुत है। यदि मैं आपसे ऐसी वर्ग संख्या ढूँढने को कहूँ जो किसी दूसरी वर्ग संख्या की दोगुनी हो, तो आप कभी सफल नहीं होंगे क्योंकि ऐसी संख्याओं के कोई भी जोड़े नहीं होते। (क्यों?– इसके पीछे एक बढ़िया कहानी है, पर हम अभी इसमें नहीं जा सकते।) इसलिए हम सवाल को थोड़ा बदल देते हैं: अब मैं ऐसी वर्ग संख्या पूछता हूँ जो किसी दूसरी वर्ग संख्या के दोगुने से 1 अधिक हो। अब हमें कई उत्तर मिलते हैं, जैसे कि 9 तथा 4 वर्ग संख्याएँ हैं, और 9 (2 X 4) = 1. नीचे कुछ और हल हैं:

$$289 - (2 \times 144) = 1,$$
$$9801 - (2 \times 4900) = 1,$$

यदि हम सवाल में 'दोगुने' शब्द की जगह '5 गुने' कर दें तो हमें उसके भी हल मिलते हैं:

$$81 - (5 \times 16) = 1,$$
$$(161 \times 161) - (5 \times 72 \times 72) = 1,$$

तथा इसी प्रकार और भी।
सातवीं सदी में ब्रम्हगुप्त ने सोचा कि '5 गुने' के स्थान पर '61 गुने' रखने पर क्या इस समस्या का कोई हल मिल सकता था। इस मामले में सबसे छोटा उत्तर भी वास्तव में बहुत विशाल है – फिर भी ब्रम्हगुप्त ने उसे खोज निकाला:

$$(1766319049 \times 1766319049) - (61 \times 226153980 \times 226153980) = 1.$$

आप चाहें तो इसकी पुष्टि कर सकते हैं।

मुझे लगता है कि इस गणना का काल महत्वपूर्ण है – भारतीय 13 सदियों पहले ऐसे सवाल पूछ रहे थे। खेल के प्रति प्रेम सभी मानवीय सभ्यताओं में दीर्घ काल से रहा है। मनुष्य खेले बिना नहीं रह सकता।

लेकिन अब एक विचित्र बात होती है। जो खेल की तरह शुरू हुआ उसमें जैसे पंख लग जाते हैं और वह परिपक्व विषय बनकर उड़ान भरने लगता है। उसकी आन्तरिक गठन व संरचना इतनी सशक्त होती है कि वह पदार्थों, प्राणमय देहों और पूँजी के संसार में 'असली संसार' में हर जगह उपयोगी साबित होता है। ऐसी उड़ानें इतिहास में दो दर्जन या उससे अधिक बार घटित हुई हैं और कोई सचमुच में नहीं जानता कि वे क्यों और कैसे घटती हैं, लेकिन वे होती हैं। शायद यह हमारे लिए परमात्मा का उपहार है। (लेकिन हम हमेशा उसका वांछित उपयोग नहीं करते। गणितीय विधियों की ताकत का उपयोग आणविक बमों, पनडुब्बियों और जनसंहार के दूसरे उपकरणों की डिजाइन में भी होता है।)

अन्तिम टिप्पणी

ऐसे अनेक विषय–प्रसंग हैं जिनमें गणित में निहित खेल और संरचना की खूबियाँ उभरकर सामने आती हैं:

- जादुई वर्ग (नौ संख्याओं के दिए गए समूह को 3X3 की कतारों में, या 16 संख्याओं को 4 X 4 की कतारों में इस तरह जमाना कि पंक्ति योग, स्तम्भ योग, विकर्ण योग सभी बराबर हों); इनसे न केवल संख्याओं के मजेदार सम्बन्ध उजागर होते हैं, बल्कि इनके अध्ययन में हम समरूपता के बारे में भी सीखते हैं।
- कूटगणित (क्रिप्टारिथिम्स) अंकगणित की ऐसी पहेलियाँ हल करना जिनमें अंकों के स्थान पर अक्षर रख दिए जाते हैं: उदाहरण के लिए ON + ON + ON + ON = GO; ऐसी समस्याओं के अध्ययन से कई सरल मगर आनन्ददायी गणितीय अन्तर्दृष्टियों का पता चलता है।
- अंकों की संरचनाएँ (2 की बढ़ती हुई घातसंख्याओं के इकाई अंकों की सूची बनाएँ; आपको क्या विशेष दिखाई देता है? अब यही 3 की घात संख्याओं के साथ करें; आपको क्या दिखाई देता है?)

ये उदाहरण संख्याओं के इर्द–गिर्द बुने गए हैं, लेकिन यह सिद्धान्त स्पष्ट रूप से रेखागणित में भी लागू होता है। यहाँ हम ऐसी आकृतियों का अध्ययन करते हैं जैसे रंगोली और कोलम, कागज मोड़ने से बनी या गोलों से बनी आकृतियाँ इत्यादि।

ऐसी गतिविधियों के साथ–साथ, अध्यापक गणित की समाज में भूमिका से सम्बन्धित प्रश्न भी उठा सकते हैं जिन पर विद्यार्थियों और साथी शिक्षकों के साथ चर्चा की जा सकती है। उदाहरण के लिए, विनाश के लिए गणित के इस्तेमाल से सम्बन्धित प्रश्न, या अधिक व्यापक सन्दर्भ में, 'गणित का इस्तेमाल करना कब उपयुक्त है?' या यह सवाल कि समाज क्यों गणितीय गतिविधि को सहारा देना चाहेगा? आखिरकार, अधिकांश कलाकारों को उनके कलाकर्म के लिए संरक्षक या खरीदार मिल जाते हैं, लेकिन

गणितज्ञ जीविका के लिए खुद को नहीं बेचते। क्या ऐसा है कि नीति–निर्माता गणित को एक उपयोगी औजार के रूप में देखते हैं, और इसलिए इस क्षेत्र में लोगों को अध्यापन या उपयोगी गणित करके अपना जीविकोपार्जन कर पाने में सहायक होते हैं? पर उपयोगिता का प्रश्न हमें वापस उपयोग के औचित्य के सवाल पर ले जाता है। आमतौर पर ऐसे सवालों को गणित की कक्षा के उपयुक्त नहीं माना जाता, लेकिन चर्चा करने और पूछने की संस्कृति को बढ़ावा देने में निश्चित ही उनकी जगह है।

हमें यहाँ पूरी सूची बनाने की जरूरत नहीं है– यह सम्भव नहीं है क्योंकि यह बड़ी लम्बी सूची है और बढ़ती ही जाती है। इसके बजाय यहाँ हम सिर्फ इस बात पर जोर देना चाहते हैं, कि अध्यापनकला और मनोविज्ञान, दोनों दृष्टियों से संरचना और खेल गणित के शिक्षण के लिए महत्वपूर्ण हैं।

जब हम गणित को एक ऐसा भारी और गम्भीर विषय बना देते हैं जो केवल अतिप्रतिभाशाली लोगों के लिए ही है, और जिसे जबरदस्त स्पर्धा के माहौल में ही सीखा जाता है, तो हम एक बड़ा अवसर खो देते हैं। यह अनेक लोगों को गणित के अनुभव से वंचित कर देता है।

पढ़ने योग्यः लेखक का सुझाव

1. http://en.wikipedia.org/wiki/Ishango_bone
2. "Number, The Language Of Science" Tobias Dantzig
3. "The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics" Stanislas Dehaene
4. http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_Mathematics

शैलेष शिराली *ऋषि वैली स्कूल के सामुदायिक गणित केन्द्र के प्रमुख हैं। वे 13–19 वर्ष के छात्रों के लिए लिखी गई गणित की कई पुस्तकों के लेखक हैं। वे स्नातक स्तर की विज्ञान पत्रिका 'रैज़ोनैन्स' के सम्पादकों में से एक हैं, और देश में गणितीय ओलिम्पियाड से भी जुड़े हैं। उनसे* shailesh_shirali@rediffmail.com *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*