



गणित ज्ञान और अध्ययन के सबसे पुराने क्षेत्रों में से एक है। लम्बे समय से इसे मनुष्य के चिन्तन का एक केन्द्रीय अंग माना जाता रहा है। कुछ लोग इसे विज्ञान मानते हैं, कुछ कला मानते हैं और कुछ ने तो इसे भाषा के जैसा माना है। हालाँकि इसमें तीनों के अंश समाहित प्रतीत होते हैं, फिर भी यह अपने आप में एक अलग वर्ग है।

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (एनसीएफ) 2005 के अनुसार स्कूलों में गणित की शिक्षा का मुख्य लक्ष्य बच्चों की सोच का 'गणितीकरण' करना है। विचार की स्पष्टता और आधार मान्यताओं को उनकी तार्किक परिणति तक ले जाना, ये गणित के अभिक्रम के केन्द्रीय तत्व हैं। विचार करने के कई तरीके होते हैं। लेकिन गणित में व्यक्ति जिस तरह विचार करना सीखता है, वह उसे अमूर्त राशियों और अवधारणाओं के साथ काम करने की योग्यता और समस्याओं के हल का मार्ग प्रदान करता है।

एनसीएफ की कल्पना है कि स्कूल में गणित शिक्षा का वातावरण ऐसा हो जिसमें:

1. गणित से भय खाने की बजाय बच्चों को गणित सीखने में आनन्द आए।
2. बच्चे 'महत्वपूर्ण' गणित सीखें जो केवल सूत्रों या यांत्रिक विधियों से कहीं अधिक होता है।
3. बच्चे गणित को ऐसी गतिविधि की तरह देखें जिसके बारे में वे बात कर सकें, जिसकी समझ को सम्प्रेषित कर सकें, आपस में चर्चा कर सकें और जिस पर वे मिलजुल कर काम कर सकें।
4. बच्चे अर्थपूर्ण प्रश्न उठाएँ और उनको हल करें।
5. बच्चे सम्बन्धों को समझने, संरचनाओं को देखने, गुणधियों को तर्क से सुलझाने तथा वक्तव्यों के सत्य अथवा असत्य होने का तर्क-वितर्क करने के लिए अमूर्त अवधारणाओं का उपयोग करें।
6. बच्चे गणित के बुनियादी ढाँचे को समझें, अर्थात् : अंकगणित, बीजगणित, रेखागणित तथा त्रिकोणमिति, एवं स्कूल की गणित की बुनियादी विषयवस्तु। ये सभी अमूर्तकरण करने, नियमित संरचनाएँ बनाने तथा व्यापकीकरण करने की कार्यप्रणाली प्रदान करते हैं।
7. शिक्षकों से ऐसी अपेक्षा हो कि वे प्रत्येक बच्चे को इस विश्वास के साथ कक्षा में सक्रिय रूप से भागीदार बनाएँ कि हर व्यक्ति गणित सीख सकता है।

वहीं दूसरी ओर, एनसीएफ हमारे स्कूलों के सामने गणित की

शिक्षा से सम्बन्धित चुनौतियों का भी इस प्रकार उल्लेख करता है:

1. अधिकांश बच्चों में गणित को लेकर भय और असफलता का भाव व्याप्त होना।
2. ऐसी पाठ्यचर्या जो थोड़े से प्रतिभावान विद्यार्थियों और कक्षा में भाग न लेने वाले निष्क्रिय बहुसंख्यक विद्यार्थियों, एक साथ दोनों को ही निराश करती है।
3. मूल्यांकन के फूहड़ तरीके जो इस धारणा को बढ़ावा देते हैं कि गणित एक यांत्रिक अभिकलन प्रक्रिया है – प्रश्न, प्रश्नावलियाँ, मूल्यांकन के तरीके, यांत्रिक और पुनरावर्ती होते हैं जिनमें अभिकलन पर जरूरत से ज्यादा जोर दिया जाता है।
4. गणित के अध्यापन के लिए शिक्षकों की तैयारी और उनके लिए आवश्यक सहयोग का अभाव होना।
5. सामाजिक भेदभाव के ढाँचे जो गणित की शिक्षा में भी प्रतिबिम्बित होते हैं और जिनके परिणामस्वरूप ऐसी रुढ़िबद्ध धारणाएँ बनती हैं, जैसे कि 'गणित में लड़कियों की अपेक्षा लड़के बेहतर होते हैं।' कठिनाई यह है कि गणनाएँ क्रमशः काफी दुरुह होती जाती हैं और गणित में प्रगति करना उतना ही ज्यादा कठिन होता जाता है।

“

“गणित में सुव्यवस्थित तर्कप्रक्रिया के महत्व पर जितना भी जोर दिया जाए वह कम होगा, और यह सौन्दर्य और शोभा की धारणाओं, जो गणितज्ञों को अतिशय प्रिय हैं, से भी अन्तरंग रूप से जुड़ा है।”

”

इसलिए एनसीएफ अनुशंसा करता है कि:

1. गणित शिक्षा का जोर गणितीय विषयवस्तु के 'संकीर्ण' लक्ष्यों को हासिल करने से हटाकर गणित सीखने के ऐसे वातावरण का निर्माण करने पर केन्द्रित किया जाए जहाँ औपचारिक प्रश्नों को हल करने, स्वयं के अनुभवों का उपयोग करने, नियमित संरचनाओं का उपयोग करने, अनुमान लगाने और सन्निकटन करने, सबसे उपयुक्त मूल्य पर पहुँचने, निरूपण करने, तर्क करने और सिद्ध करने,

सम्बन्ध बनाने और गणितीय सम्प्रेषण करने की प्रक्रियाओं को वरीयता दी जाती है।

- हर विद्यार्थी में सफलता हासिल करने का भाव जगाकर उसे कक्षा में सक्रिय रूप से भागीदार बनाना और साथ ही साथ, उभरते हुए गणितज्ञ के सामने अवधारणात्मक चुनौतियाँ पेश करना।
- मूल्यांकन के तरीके बदलना ताकि विद्यार्थी के विधियों के ज्ञान की बजाय उसकी गणितीय योग्यताओं की परीक्षा हो।
- विविध प्रकार के गणितीय संसाधनों से शिक्षकों को समृद्ध बनाना।

एन.सी.एफ. की दृष्टि के प्रमुख केन्द्र बिन्दुओं में से एक बच्चों के मन से गणित का भय दूर करना है। वह स्कूली गणित को सिखाई गई एक विधि का इस्तेमाल करके एक मात्र सही उत्तर निकालने के त्रासदायी शिकंजे से मुक्त करने की बात करता है। उसका जोर पढाई के ऐसे माहौल बनाने पर है जो बच्चों की रुचि और सफलता का स्वाद जगाकर उन्हें सक्रिय रूप से भागीदार बनने का आमंत्रण देते हैं।

सीखने की पद्धतियाँ

एनसीएफ कहता है कि सवालों को हल करने की अनेक सामान्य तरकीबें स्कूल के भिन्न-भिन्न चरणों के दौरान धीरे-धीरे आगे बढ़ते हुए सिखाई जा सकती हैं। जैसे कि: अमूर्तकरण, परिमाणीकरण, सादृश्यता, समस्या-विश्लेषण, जटिल को सरल परिस्थितियों में रूपान्तरित करना, यहाँ तक कि अनुमान लगाने और उनकी पुष्टि करने के अभ्यास – ये सभी समस्या-समाधान के अनेक प्रसंगों में उपयोगी होते हैं। इसके अलावा जब बच्चे धीरे-धीरे समाधान खोजने के विविध मार्गों से परिचित होते हैं तो उनके औजारों की पेटी और समृद्ध हो जाती है। वे यह भी सीखते हैं कि कब कौन-सा मार्ग सबसे अच्छा होता है। बच्चों को रुढ़ि की तरह गणित को 'एकदम सही विज्ञान' मानने के बजाय स्वानुभव से सीखे गए तरीकों या मोटे नियमों के उपयोग से भी परिचित होने की जरूरत होती है। परिमाणों का अनुमान लगाना और नजदीकी मोटे उत्तर पर पहुँचना भी एक बेहद जरूरी हुनर है।

किसी बात को मन में देख पाना और निरूपित कर पाना ऐसा कौशल है जिसे विकसित करने में गणित सहायक हो सकता है। परिमाणों, आकारों और आकृतियों का इस्तेमाल करके परिस्थितियों के प्रतिरूप गढ़ना गणित का सर्वश्रेष्ठ उपयोग है। गणित की अवधारणाएँ कई तरीकों से निरूपित की जा सकती हैं और ऐसे निरूपण अलग-अलग प्रसंगों में अनेक प्रकार के प्रयोजनों में काम आ सकते हैं।

उदाहरण के लिए, किसी फलन को बीजगणितीय रूप में या रेखाचित्र के रूप में निरूपित किया जा सकता है। 'p/q' का निरूपण किसी पूरी चीज का अंश दर्शाने के लिए उपयोग किया जा सकता है, लेकिन यह दो संख्याओं 'p' तथा 'q' का भागफल भी दर्शा सकता है। भिन्नों के बारे में यह सीखना उतना ही महत्वपूर्ण है जितना भिन्नों का अंकगणित सीखना। गणित तथा अध्ययन के अन्य विषयों के बीच सम्बन्ध बनाने की भी जरूरत है। जब बच्चे रेखाचित्र बनाना सीखते हैं तब उन्हें विज्ञान की विभिन्न शाखाओं में, जिसमें भूगर्भ विज्ञान भी शामिल है, क्रियात्मक सम्बन्धों के बारे में सोचने के लिए भी प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। बच्चों को इस तथ्य का अहसास कराना जरूरी है कि विज्ञान के अध्ययन में गणित एक प्रभावशाली उपकरण है।

गणित में सुव्यवस्थित तर्कप्रक्रिया के महत्व पर जितना भी जोर दिया जाए वह कम होगा। गणित सौन्दर्य और शोभा की धारणाओं, जो गणितज्ञों को अतिशय प्रिय हैं, से भी अंतरंग रूप से जुड़ा है। किसी बात को सिद्ध करना महत्वपूर्ण है, परन्तु निगमनात्मक उपपत्ति (प्रूफ़) के साथ-साथ विद्यार्थियों को चित्रों और रचनाओं से मिलने वाले प्रमाणों को भी सीखना चाहिए। प्रामाणिक पुष्टि ऐसी प्रक्रिया है जो शकित विरोधी को आश्वस्त कर देती है। स्कूली गणित में उपपत्ति को तर्क करने के व्यवस्थित तरीके की तरह सीखने को प्रोत्साहन दिया जाना चाहिए।

एनसीएफ गणितीय सम्प्रेषण की भी बात करता है – कि यह एकदम सही होता है और भाषा का सुस्पष्ट ढंग से उपयोग करता है और इसके निरूपण में दृढ़ता होती है। ये सभी गणितीय कार्यपद्धति की महत्वपूर्ण विशेषताएँ हैं। गणित में विशेष शब्दावली का उपयोग जान-समझकर अपनी खास शैली में किया जाता है। गणितज्ञ उपयुक्त संकेत चिन्हों पर बहस करते हैं क्योंकि अच्छे संकेत चिन्हों की गणित में बड़ी प्रतिष्ठा है और माना जाता है कि ये विचार प्रक्रिया में सहायक होते हैं। जैसे-जैसे बच्चे बड़े होते हैं उन्हें ऐसी परम्पराओं के महत्व और उपयोग की कद्र करना सिखाया जाना चाहिए। इसका अर्थ यह होगा कि समीकरणों को गठित करना सिखाने पर भी उतना ही ध्यान और समय दिया जाना चाहिए जितना उन्हें हल करने पर दिया जाता है।

पाठ्यचर्या का गठन

स्कूली शिक्षा के विभिन्न चरणों के लिए एनसीएफ की निम्न अनुशंसाएँ हैं:

- 'पूर्व-प्राथमिक': पूर्व-प्राथमिक स्तर पर सीखना खेल के माध्यम से होता है, न कि शिक्षणात्मक सम्बोधनों से।

संख्याओं की श्रृंखलाओं को रटकर सीखने की बजाय बच्चों को छोटे-छोटे समुच्चयों के सन्दर्भ में शब्द-खेलों और गिनती तथा गिनती और मात्रा के परस्पर सम्बन्धों को समझने और सीखने की जरूरत होती है। एक-एक आयाम में बारी-बारी से सरल तुलनाएँ और वर्गीकरण करना, आकारों और समरूपताओं को पहचानना, ये सब इस स्तर पर हासिल किए जाने वाले उपयुक्त कौशल हैं। यह भी अत्यन्त महत्वपूर्ण है कि दूसरों के द्वारा पहले से तय किए गए अभिव्यक्ति के तरीकों के बजाय बच्चों को भाषा का उपयोग करके मुक्त भाव से अपने विचार और भावनाएँ व्यक्त करने के लिए प्रोत्साहित किया जाए।

2. 'प्राथमिक': प्राथमिक स्तर पर बच्चों के मन में गणित के प्रति सकारात्मक रुझान और लगाव पैदा करवाना उतना ही महत्वपूर्ण है जितना कि संज्ञानात्मक कौशलों और अवधारणाओं का विकास है। गणितीय खेल, पहलियाँ और कहानियाँ, गणित के प्रति सकारात्मक रुझान विकसित करने में और गणित तथा रोजमर्रा की सोच के बीच सम्बन्ध बनाने में मदद करते हैं। इस दौर में, संख्याओं तथा उनकी पारस्परिक क्रियाओं के अलावा आकारों, स्थानिक समझ, नियमित संरचनाओं, मापन और आँकड़ों के उपयोग को भी समुचित महत्व दिया जाना चाहिए। अवधारणाएँ ग्रहण करने में विद्यार्थी जिस तरह मूर्त से अमूर्त की ओर क्रमशः प्रगति करते हैं, उसका पाठ्यचर्या में स्पष्ट रूप से समावेश किया जाना चाहिए। अभिकलन कौशलों के अलावा संरचनाओं को पहचानने, व्यक्त करने और उनकी व्याख्या करने पर, सवाल हल करने में अनुमान लगाने और सन्निकटन पर, अन्तर्सम्बन्ध बनाने पर, तथा संवाद और तर्क करने में भाषा कौशलों के विकास पर भी जोर दिया जाना जरूरी है।
3. 'उच्च-प्राथमिक': यहाँ विद्यार्थियों को उन शक्तिशाली अमूर्त अवधारणाओं को उपयोग करने का पहला स्वाद मिलता है जो पहले सीखे गए ज्ञान और अनुभव का निचोड़ होती हैं। यह उन्हें प्राथमिक स्तर पर सीखी गई बुनियादी अवधारणाओं और कौशलों को माँजने तथा सुदृढ़ करने में सक्षम बनाता है, जो सार्वभौमिक गणितीय साक्षरता हासिल करने की दृष्टि से अत्यावश्यक है। यहाँ विद्यार्थियों का बीजगणितीय संकेतलिपि से, और सवाल हल करने में तथा व्यापकीकरण करने में उसके उपयोग से, परिचय होता है, साथ ही स्थान-विस्तार (स्पेस) और आकारों का व्यवस्थित अध्ययन करने और अपने मापन ज्ञान को मजबूत बनाने का भी मौका मिलता है। आँकड़ों को समझलाना, उनका निरूपण और व्याख्या करना, सभी प्रकार की जानकारी से काम लेने की

क्षमता का महत्वपूर्ण अंग होते हैं। यह क्षमता एक नितान्त आवश्यक 'जीवनकौशल' है। इस स्तर की पढ़ाई विद्यार्थियों की स्थानिक बुद्धि और मानसिक संदर्शन कौशलों को समृद्ध बनाने का भी अवसर देती है।

4. 'माध्यमिक': अब विद्यार्थियों को एक अध्ययन क्षेत्र की तरह गणित का ढाँचा दिखाई देने लगता है। वे गणितीय संवाद की विशेषताओं से परिचित हो जाते हैं: सावधानीपूर्वक परिभाषित की गई शब्दावली और अवधारणाएँ, उन्हें निरूपित करने के लिए संकेत चिन्हों का उपयोग, सुस्पष्ट रूप से व्यक्त प्रस्थापनाएँ और उनकी पुष्टि करने वाली उपपत्तियाँ। ये पहलू रेखागणित के क्षेत्र में विशेष रूप से विकसित किए जाते हैं। विद्यार्थी बीजगणित में भी सहज प्रवीणता हासिल करते हैं, और यह क्षमता केवल गणित के व्यापक उपयोगों की दृष्टि से ही नहीं, बल्कि स्वयं गणित के भीतर प्रतिपादनों को न्यायसंगत ठहराने और सिद्ध करने की दृष्टि से भी महत्वपूर्ण है। विद्यार्थी पहले जो अनेक अवधारणाएँ और कौशल सीख चुके होते हैं, इस स्तर पर आकर वे उन्हें समेकित और समाहित करके समस्याओं को हल करने की दक्षता हासिल करते हैं। इस स्तर पर पढ़ाए जाने वाले गणितीय प्रतिरूपण, आँकड़ों का विश्लेषण और उनकी व्याख्या उच्च स्तर की गणितीय साक्षरता को मजबूत बना सकते हैं। व्यक्तिगत और सामूहिक रूप से अन्तर्सम्बन्धों और संरचनाओं का अन्वेषण करना, मानसिक संदर्शन और व्यापकीकरण, तथा अटकलें लगाना और उनको सिद्ध करना भी इस स्तर पर महत्वपूर्ण होते हैं। इन प्रक्रियाओं को उपयुक्त औजारों के इस्तेमाल के द्वारा, जिसमें गणित की प्रयोगशालाओं में मिलने वाले स्थूल प्रतिरूप और कम्प्यूटर शामिल हैं, प्रोत्साहित किया जा सकता है।
5. 'उच्चतर-माध्यमिक': इस स्तर पर गणित के पाठ्यक्रम का उद्देश्य विद्यार्थियों को गणित के अनेक प्रकार के उपयोगों की समझ और ऐसे उपयोगों को सम्भव बनाने वाले बुनियादी औजार प्रदान करना है। इस स्तर पर ही गणित की गहराई और विस्तार की अक्सर विरोधाभासी माँगों के बीच सावधानीपूर्वक चुनाव करने की भी जरूरत होती है।

मूल्यांकन के बारे में एन.सी.एफ. की अनुशंसा है कि बोर्ड परीक्षाओं का पुनर्गठन किया जाना चाहिए ताकि किसी राजकीय प्रमाणपत्र के लिए न्यूनतम पात्रता केवल संख्या ज्ञान को माना जाए जिससे कि गणित में असफल होना कम हो जाए। उच्च स्तर पर अधिक चुनौतीपूर्ण परीक्षाओं, जिनमें अवधारणात्मक ज्ञान और योग्यता को परखा जाए, की अनुशंसा की गई है।

एन.सी.एफ. की गणित की उत्कृष्ट शिक्षा की कल्पना इन जुड़वाँ मान्यताओं पर आधारित है कि सभी विद्यार्थी गणित सीख सकते हैं तथा सभी विद्यार्थियों को गणित सीखने की जरूरत है। अतएव

यह आवश्यक हो जाता है कि सभी बच्चों को उच्च गुणवत्ता की गणित शिक्षा प्रदान की जाए।

इन्दु प्रसाद अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन, बंगलौर में एकेडमिक्स एवं पैडागॉजी समूह की प्रमुख हैं। इसके पहले उन्होंने तमिलनाडु और कर्नाटक के विशेष/सर्वसुलभ स्कूलों में 15 वर्ष से भी अधिक समय तक अध्यापिका की तरह विभिन्न प्रकार की तंत्रिका चुनौतियों से जूझ रहे बच्चों के साथ काम किया है। उनसे indu@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

सवाल पूछना

1. यदि आप जानते हैं कि $235 + 367 = 602$, तो $234 + 369$ कितना होगा? आपने उत्तर कैसे निकाला?
2. संख्या 5384 में कोई एक अंक बदल दीजिए। क्या संख्या बढ़ी या घटी? कितनी?

स्रोत: एन.सी.एफ. 2005

