



गणित के शिक्षण के साथ जुड़े मुख्य मुद्दों में से एक यह रहा है कि विद्यार्थियों का ज्ञान अधिकतर गणितीय प्रक्रियाओं तक ही सीमित रह जाता है। उदाहरण के लिए वे जोड़ने या गुणा करने की प्रक्रियाएँ तो जानते हैं लेकिन यह नहीं जानते कि किसी सवाल को हल करने के लिए उन्हें जोड़ने की जरूरत है या गुणा करने की। इसलिए हमारे सामने चुनौती यह है कि विद्यार्थियों के ज्ञान को केवल प्रक्रियात्मक (प्रोसीजरल) तक सीमित न रहने देकर उसे प्रक्रियावधारणात्मक (प्रोसेच्युअल) समझ में बदलें। यहाँ प्रोसेच्युअल शब्द (प्रोसीजरल) तथा 'कंसेच्युअल' को जोड़कर बनाया गया है – इसमें 'कंसेच्युअल' (अवधारणात्मक) का आशय है अवधारणाओं और उनके उपयोग दोनों की समझ होना – अर्थात् विद्यार्थी प्रक्रियाओं के साथ-साथ सन्दर्भ से जुड़ी अवधारणाओं और उनके सही उपयोग को भी जाने। प्रोसेच्युअल छात्र पाँच विशिष्टताओं को प्रदर्शित करते हैं – आइए, हम उनमें से प्रत्येक पर नज़र डालें।

**पहला, प्रोसेच्युअल छात्र विधि जानते हैं और अवधारणा को भी समझते हैं।** आइए हम गुणन की परिचित प्रक्रिया का इस्तेमाल करते हुए उदाहरण सहित समझते हैं:

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ 50x \\ \hline 625 \end{array}$$

भारत में अलग-अलग राज्यों में छात्रों को इकाई के स्थान पर या तो क्रॉस (X) डालने के लिए, या उसे खाली छोड़ने के लिए या, एक शून्य रखने के लिए कहा जाता है। अधिकांश छात्र इस प्रक्रिया का मशीनी तौर पर अनुसरण करते हैं, बिना यह जाने कि ऐसा 'क्यों' किया जाता है। अवधारणा को समझने से हमारा मतलब यही जानना है।

**दूसरा, प्रोसेच्युअल छात्र सवाल को हल करने के लिए सबसे कुशल रणनीति का उपयोग करते हैं।** निम्नलिखित योग में:

$$\begin{array}{r} 299 \\ + 21 \\ \hline 320 \end{array}$$

यदि छात्र यह समझ ले कि वास्तव में प्रश्न को ऐसे देखा जा सकता है कि :  $299 + 1 = 300$  और फिर उसमें 20 जोड़ दिया जाए तो हो जाएगा 320, तो वह जान लेगा कि योग की प्रक्रिया से गुजरने की बजाय यह कहीं अधिक सफल रणनीति है।

**तीसरा, छात्र यह परख पाता है कि उसका उत्तर तर्कसंगत है या नहीं।** निम्नलिखित विभाजन में:

212 विभाजित 2

यदि छात्र का उत्तर 106 के बजाय 16 निकलता है, तो उसे यह देख सकना चाहिए कि 16 तर्कसंगत उत्तर नहीं है, और यह कि सही उत्तर 100 से कुछ अधिक होना चाहिए।

**चौथा, प्रोसेच्युअल छात्रों के पास ज्ञात तथ्यों की एक श्रेणी होती है।** जैसे कि पिछले उदाहरण में छात्र यह जानता है कि  $9 + 1 = 10$  होता है और  $300 + 20 = 320$ , उसके लिए ये ज्ञात तथ्य हैं। प्रोसेच्युअल छात्रों के पास इस प्रकार के ज्ञात तथ्य अधिक होते हैं। यह भी एक कारण है कि क्यों गुणा करने वाले पहाड़ों को (अवधारणात्मक समझ के साथ) जानना एक काम आनेवाली अच्छी बात है।

“

यह एक अच्छा विचार है कि हमेशा किसी एक अवधारणा को स्पष्ट करने के लिए एक से ज्यादा विधियों का उपयोग किया जाए ताकि शिक्षक सुनिश्चित कर सकें कि शिक्षार्थी अमुक अवधारणा को समझ गए हैं और इसके उपयोग के समय सहजता का अनुभव करते हैं।

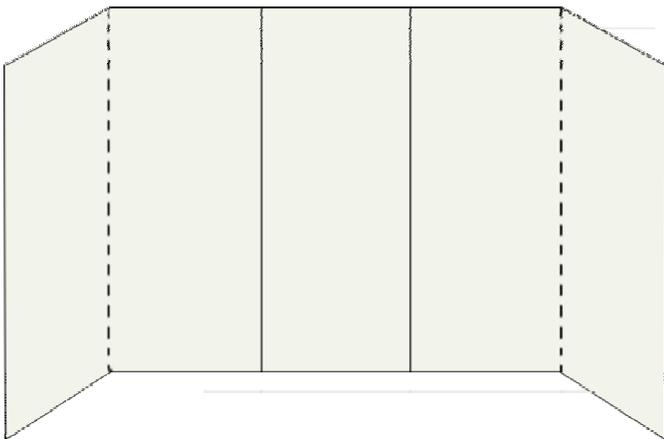
”

अन्त में, प्रोसेच्युअल छात्र ज्ञात तथ्यों का प्रयोग करते हुए अन्य तथ्यों को प्राप्त करते हैं। उसी उदाहरण में  $299 + 21$  होता है 320, जो ज्ञात तथ्यों से निकला है। अब यह एक नया ज्ञात तथ्य बन जाता है।

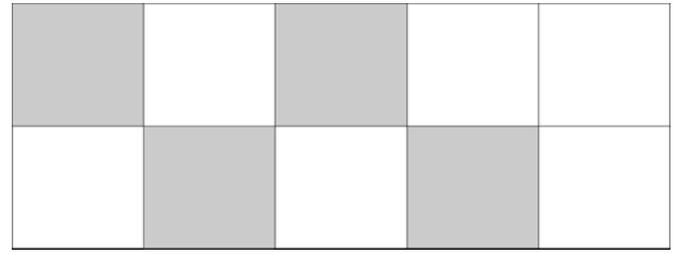
प्रोसेच्युअल छात्रों की कई खूबियों को समझने के बाद चुनौती यह है कि – हम किस तरह से पढ़ाएँ ताकि गणित का हर छात्र प्रोसेच्युअल हो जाए। यहाँ इसके लिए पढ़ाने की 5 ऐसी रणनीतियाँ प्रस्तुत हैं जिन्हें हमने शिक्षकों के साथ काम करने के अपने अनुभव में कारगर पाया है।

**पहली, ठोस अनुभव के आधार पर शिक्षा दें।** गणित अपनी प्रति में ही अमूर्त है – उदाहरण के लिए जैसे ही हम पाँच आमों को निरूपित करने के लिए अंक 5 लिखते हैं तो सीखने वाला अमूर्तकरण का एक चरण तय कर लेता है। इसलिए अमूर्तकरण में छलांग लगाने से पहले सीखने वाले को पहले कदम के रूप में स्थूल चीजों के साथ सहज हो जाना चाहिए। प्रत्येक सीखने वाला अपना अलग-अलग समय लेता है और हमें इस समय का ख्याल रखना चाहिए।

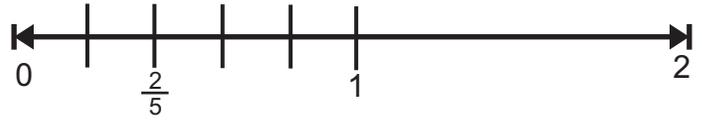
**दूसरी, सीखने वाले को अवधारणाओं को निकालना या निरूपित करना सीखना चाहिए।** आइए हम इस रणनीति को उदाहरण द्वारा समझें। भिन्न संख्या का विचार उन सबसे प्रारम्भिक कठिन अवधारणाओं में से एक है जिनसे गणित सीखने वाला गुजरता है। इस रणनीति में शिक्षक से यह आग्रह है कि वह सीखने वाले को भिन्न की अवधारणा को कई अलग-अलग तरीकों से निकालने या निरूपित करने के लिए प्रोत्साहित करे। शिक्षकों के साथ हमारे कार्य के दौरान हम भिन्न को दर्शाने के लिए तीन अलग-अलग तरीकों का इस्तेमाल करते हैं। एक, भिन्न संख्याओं को निरूपित करने के लिए कागज की पट्टी को तहों में मोड़ने का प्रयोग करते हैं। दो, भिन्न को निरूपित करने के लिए दिए गए समान आकार के चौखानों में से आवश्यक संख्या में चौखानों को उनसे छायांकित करवाते हैं। तीन, उनसे अंक रेखा पर दी गई भिन्न संख्या को अंकित करवाते हैं। नीचे दिए गए चित्र भिन्न संख्या  $2/5$  को समझाने (स्पष्ट) करने के तीनों तरीके दर्शाते हैं:



चित्र 1



चित्र 2



चित्र 3

अवधारणाओं को निकालने या निरूपित करने के लिए एक से अधिक तरीकों का इस्तेमाल करना हमेशा एक अच्छा विचार होता है। इससे शिक्षक पूरी तरह से आश्वस्त हो सकता है कि सीखने वाले ने उस अवधारणा को समझ लिया है और वह उसके लिए सहज हो गई है।

**तीसरी, शिक्षक को प्रश्न हल करते समय अपनी स्वयं की रणनीति को शाब्दिक रूप में व्यक्त करना चाहिए।** आइए इस विचार को स्पष्ट करने के लिए विभाजन के प्रारम्भिक प्रश्न का उपयोग करें। 212 विभाजित 2, इस सवाल को भाग के प्रचलित प्रारूप में लिखने के बाद शिक्षक अपनी नीति को यह कह कर शब्दों में स्पष्ट बयान कर सकता है कि “मैं सबसे पहले 212 के सबसे बाएँ वाले 2 को 2 से विभाजित करता हूँ और भाज्य आता है 1, मैंने 2 को 2 में से घटाया और मिलता है 0, फिर मैं 212 की अगली संख्या को उतारता हूँ जो है 1, चूँकि 1, 2 से कम है, अतः 2, 1 को एक बार भी विभाजित नहीं कर सकता और इसलिए मैं भाज्य के रूप में 0 लिखता हूँ, फिर मैं सबसे दाईं ओर वाले 2 को उतारता हूँ और भाग देने के लिए अब नया अंक है 12, 12 को 2 पूरी तरह से 6 बार विभाजित कर सकता है और इसलिए जो उत्तर हमें मिलता है वह है 106; जैसा कि आप देख सकते हैं कि यदि संख्या 200 होती तो हमें उत्तर के रूप में 100 मिला होता लेकिन चूँकि संख्या 212 है जो 200 से थोड़ी अधिक है, तो हम 100 से थोड़े अधिक उत्तर की अपेक्षा करते हैं, और इसलिए यह उत्तर तर्कसंगत दिखाई देता है।” अपनी स्वयं की रणनीति को बोल कर समझाने से शिक्षक सीखने वाले के लिए वैचारिक प्रक्रिया का नमूना पेश करता है, और सीखने वाले को भी सोचना शुरू करने में और उसकी स्वयं की रणनीति बनाने में भी मदद करता है।

**चौथी, शिक्षक को किसी समस्या को सुलझाने के लिए हल की वैकल्पिक रणनीतियों का उपयोग करना चाहिए और सीखने वालों से भी ऐसा ही करवाना चाहिए।** सीखने वालों से यह सोचने

लिए भी कहें कि कौन-सी रणनीति अधिक कुशलतापूर्ण है। आइए, हम एक सरल शाब्दिक सवाल लें – “प्रशिक्षण प्राप्त कर रहे 50 शिक्षकों के एक समूह को किसी गतिविधि के लिए 10 चार्ट पन्नों की जरूरत है। यदि 1500 शिक्षकों को 50 के समूहों में प्रशिक्षण लेना हो तो कितने चार्ट पन्नों की आवश्यकता होगी।” अब इस सवाल को कई तरीकों से हल किया जा सकता है। एक तरीका यह हो सकता है कि एक शिक्षक के लिए कितने चार्ट पेपर की आवश्यकता है यह निकालना (1/5), और फिर उसे 1500 से गुणा करना तो उत्तर के तौर पर 300 मिलता है। दूसरी विधि हो सकती है कि यह देखना कि 1500 शिक्षकों का मतलब है, ऐसे 30 समूह जिनमें प्रत्येक में 50 शिक्षक हों; और चूँकि एक बैच को 10 चार्ट पन्नों की आवश्यकता होती है, इसलिए 30 समूहों को 300 पन्नों की आवश्यकता होगी। तीसरी विधि हो सकती है अनुपात की धारणा का प्रयोग करना, यदि 50 शिक्षकों के लिए 10 चार्ट पन्नों की जरूरत है, तो समान अनुपात बनाए रखते हुए 1500 शिक्षकों के लिए कितने चार्ट पन्ने लगेंगे? इससे भी उत्तर 300 आएगा। अलग-अलग तरीकों को समझाकर और उनकी तुलनात्मक कुशलता की चर्चा करके हम सीखने वाले के लिए अवधारणाओं को सहज बनाते हैं।

**पाँचवी, शिक्षक को निम्नलिखित दो प्रश्नों का अक्सर इस्तेमाल करना चाहिए ताकि सीखनेवाले अपने उत्तर के बारे में सोचने पर मजबूर हों:**

1. आपने यह कैसे किया?

2. आप कैसे जानते हैं कि आप सही हैं?

एक ओर, जहाँ पहला प्रश्न सीखने वाले को समस्या हल करने में अपनायी गई रणनीति को शाब्दिक रूप में बताने पर मजबूर करता है, वहीं दूसरा प्रश्न उसे मजबूर करता है कि वह अपने उत्तर के तर्कसंगत होने का बचाव करे। यदि उत्तर सही भी हो तब भी ये प्रश्न प्रत्येक छात्र से पूछा जाना चाहिए।

हमने शिक्षकों के साथ अपने काम में यह पाया कि उनमें से कई हल करने की वैकल्पिक रणनीतियों के विचार के साथ सहज नहीं होते। उन्हें लगता है कि ऐसा करना छात्रों को उलझन में डालेगा, इसलिए हमें एक ही तरीके को पकड़े रहना चाहिए। हमारा विश्वास है कि इस प्रकार की सोच छात्र की चिन्तन प्रक्रिया को विधियों तक ही सीमित कर देती है, क्योंकि इससे वह सीखता है कि किसी समस्या को हल करने की एक-केवल एक-ही विधि है, और वही उसके लिए वैसे सवाल हल करने की विधि (अल्गोरिथिम) बन जाती है। अतः हमारे सामने मुख्य चुनौती खुद शिक्षकों को गणित में प्रोसेच्युअल विचारक बनाने की है।

गणित में अर्थपूर्ण शिक्षण का पूरा जोर यह सुनिश्चित करने पर है कि प्रत्येक छात्र में अवधारणात्मक समझ विकसित हो, सवाल को हल करने के दौरान शिक्षक स्वयं अपनी सोच को छात्रों को स्पष्ट करे और छात्रों को उनकी सोच व्यक्त करने के लिए प्रेरित करे, और किसी सवाल को हल करने के लिए वैकल्पिक रणनीतियों का इस्तेमाल करके छात्रों के चिन्तन को विस्तार दे।

**देविका नाडिग और विजय गुप्ता पुणे स्थित शिक्षांगन फाउण्डेशन के संस्थापक हैं। शिक्षांगन-निजी और शासकीय दोनों प्रकार से संचालित समस्त शिक्षा क्षेत्र-प्राथमिक, द्वितीयक और तृतीयक- में काम करता है। अपने अस्तित्व के पिछले 3 वर्षों में शिक्षांगन ने स्कूल प्रमुखों, शिक्षकों, महाविद्यालयों के अध्यापकों तथा युवा वर्ग के साथ काम किया है। साथ ही सामाजिक प्रयासों के कई मूल्यांकन किए हैं। उनसे [vijay.shikshangan@gmail.com](mailto:vijay.shikshangan@gmail.com) और [devika@shikshangan.org](mailto:devika@shikshangan.org) पर सम्पर्क किया जा सकता है।**



## तर्क-गणित की दिमागी कसरतें

तीन खिलाड़ी अ, ब और स एक खेल में भाग ले रहे हैं और उन्हें एक के पीछे एक इस प्रकार से खड़ा किया जाता है कि अ, ब और स दोनों को देख सकता है; तथा ब केवल स को देख सकता है जबकि स दोनों में से किसी को भी नहीं देख सकता है। वहाँ पर कुल 7 टोपियाँ हैं जिनमें से 5 नीली और 2 लाल हैं। इन 7 टोपियों से एक-एक टोपी इन तीन लोगों में से प्रत्येक के सिर पर रख दी जाती है। पहले अ से पूछा जाता है कि क्या वह अपने सिर पर रखी टोपी का रंग बता सकता है। उसका जवाब

होता है ‘नहीं’ यही सवाल ब से भी पूछा जाता है उसका जवाब भी ‘नहीं’ होता है। जब यह प्रश्न स से पूछा जाता है तो उसका जवाब ‘हाँ’ होता है और वह सही रंग बता देता है। यह मानते हुए कि तीनों खिलाड़ी तार्किक रूप से सोच सकते हैं और दूसरों के द्वारा दिए गए उत्तरों को सुन सकते हैं; बताएँ कि स की टोपी का रंग क्या है?

(संकेत: टोपियों के सभी संभव वितरणों की गणना करें)