

गणित की अच्छी वर्कशीट बनाना

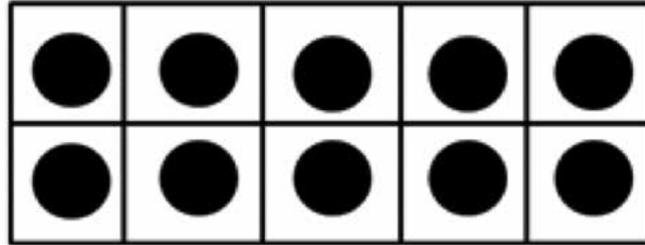
स्नेहा टाइटस

गणित के एक शिक्षक के रूप में मैंने यह अनुभव किया है कि विद्यार्थी दो बिल्कुल जुदा समूहों में विभाजित होते हैं — एक वे जिन्हें गणित बहुत पसन्द होता है और दूसरे वे जिन्हें गणित बिल्कुल पसन्द नहीं होता। इसमें कोई तटस्थ नहीं होता है और इसी प्रकार गणित की वर्कशीट के प्रति विद्यार्थियों का रुख भी बेहद बँटा हुआ होता है। कुछ ऐसे विद्यार्थी होते हैं जो वर्कशीट को तत्परता से लेते हैं, उससे मिलने वाली प्रत्येक चुनौती का आनन्द लेते हैं व खुशी-खुशी और वर्कशीट दिए जाने की अपेक्षा में इसे पूरा करके जमा कर देते हैं। जबकि कुछ ऐसे विद्यार्थी होते हैं जो इसे लेकर उदास बैठे रहते हैं, उसे हल करने में बहुत देरी करते हैं और एक डर के साथ उसे जमा करते हैं। वे यह जानते हैं कि उनकी प्रत्येक गलती को शिक्षक द्वारा बहुत अधिक महत्त्व देते हुए, चिन्हित करके वर्कशीट उन्हें वापस दी जाएगी। उन्हें यह समझ ही नहीं आ पाता कि उनसे क्या करने की अपेक्षा की गई थी।

हम विद्यार्थी को दूसरे समूह से पहले समूह में कैसे ले जा सकते हैं? दूसरी बात, कि हम वर्कशीट पर विद्यार्थी के दिए गए जवाबों के प्रति शिक्षक द्वारा किए जाने वाले व्यवहार को

कैसे बदल सकते हैं? क्या वर्कशीट एक ऐसा उत्साह भरने वाला उपकरण हो सकता है जो गणित के प्रति विद्यार्थी का रवैया बदल दे? अपने वर्तमान स्वरूप में एक वर्कशीट को प्रायः किसी अवधारणा के लिए आवश्यक अभ्यास देने वाले उपकरण के रूप में देखा जाता है। मैं इस आवश्यकता का विरोध नहीं करती हूँ, बल्कि यहाँ कुछ सुझाव देना चाहती हूँ ताकि वर्कशीट बच्चे के लिए आनन्द के साथ गणित करने का आकर्षण बन सके। मैं अपने उदाहरण के लिए, जोड़ और घटाव की एक वर्कशीट का उपयोग करूँगी। इसे आगे गुणा और भाग के लिए भी लागू किया जा सकता है, बल्कि इसमें उपयोग किए गए कुछ सवाल इन अवधारणाओं की बुनियाद भी रखते हैं।

जोड़ की कलन विधि को लागू करने के लिए एक बहुत उपयोगी और बुनियादी तरीका 10 के विघटन को समझना है। इसे समझने के लिए हमें अपने हाथों की अँगुलियों से अच्छी मदद कहाँ मिल सकती है! अपनी अँगुलियों से टेन फ्रेम (tens frame) तक की प्रगति बहुत ही सहज है और वर्कशीट पर टेन फ्रेम बनाना बहुत आसान है।

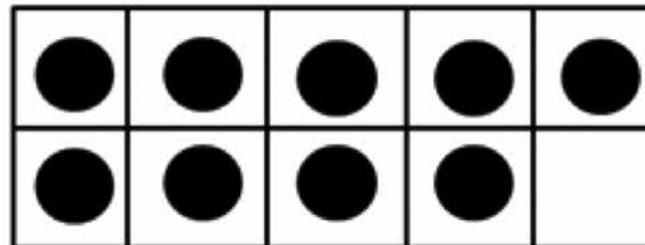


टेन फ्रेम 2 x 5 बिन्दुओं का एक ग्रिड होता है।

इसमें से किसी भी/ कुछ बिन्दुओं को हटाने से बहुत कुछ सीखा जा सकता है।

प्रारम्भिक स्तर के लिए यहाँ कुछ प्रश्न दिए गए हैं :

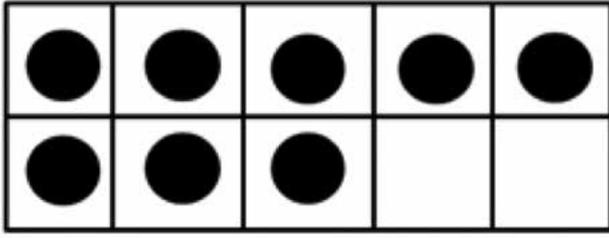
नीचे दिए गए प्रत्येक टेन फ्रेम के लिए जोड़ का जो तथ्य आपको दिख रहा हो उसे लिखें। फिर इसकी मदद से घटाने का तथ्य बनाएँ। पहला टेन फ्रेम उदाहरण स्वरूप दिया गया है :



$$9 + 1 = 10$$

$$10 - 1 = 9$$

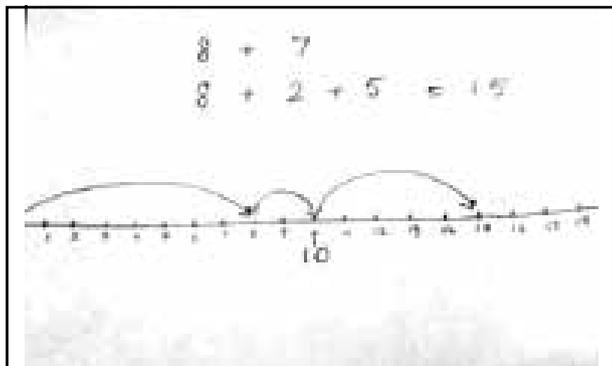
$$10 - 9 = 1$$



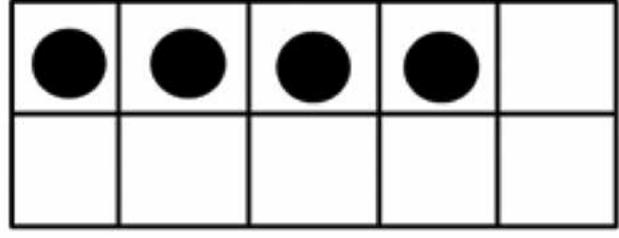
$9 + 1 = 10$; $10 - 1 = 9$ और $10 - 9 = 1$ जैसे संख्या कथनों के प्रतीकात्मक निरूपण का एक महत्वपूर्ण हिस्सा इन कथनों के अर्थ की अवधारणात्मक समझ है। इसके लिए इसके बाद किसी विशेष संख्या कथन का उपयोग कर एक कहानी बनाने या उसका चित्रण करने का प्रश्न दिया जा सकता है। एक विद्यार्थी जो 9 पेंसिलों का एक समूह दिखा पाने में सक्षम है और उसमें एक पेंसिल जोड़ सकता है, उसे 9, 1, 10 और '+' व '=' प्रतीकों की गहरी समझ होती है। टेन फ्रेम का उपयोग विद्यार्थियों को उन विभिन्न सन्दर्भों के मानसिक चित्रण में भी मदद करता है जिनमें जोड़ का उपयोग किया जाता है :

- किसी संख्या को किसी अन्य मात्रा से बढ़ाना (मेरे पास 9 पेंसिलें थीं और मुझे एक पेंसिल और दी गई)।
- किसी दी गई संख्या को किसी बड़ी संख्या तक बढ़ाने के लिए आवश्यक संख्या को निकालना (मेरे पास 9 पेंसिलें हैं, 10 पेंसिलें होने के लिए मुझे इनमें कितनी पेंसिलें और जोड़नी चाहिए)।
- दो समूहों को मिलाना (एक पेंसिल बॉक्स में 9 पेंसिलें थीं और दूसरे बॉक्स में 1 पेंसिल, दोनों बॉक्स में मिलाकर कुल कितनी पेंसिलें हैं)।

विद्यार्थी जब 10 के जोड़ के तथ्यों में महारत हासिल कर लें, तब टेन फ्रेम की जोड़ियों का उपयोग एक अंक की संख्याओं के जोड़ के लिए किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, $8 + 4$ ज्ञात करने के लिए टेन फ्रेम का उपयोग किया जा सकता है। अधिकांश बच्चे जोड़ के लिए बड़ी संख्या के आगे गिनती करने के तरीके (counting on) का उपयोग करते हैं, लेकिन टेन फ्रेम में दस को पूरा करने का उनका अभ्यास उन्हें इस

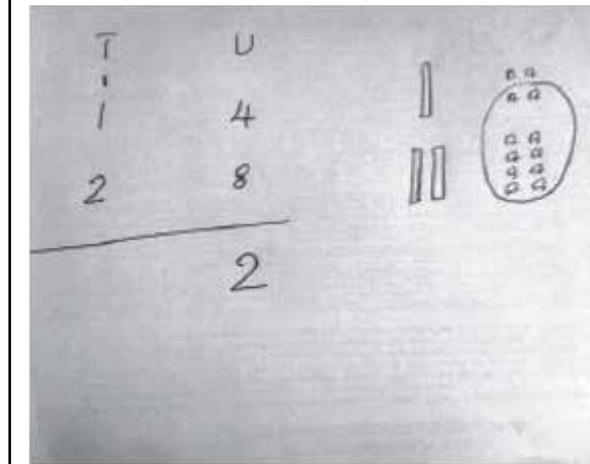


चित्र-1 : स्रोत : पद्मप्रिया शिराली; जोड़ पुलआउट : एट राइट एंगल्स, जुलाई 2013



जोड़ को $8 + 2 + 2$ के रूप में देखने में मदद करेगा और कहीं ज्यादा तेजी से 12 के योग तक पहुँचा देगा। इस अभ्यास को बहुचरणीय प्रश्नों, जैसे $7 + 5 = 7 + \underline{\quad} + \underline{\quad} = 10 + \underline{\quad} = \underline{\quad}$, देकर प्रोत्साहित किया जा सकता है।

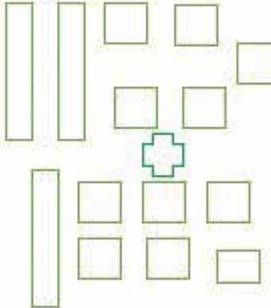
इस प्रकार के प्रश्नों का अभ्यास टेन फ्रेम की मदद से किया जा सकता है। इसके बाद बच्चों में अमूर्त समझ विकसित करने



चित्र-2 : स्रोत : पद्मप्रिया शिराली; जोड़ पुलआउट : एट राइट एंगल्स, जुलाई 2013

के लिए वर्कशीट में संख्या रेखा पर कूद का प्रयोग किया जा सकता है (चित्र-1)।

यहाँ, विद्यार्थी की अभी तक की समझ को पुख्ता करने और बाद में आने वाले दो अंकों के जोड़ के प्रश्नों को समझने में

Column 1	Column 2	Column 3								
										
										
		<table border="1"> <thead> <tr> <th>TENS</th> <th>ONES</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	TENS	ONES	3	5	4	7		
TENS	ONES									
3	5									
4	7									
Fill in the three columns when the sum is 87										

तालिका-1 : प्रश्न बनाने के लिए तीन कॉलम का प्रारूप

उनकी मदद करने की बुनियाद बनाने में वर्कशीट महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है। ज़ाहिर है कि, कलन विधि पर जाने से पहले, 'हासिल' की प्रक्रिया को समझने के लिए विद्यार्थी को 10 के गुणजों को जोड़ने और बण्डलों व तीलियों का उपयोग करने का अभ्यास होना चाहिए (चित्र-2)।

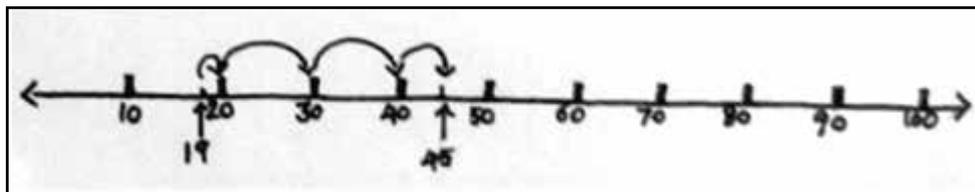
इस गतिविधि के लिखित रूप पर ध्यान दें। यह बहुत महत्वपूर्ण है — अधिकांश वर्कशीटों में कॉलम जोड़ पर आधारित बहुत से प्रश्न होते हैं, लेकिन गतिविधियों और कलन विधियों के बीच की दूरी को पाटने पर प्रायः ध्यान नहीं दिया जाता है। वर्कशीट इस दूरी को पाटने के लिए एक उपयोगी उपकरण हैं।

चित्र-2 से संकेत लेकर शिक्षक तीन कॉलम के प्रारूप में बहुत से प्रश्न बना सकते हैं।

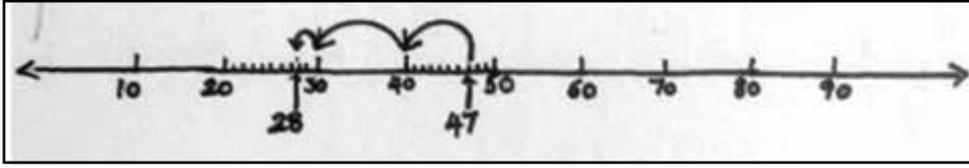
प्रश्न खुले छोर वाले हो सकते हैं यदि केवल जोड़ दिया गया है (जैसा कि पंक्ति-4 में है)। एक बार विद्यार्थी आत्मविश्वास प्राप्त कर लें तो वे अपने प्रश्न भी बना सकते हैं।

बच्चे जब हासिल की गई संख्या का अर्थ और मान समझ जाएँ, तो इस प्रक्रिया को बिना किसी ठोस वस्तु के बहु-अंकीय जोड़ तक विस्तारित किया जा सकता है।

घटाव के लिए इसी प्रकार का तरीका अपनाने से विद्यार्थी को न केवल घटाव का अर्थ और प्रक्रिया समझने में मदद मिलेगी



चित्र-3 : स्रोत : पद्मप्रिया शिराली; घटाना पुलआउट : एट राइट एंगल्स, नवम्बर 2013



चित्र-4 : स्रोत : पद्मप्रिया शिराली; घटाना पुलआउट : एट राइट एंगल्स, नवम्बर 2013

बल्कि उसे यह समझने में भी सहायता मिलेगी कि किस समय कौन-सी संक्रिया लागू करनी है। जिन सन्दर्भों में घटाव उपयोग किया जाता है, वे इस प्रकार हैं :

- अलग हटाने के रूप में घटाव (वस्तुओं के किसी ढेर में से कुछ वस्तुएँ निकालना)
- तुलना के रूप में घटाव (कितना और चाहिए/ कितना ऊँचा है)
- जोड़ के व्युत्क्रम के रूप में घटाव (कितना और जोड़ना है)

घटाव की वर्कशीट में गणितमाला का उपयोग किया जाना चाहिए जहाँ विद्यार्थी मोतियों को आगे-पीछे कर और दो दिए गए मोतियों के बीच मोतियों की संख्या ज्ञात कर ऊपर उल्लिखित तीनों सन्दर्भों में घटाव देख सकें। घटाव की इस अवधारणा को भी संख्या रेखा पर कूद लगाने के वर्कशीट के प्रश्नों की मदद से मज़बूत किया जा सकता है।

यहाँ, संख्या रेखा पर कूद सामने की ओर है, वर्कशीट में इससे सम्बन्धित प्रश्न तीसरे सन्दर्भ पर आधारित हो सकता है। उसे इस प्रकार बनाया जा सकता है : 45 पाने के लिए 19 में और कितना जोड़ा जाना चाहिए? प्रारम्भ में, एक बनी हुई संख्या रेखा पर 19 और 45 अंकित कर विद्यार्थियों की मदद की जा सकती है। इस अवस्था में उनसे केवल कूदों को दर्शाने की अपेक्षा करें। अगले स्तर के प्रश्नों में विद्यार्थियों को दी गई दो संख्याएँ अंकित करने और अन्त में प्रश्न हल करने से पहले संख्या रेखा बनाने को भी कहा जा सकता है।

दूसरे सन्दर्भ पर आधारित प्रश्न बनाने के लिए विपरीत दिशा की कूदों का उपयोग किया जा सकता है : जैसे, 28, 47 से कितना कम है?

वर्कशीट के पूरा होने तक विद्यार्थी को यह समझ में आ जाना चाहिए कि घटाव दो संख्याओं के बीच का अन्तर होता है। उसे घटाव के पहले सन्दर्भ, अर्थात् अलग हटाने (किसी ढेर में से) के रूप में घटाव, को शामिल करते हुए छोटे इबारती प्रश्न बनाना या लिखना आना चाहिए।

वर्कशीट प्रायः सटीक उत्तरों की ओर इशारा करती हैं, लेकिन इसका अर्थ यह होता है कि विद्यार्थी या तो सही है या ग़लत। वर्कशीट में उत्तर का अनुमान लगाने वाले प्रश्न देने से विद्यार्थियों को यह पहचान करने में मदद मिलती है कि उनका उत्तर ग़लत

है और वे उसे स्वयं ही सही करने का प्रयास करते हैं। जैसे ऊपर के उदाहरण में, प्रारम्भ में '28 और 47 का अन्तर __ और __ के बीच है', प्रश्न पूछा जाए तो विद्यार्थी देखकर आसानी से अनुमान लगा सकते हैं कि 47-28 48-28 और 38-28 के बीच है। इस प्रकार के प्रश्न शिक्षक को विद्यार्थी की अवधारणात्मक समझ के बारे में महत्वपूर्ण जानकारी भी देते हैं और इस तरह संरचनात्मक आकलन व उपचारात्मक शिक्षण में मदद करते हैं।

कक्षा-4 तक, जब बच्चे चार अंकों की संख्याओं का जोड़ और घटाव करते हैं, उनके लिए यह महत्वपूर्ण हो जाता है कि वे खुली संख्या रेखा पर निकटतम दहाई, निकटतम सैकड़ा और निकटतम हजार तक जाने का पुनः अभ्यास करें। यह उन्हें कठिन प्रश्नों जैसे 2415 - 1099 को हल करने और अन्तर ज्ञात करने के अपने स्वयं के संक्षिप्त तरीके विकसित करने में मदद करता है। एक वर्कशीट में विद्यार्थियों के लिए यह बताने की जगह होना चाहिए कि उन्होंने प्रश्न कैसे हल किया; उन्हें चित्र बनाकर या बिन्दुओं से यह समझाने का अवसर दिया जा सकता है कि वे उत्तर तक कैसे पहुँचे। इससे विद्यार्थियों को यह समझ आता है कि वे केवल किसी मानक कलन विधि का उपयोग करने के लिए बाध्य नहीं हैं बल्कि हल तक पहुँचने के लिए वे स्वयं की अवधारणात्मक समझ का उपयोग कर सकते हैं। इसके अतिरिक्त, ऐसी वर्कशीट जो कॉलम जोड़ की कलन विधि का संख्या रेखा पर की जाने वाले कूदों से सम्बन्ध बनाती है, विद्यार्थियों को इस कौशल में योग्य बनाने में मदद करती है।

बच्चे अपनी अवधारणात्मक समझ का प्रदर्शन कर जब अभ्यास की आवश्यकता की स्थिति में पहुँच जाएँ तो निम्न प्रकार के प्रश्न से दिलचस्प परिणाम मिलते हैं :

- वहीदा ने ईद पर अपने आठ पड़ोसियों में बाँटने के लिए 104 लड्डू बनाए।
- उसने 8 तश्तरियाँ रखीं और प्रत्येक तश्तरी में एक बार में 2 लड्डू रखे। उसके पास कितने लड्डू बचे?
- पूरे लड्डू खत्म होने तक उसने यह प्रक्रिया जारी रखी। यह बताएँ कि प्रत्येक चरण के बाद उसके पास कितने लड्डू बचे थे?

- प्रत्येक पड़ोसी को कितने लड्डू मिले?
- क्या आप वहीदा को लड्डू बाँटने का कोई त्वरित तरीका सुझा सकते हैं?

स्पष्ट रूप से, इस प्रकार का बारम्बार घटाव विभाजन (भाग) का रास्ता प्रशस्त कर रहा है। ध्यान रखें कि इस प्रकार के प्रश्न बच्चों को तब भी दिए जा सकते हैं जब उन्होंने सिर्फ जोड़ या घटाव ही सीखा हो। बच्चों से प्रश्न को हल करने का त्वरित तरीका पूछने से यह प्रश्न उन्हें दीर्घ विभाजन की कलन विधि को या उसके पीछे की सोच को आगे के उन वर्षों के लिए समझने का अवसर देता है, जब वे इसे सीखते हैं। अलग-अलग बच्चों द्वारा दिए गए उत्तरों पर सावधानी पूर्वक की गई चर्चा शिक्षक को इस नतीजे पर पहुँचने में मदद कर सकती है कि 10 को 8 बार जोड़ना (या 8×10 यदि बच्चों ने गुणा पढ़ लिया है) = 80 और $104 - 80 = 24$ जिससे प्रत्येक पड़ोसी को तीन लड्डू और मिलेंगे और इस प्रकार प्रत्येक का हिस्सा $10 + 3 = 13$ लड्डू का होगा। यही दीर्घ विभाजन की कलन विधि में अपनाया जाने वाला तर्क है। इस प्रकार का परिचय विद्यार्थियों को भाज्य संख्या के बीच में शून्य होने की समस्या (जो उन्हें 404 को 4 से भाग देने पर 11 उत्तर देने के लिए प्रेरित कर सकता है यदि वे बिना समझे मानक कलन विधि का उपयोग करते हैं) का हल ढूँढ़ने में मदद करता है। यहाँ भी, अनुमान पर आधारित प्रश्न भी इन गलतियों से बचने में मदद करेंगे।

इससे यह तथ्य भी समझ में आ जाता है कि भाग ही ऐसी अंकगणितीय संक्रिया है जिसमें कलन विधि अधिकतम स्थानीय मान के स्थान (अर्थात, बाईं ओर से) से प्रारम्भ होती है।

अतः एक अच्छी वर्कशीट बनाना विद्यार्थियों को 'परिणाम देने' के लिए व्यस्त रखने हेतु केवल पर्याप्त सामग्री उपलब्ध कराना नहीं है। संक्षेप में कहें तो,

- इसकी शुरुआत 'परिणाम देने' के अर्थ की समझ से होती है, दूसरे शब्दों में कहें तो, जिस इकाई के लिए वर्कशीट बनाई जा रही है, उसके सीखने के परिणाम हमें स्पष्ट होने चाहिए।

- वर्कशीट में चित्रों की महत्वपूर्ण भूमिका होती है और इनका उपयोग तर्क करने, बातचीत करने व सवाल सामने रखने जैसे व्यवहारों को प्रोत्साहित करने के लिए किया जा सकता है।
- वर्कशीट मूर्त और अमूर्त के बीच एक मज़बूत सेतु का कार्य कर सकती हैं। किसी भी गतिविधि को करने के बाद वर्कशीट को उसी गतिविधि के अमूर्त रूप का अभ्यास भी उपलब्ध कराना चाहिए।
- एक वर्कशीट को, विद्यार्थियों को उनके मानसिक चित्रण, निरूपण, सम्प्रेषण और अनुमान लगाने के कौशलों को विकसित और मज़बूत करने के अवसर प्रदान करना चाहिए।
- ऐसे प्रश्न विद्यार्थियों को स्व-आकलन के सशक्त अवसर प्रदान करते हैं जो उन्हें गलत उत्तर को समझकर, पीछे जाकर खुद ही उसे सही करने का अवसर देते हैं।
- अंकगणितीय संक्रियाओं की कलन विधियों के अभ्यास तभी कराए जाने चाहिए जब शिक्षक इस बात को लेकर आश्वस्त हों कि विद्यार्थी पढ़ाई गई विषयवस्तु को अवधारणात्मक रूप से मज़बूती से समझ चुके हैं।

शिक्षक वर्कशीट द्वारा प्रदान किए गए अवसरों का उपयोग किस प्रकार कर सकते हैं? यह ज़रूरी है कि सूझ-बूझ से बनाए गए प्रश्नों से जो अन्तर्दृष्टियाँ मिल सकती हैं उन पर एक-एक विद्यार्थी के साथ सीधी बातचीत में या फिर सामूहिक बातचीत में ध्यान दिया जाए, जिससे यदि उनकी कोई गलतियाँ हों तो वे उन्हें समझ सकें। हल की गई वर्कशीटों का पोर्टफोलियो बनाने से विद्यार्थियों को अपनी प्रगति पर सोच-विचार करने में मदद मिलती है और इससे वे बार-बार की जाने वाली या लापरवाही के कारण होने वाली गलतियों के प्रति जागरूक भी होते हैं। सबसे ज़रूरी बात कि, शिक्षक को वर्कशीट का स्वामित्व विद्यार्थी को देना चाहिए। उसे यह एहसास दिलाना चाहिए कि यह उसका कार्य है और उसे इससे प्राप्त अन्तर्दृष्टियाँ बताकर गर्वित महसूस करने के अवसर दिए जाने चाहिए।



स्नेहा टाइटस, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलूरु के स्कूल ऑफ़ कंटीन्यूइंग एजुकेशन-यूनिवर्सिटी रिसोर्स सेंटर में सहायक प्राध्यापक के तौर पर कार्यरत हैं। गणित की प्रासंगिकता, तार्किकता और सुन्दरता को लोगों के साथ साझा करने में उनकी खासी दिलचस्पी है। वे अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी एट राइट एंगल्स पत्रिका की सह-सम्पादक हैं और गणित के संसाधनों के विकास करने में बहुत गहराई से शामिल हैं। उनसे sneha.titus@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है। अनुवाद : संजय गुलाटी पुनरीक्षण : भरत त्रिपाठी कॉपी एडिटर : अनुज उपाध्याय