ಲಂಬ ವಿಕರ್ಣಗಳ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು

Review by Chaitanya Associates, Mysore

ಈ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ, ತನ್ನ ಎರಡು ವಿಕರ್ಣಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಯಾವುದೇ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೆಲವು ಗುಣಗಳನ್ನು ನಾವು ಅಭ್ಯಸಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳ ಆಕೃತಿಯೊಂದು ಈ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಲಂಬ-ವಿಕರ್ಣ ಚತುರ್ಭುಜ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ ಹಲವು ವಿಶೇಷ ಬಗೆಯ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳ ಆಕೃತಿಗಳೂ ಇದೇ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ : ಚೌಕಗಳು, ವಜ್ರಾಕೃತಿಗಳು (ಇಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ) ಹಾಗು ಗಾಳಿಪಟಗಳು (ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಜೋಡಿ ನಿಕಟಬಾಹುಗಳು ಸಮನಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ). ಓದುಗರಿಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವಾಗಬಹುದು ಆದರೆ ಇಂತಹ ಸಾಮಾನ್ಯ ನಿಯಮಗಳೂ (ವಿಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು) ಇಂತಹ ಹಲವಾರು ಚೇತೋಹಾರಿ ಗುಣಗಳಿಗೆ ಎಡೆಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ.

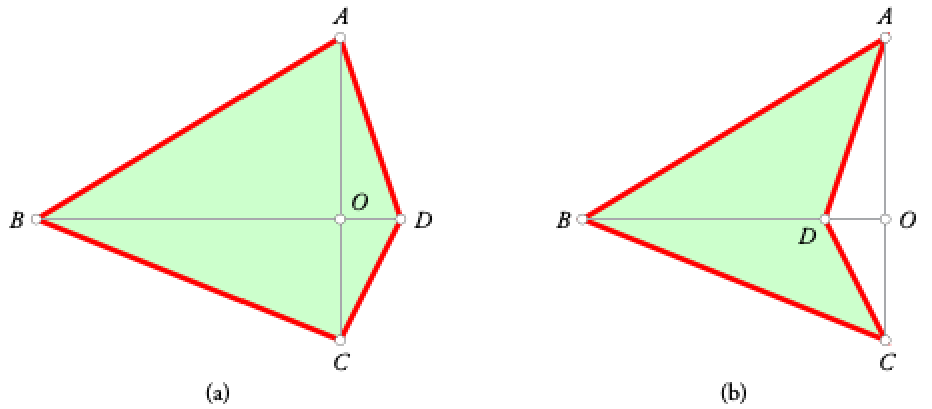
ಗುಣ 1: ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಗಳು

ಪ್ರಮೇಯ 1. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳ ಎರಡು ಜೋಡಿಗಳು ಸಮನಾದ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ABCD ಎಂದು ಹೆಸರಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ 1).
ಈಗ ಪ್ರಮೇಯವು ಹೀಗೆ ಹೇಳುತ್ತದೆ : $AC \perp BD$ ಆದರೆ, $AB^2+CD^2 = AD^2 + BC^2$. ಇದಕ್ಕೆ ಸಾಧನೆ ಹೀಗಿದೆ. ACಯು BDಅನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು O ಆಗಿರಲಿ. ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ:

$AB^2 = AO^2 + BO^2$, $CD^2 = CO^2 + DO^2$,
$AD^2 = AO^2 + DO^2$, $BC^2 = BO^2 + CO^2$
ಹಾಗು ನಾವು ನೋಡುವಂತೆ
$AB^2 + CD^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = AD^2 + BC^2$.

ಮುಖ್ಯಪದಗಳು: ಚತುರ್ಭುಜ, ಲಂಬ, ವಿಕರ್ಣ, ಲಂಬ-ವಿಕರ್ಣ, ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ, ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ, ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಯತ, ಮಧ್ಯಬಿಂದು ವೃತ್ತ, 8-ಬಿಂದು ವೃತ್ತ, ಮಾಲ್ಟಿಟ್ಯೂಡ್, ಅನಿರ್ಧರಿತ.



ಚಿತ್ರ 1

ಚತುರ್ಭುಜ ಪೀನವಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಇದೇ ನಿರ್ಣಯ ಸರಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬೇಕು ಹಾಗು ವಿಕರ್ಣಗಳು ಚಿತ್ರ 1 (b) ನಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಕೂಡುತ್ತವೆ. ಅದೇ ಸಾಧನೆಯು ಎರಡೂ ಚಿತ್ರಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.
ಇನ್ನೊಂದು ವಿಶೇಷವೆಂದರೆ, ಈ ಪ್ರತಿಪಾದನೆಗೆ ವಿಲೋಮವೊಂದಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2. ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳ ಎರಡು ಜೋಡಿಗಳು ಸಮನಾದ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಅಂದರೆ, $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, $AC \perp BD$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಓದುಗರು ಇದನ್ನು ಮೊದಲು ಸಾಧಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನಂತರ ಮುಂದೆ ಓದಬೇಕೆಂದು ನಾವು ಆಶಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಮ್ಮ ಸಾಧನೆಯು ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತದೆ. $\triangle ABC$ ಅಲ್ಲಿ, a^2 ನ ಪರಿಮಾಣವು $b^2 + c^2$ ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು, ಕಡಿಮೆ ಅಥವಾ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ ಹಾಗು ಇದು $\measuredangle A$ ಕೋನವು 90° ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ, ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಸಮನಾಗಿದೆಯೆ ಎಂಬುದರ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ನಮ್ಮ ಗುರಿಯು $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $\measuredangle AOB = 90^\circ$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುವುದೇ ಆಗಿದೆ. ನಮ್ಮ ಪ್ರಸ್ತಾವವು $\measuredangle AOB$ ಲಘು ಅಥವಾ ವಿಶಾಲಕೋನವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುವುದು. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದಾಗ ನಮಗೆ ಬೇಕಿರುವ ಆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಾಧ್ಯತೆಯು ನಮಗೆ ದೊರಕುತ್ತದೆ.(ಯೂಕ್ಲಿಡನಿಗೆ ಈ ಪ್ರಸ್ತಾವವು ಅತಿ ಪ್ರಿಯವಾದುದು. ಆತನ 'ದಿ ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್' ಪುಸ್ತಕದ ಹಲವು ಸಾಧನೆಗಳು ಈ ಪ್ರಸ್ತಾವದ ರೀತಿಯಲ್ಲೇ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಶೆರ್ಲಾಕ್ ಹೋಮ್ಸ್‌ನಿಗೂ ಇದೇ ಪ್ರಸ್ತಾವ ಇಷ್ಟವಾಗಿತ್ತು! ಆತನ ಆಭಿಮಾನಿಗಳು ಅವನ ಮರೆಯಲಾಗದ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು, "ನಾನು ನಿನಗೆ ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಹೇಳಿದ್ದೇನೆ, ಯಾವುದು ಅಸಾಧ್ಯವೋ ಅದನ್ನು ನೀವು ತೆಗೆದುಹಾಕಿದಾಗ, ಯಾವುದು ಉಳಿಯುತ್ತದೆಯೋ ಅದು, ಎಷ್ಟೇ ಅಸಂಭವನೀಯವಾಗಿದ್ದರೂ, ಅದೇ ಸತ್ಯ!).

$\measuredangle AOB$ ಲಘುಕೋನವೆಂದು ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. ಆಗ $\measuredangle COD$ ಕೂಡ ಲಘುಕೋನವಾಗುತ್ತದೆ ಹಾಗು $\measuredangle BOC$ ಹಾಗು $\measuredangle DOA$ ವಿಶಾಲಕೋನಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ರೂಪವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ, ನಮಗೆ ಇದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ :

$AB^2 < AO^2 + BO^2$, $CD^2 < CO^2 + DO^2$,

$AD^2 > AO^2 + DO^2$, $BC^2 > BO^2 + CO^2$.

ಇದರ ಜೊತೆಗೆ ನಮಗೆ ದ್ವಿ-ಅಸಮತೆಯೂ ದೊರಕುತ್ತದೆ :

$AB^2 + CD^2 < AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 < AD^2 + BC^2$,

ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ $AB^2 + CD^2 < AD^2 + BC^2$ ಎಂದು ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಇದು ನಾವು ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿದೆ : $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

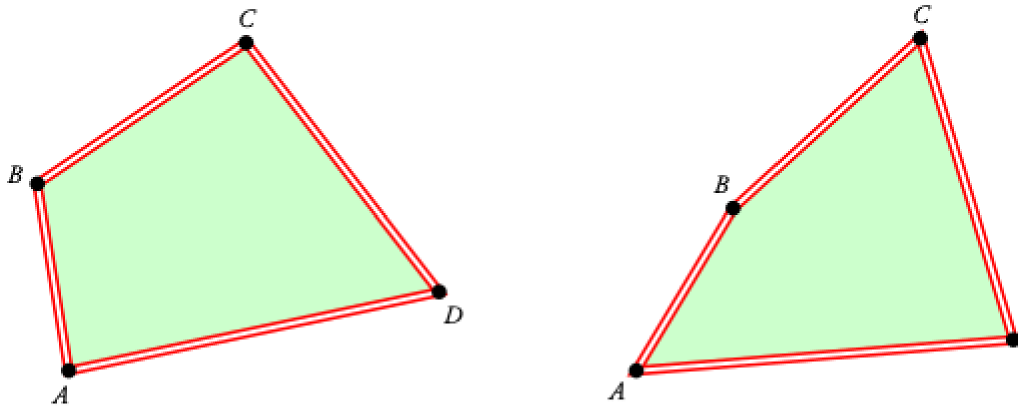
ಆದ್ದರಿಂದ $\measuredangle AOB$ ಲಘುಕೋನವೆಂಬ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪು. $\measuredangle AOB$ ಲಘುಕೋನವಾಗಲಾರದು.

ಈಗ $\measuredangle AOB$ ವಿಶಾಲಕೋನವೆಂದು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರೆ, ನಮಗೆ $AB^2 + CD^2 > AD^2 + BC^2$ ಎಂದು ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಇದೂ ಸಹ ನಾವು ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನೂ ಬಿಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. $\measuredangle AOB$ ವಿಶಾಲಕೋನವಾಗಲಾರದು.

ಇವೆರಡರಿಂದ $\measuredangle AOB$ ಲಂಬಕೋನವೆಂಬ ಸಾಧ್ಯತೆ ಮಾತ್ರ ಉಳಿಯುವುದು; i.e., AC ಹಾಗು BD ಎರಡು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಕಾಯುತ್ತಿದ್ದುದು.

ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಸಾಧಿಸುವುದು. 11 ಹಾಗು 12 ತರಗತಿಗಳ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮೇಲಿನ 1 ಹಾಗು 2 ಪ್ರಮೇಯಗಳಿಗೆ ಸದಿಶಗಳ ಸಾಧನೆಯಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು ಆಸಕ್ತರಾಗಬಹುದು ; ಎರೆಡೂ

ಪ್ರಮೇಯಗಳೂ ಒಂದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.



(a) (b)

ನೀಡಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ದಲ್ಲಿ, ಸದಿಶ AB, BC, CD ಗಳನ್ನು a , b , c ಎಂದು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಗುರುತಿಸೋಣ ; ಆಗ AD = a + b + c. ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ನಮಗೆ :

$AB^2 = a \cdot a$, $BC^2 = b \cdot b$, $CD^2 = c \cdot c$,

$AD^2 = (a + b + c) \cdot (a + b + c)$

$= a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + 2 (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$. ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

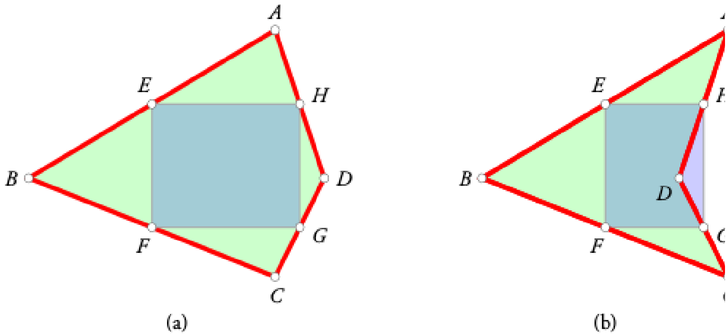
ಆದ್ದರಿಂದ $AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2 = 2 (b \cdot b + a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

$= 2 (a + b) \cdot (b + c) = 2AC \cdot BD$.

ಆದ್ದರಿಂದ $AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2 = 0$, $AC \perp BD$ ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

ಎರಡನೇ ಗುಣ : ದೃಢತೆ

ಪ್ರಮೇಯ 2 ಬಹುಭುಜಗಳ ದೃಢತೆಯ ಸಂಬಂಧಕ್ಕೆ ಪರಿಣಾಮ ಬೀರುತ್ತದೆ.
ತ್ರಿಭುಜ ದೃಢವಾದುದೆಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ : ತ್ರಿಭುಜದ ಅಸಮತೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ 3 ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ನೀಡಿದರೆ (i.e., ಅತಿ ಉದ್ದದ ಬಾಹುವು ಇನ್ನುಳಿದ ಎರಡರ ಮೊತ್ತಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತದೆ) ಆಗ ಇವುಗಳನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದರ ರೂಪವು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಲಾಕೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ನಟ್ ಹಾಗು ಬೋಲ್ಟ್‌ಗಳಿಂದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದರೆ, ರಚನೆಯು ದೃಢವಾಗಿ ಹಾಗು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ; ಒತ್ತಡಕ್ಕೊಳಗಾದಾಗ ಅದು ತನ್ನ ಆಕಾರವನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ, ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಸೃಷ್ಟಿಸಲಾದ ಚತುರ್ಭುಜವು ದೃಢತೆ ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ; ದತ್ತ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ (ಅತೀ ಉದ್ದದ ಬಾಹುವು ಇನ್ನುಳಿದ 3 ಬಾಹುಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿರುತ್ತದೆ), ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಒಳಕ್ಕೆ ತಳ್ಳಬಹುದು ಅಥವಾ ಹೊರಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಬಹುದು ಹಾಗು ಇದರ ಆಕಾರ ವಿರೂಪಗೊಳಿಸಬಹುದು. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ವಿಭಿನ್ನ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಚಿತ್ರ 2ರಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.
ಈಗ ಇರುವ ನಾಲ್ಕು ಸಲಾಕೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ "ಕೂಡಿದ ಚತುರ್ಭುಜ"ದ ನಿರ್ಮಾಣವಾಗಿದೆಯೆಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ವಿಕರ್ಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಳಗೆ ಅಥವಾ ಹೊರಗೆ ಒತ್ತಡಕ್ಕೊಳಪಡಿಸಿದಾಗ ಇದರ ಆಕಾರ ವಿರೂಪಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ ಈ ಗುಣ ಎಂದಿಗೂ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ, ಎಷ್ಟೇ ಒತ್ತಡಕ್ಕೊಳಪಡಿಸಿದರೂ ಚತುರ್ಭುಜದ ಆಕಾರವನ್ನು ವಿರೂಪಗೊಳಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ವಿಕರ್ಣಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 3

ಮೂರನೇ ಗುಣ : ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಯತ

ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಪ್ರಮೇಯದ ಪರಿಚಯವಿರುವ 9 ಮತ್ತು 10 ನೇ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಈ ಗುಣ ಅಚ್ಚರಿಯೆನಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ 3 ರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಅಲ್ಲಿ, AB , BC , CD , DAಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ E , F , G , H ಎಂದಿರಲಿ. ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಪ್ರಮೇಯದ ಮೂಲಕ, EF ಹಾಗು HG ರೇಖಾಖಂಡಗಳು AC ವಿಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ , FG ಹಾಗು EH ರೇಖಾಖಂಡಗಳು BD ವಿಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜ EFGH ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ; ಇದನ್ನು ABCD ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. (ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ವಾರಿಗ್ನಾನ್ ಪ್ರಮೇಯ (Varignon's Theorem) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದು ಎಲ್ಲಾ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಿಗೂ ಸರಿಯಾಗುತ್ತದೆ). ಆದ್ದರಿಂದ ABCDಯ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ EFGHನ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು

ಲಂಬಕೋನಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಇದು ಪ್ರಮೇಯ 3 ಅನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.
ಪ್ರಮೇಯ 3. ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಯಾವಾಗಲೂ ಆಯತವಾಗಿರುತದೆ.

ಮುಂಚಿನಂತೆಯೇ, ಚತುರ್ಭುಜವು ಪೀನವಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಚಿತ್ರ 3 (b)ನಂತೆ ಈ ಫಲಿತಾಂಶ ಸರಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಈಗ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಯತ ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು.

ಮುಂದಿನಂತೆ ಪ್ರಮೇಯ 3 ರ ವಿಲೋಮವೂ ಸರಿಯಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 4. ಚತುರ್ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ಆಯತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿರುತವೆ.

ಇದರ ಪುರಾವೆ ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ನಾವು ಅದನ್ನು ಬಿಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ.

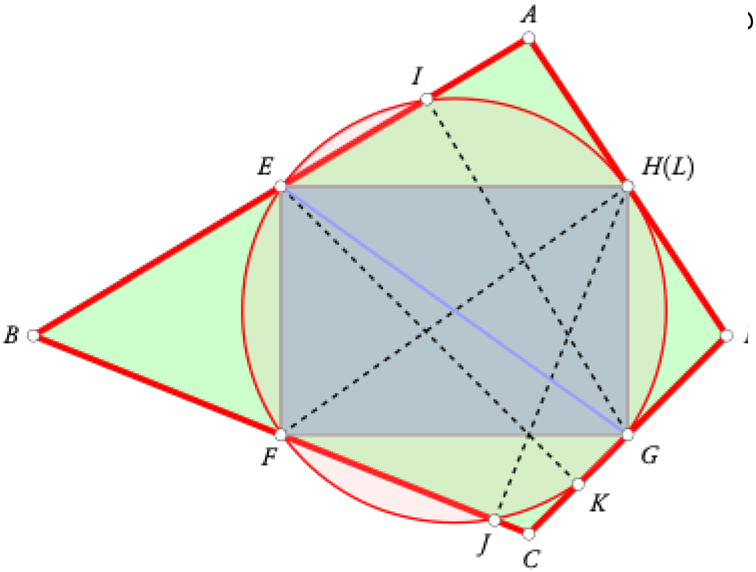
ನಾಲ್ಕನೇ ಗುಣ : ಮಧ್ಯಬಿಂದು ವೃತ್ತ

ಆಯತವು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಶೇಷ ಪ್ರಕರಣವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಅದರ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಅದರ 4 ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ವೃತ್ತವೊಂದು ಇರುತ್ತದೆ. ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಎರಡನೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಯೂ ಅದನ್ನೇ ಮಾಡಬೇಕು (ಮೊದಲು ಛೇದಿಸಿದ [illegible])ಛೇದಿಸಬೇಕು, ಇದರಿಂದ ನಾಲ್ಕು ವಿಶೇಷ ಬಿಂದುಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ ; ಚಿತ್ರ 4 ಅನ್ನು ನೋಡಿ. ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವುವು?

ಚಿತ್ರ 4 ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ E , F , G , H ಹಾಗು ವೃತ್ತ (EFGH) ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳನ್ನು I , J , K , L ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇಧಿಸುತ್ತದೆ.

(ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ L ಹಾಗು H ಎರೆಡೂ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿವೆ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇದು ಹೀಗಾಗುವುದಿಲ್ಲ.)

EG ಹಾಗು FH ರೇಖಾಖಂಡಗಳು (EFGH ಆಯತದ ವಿಕರ್ಣಗಳು) ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ I ಎಂಬುದು Gನಿಂದ AB ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದಿರುವ ಲಂಬವಾಗಿದೆ; J ಎಂಬುದು Hನಿಂದ BC ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದಿರುವ ಲಂಬವಾಗಿದೆ; Kಎಂಬುದು Eನಿಂದ CD ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದಿರುವ ಲಂಬವಾಗಿದೆ; L ಎಂಬುದು F ನಿಂದ DA ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದಿರುವ ಲಂಬವಾಗಿದೆ (ಥೇಲ್ಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ : "ಅರ್ಧವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ") ನಾವು ಈಗ ನಾಲ್ಕು ಹೊಸ ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವುವೆಂದು ಗುರುತಿಸಿದ್ದೇವೆ : ಅವು ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳ ಕಾಲುಗಳು. ಎಂಟು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಚತುರ್ಭುಜದ ಎ ... ೦ತ್ತು ಬಿಂದು ವೃತ್ತದಂತೆ).



ನಾವು ಬಿಡಿಸಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಲಂಬಗಳನ್ನು (ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ) ಚತುರ್ಭುಜದ ಮಾಲ್ಟಿಟ್ಯೂಡ್ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯ ರಚನೆಯನ್ನು ಯಾವುದೇ ಚತುರ್ಭುಜಕ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸಮರ್ಥವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

ಪ್ರಮೇಯ 5. ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಹಾಗು ನಾಲ್ಕು ಮಾಲ್ಟಿಟ್ಯೂಡ್‌ಗಳ ಕಾಲುಗಳು ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಬೀಳುತ್ತವೆ.

ಈ ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿಲೋಮವೂ ಸರಿಯಿದೆ:

ಪ್ರಮೇಯ 6. ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಹಾಗು ನಾಲ್ಕು ಮಾಲ್ಟಿಟ್ಯೂಡ್‌ಗಳ ಕಾಲುಗಳು ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಬಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಐದನೇ ಗುಣ : ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತನ ಪ್ರಮೇಯ

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಒಂದು ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕ ಗುಣದ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜಕ್ಕೆ ನಾವು 'ಚಕ್ರೀಯ' ಎಂಬ ಒಂದು ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಗುಣವನ್ನು ನೀಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ಚರ್ಚಿಸುವ ಗುಣವನ್ನು ಮೊದಲು ತೋರಿಸಿದವರು ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ (7ನೇ AD).

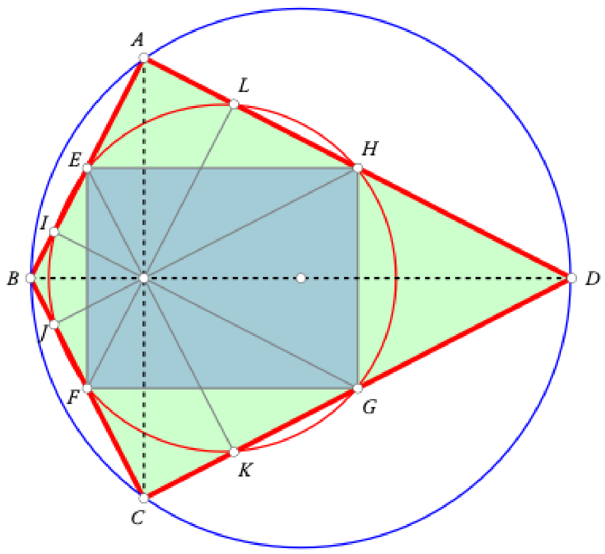
ಚಿತ್ರ 5 ಈ ಗುಣವನ್ನು ಬಿತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜವು ABCD, ಇದರ ವಿಕರ್ಣಗಳು AC ಹಾಗು BD ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿವೆ. ಇದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು E , F , G , H ಹಾಗು EFGH ಒಂದು ಆಯತ. E , F , G , Hಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾಯುವ ವೃತವು ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ I , J , K , L ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

EK , FL , GI , HJ ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಅವು AC ಹಾಗು BD ಬಾಹುಗಳ ಛೇಧಕ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ **ಹಾದುಹೋಗುವುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.** ಈಗ 6 ವಿವಿಧ ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತಿವೆ.

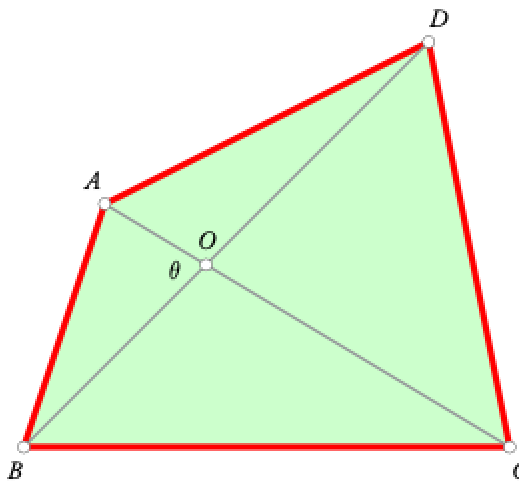
ಇದಲ್ಲದೆ, EK ⊥ CD, FL ⊥ DA, GI ⊥ AB ಹಾಗು HJ ⊥ BC !

ಎಂಥಹ ಸುಂದರ ಫಲಿತಾಂಶ. ನಾವು ಇದನ್ನು **ಔಪಚಾರಿಕವಾಗಿ** , ಪ್ರಮೇಯವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ([3] ನ್ನು ನೋಡಿ)

ಪ್ರಮೇಯ 7 (ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ). ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯ ಹಾಗು ಲಂಬ-ವಿಕರ್ಣ ಎರಡೂ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ವಿಕರ್ಣಗಳು ಛೇಧಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಯಾವುದೇ ಬಾಹುವಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ವಿರುದ್ಧ ಬಾಹುವನ್ನು ಎರಡು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ **ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.**



ಚಿತ್ರ 5



ಆರನೇ ಗುಣ : **ವಿಸ್ತೀರ್ಣ**

ಈ ಲೇಖನವನ್ನು ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚೆಯಿಂದ ಮುಕ್ತಾಯಗೊಳಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಾವು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲಿದ್ದೇವೆ: ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳು ಹಾಗು ಎರಡು ವಿಕರ್ಣಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ "ಹೌದು" **ಎಂದು** ನಾವು ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ, ಆದರೆ ಇದಕ್ಕೆ ಕೊಂಚ ವಿವರಣೆಯ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಈ ಕಥೆಗೆ ನೀವು ನಿರೀಕ್ಷಿಸದ ತಿರುವೊಂದಿದೆ.

ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ABCD ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿ, AB , BC , CD , DA ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವು ಕ್ರಮವಾಗಿ a , b , c , d , AC ಹಾಗು BD ವಿಕರ್ಣಗಳ ಛೇಧಕ ಬಿಂದುವು O ಆಗಿರಲಿ, ಹಾಗು ವಿಕರ್ಣಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು θ ಆಗಿರಲಿ. ನಾವು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ k ಅನ್ನು a , b , c , d , θ ಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ತ್ರಿಭುಜದ ಸೈನ್ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ, ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ **ಇದೆಂದು** ಸುಲಭವಾಗಿ ತೋರಿಸಬಹುದು

$k = \frac{1}{2} AC \times BD \times sin\theta$.

ನಾವು ಮೊದಲನೇ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ $AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2 = 2AC \cdot BD$

$$|AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2| = 2AC \times BD \times |cos\theta|$$

(ಇಲ್ಲಿ ನಾವು **ನಿರಪೇಕ್ಷ ಮೌಲ್ಯ**ವನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ, ಇಲ್ಲಿ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ನಗಣ್ಯ; ನಮಗೆ ಬೇಕಿರುವುದು **ನಿರಪೇಕ್ಷ ಮೌಲ್ಯ** ಮಾತ್ರ)

ಆದ್ದರಿಂದ

$AC \times BD = \frac{|AD^2+BC^2-AB^2-CD^2|}{2|cos\theta|}$

ಇದು ನಮಗೆ ಬೇಕಿರುವ ಚತುರ್ಭುದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ

$k = \frac{|AD^2+BC^2-AB^2-CD^2| \times |tan\theta|}{4}$

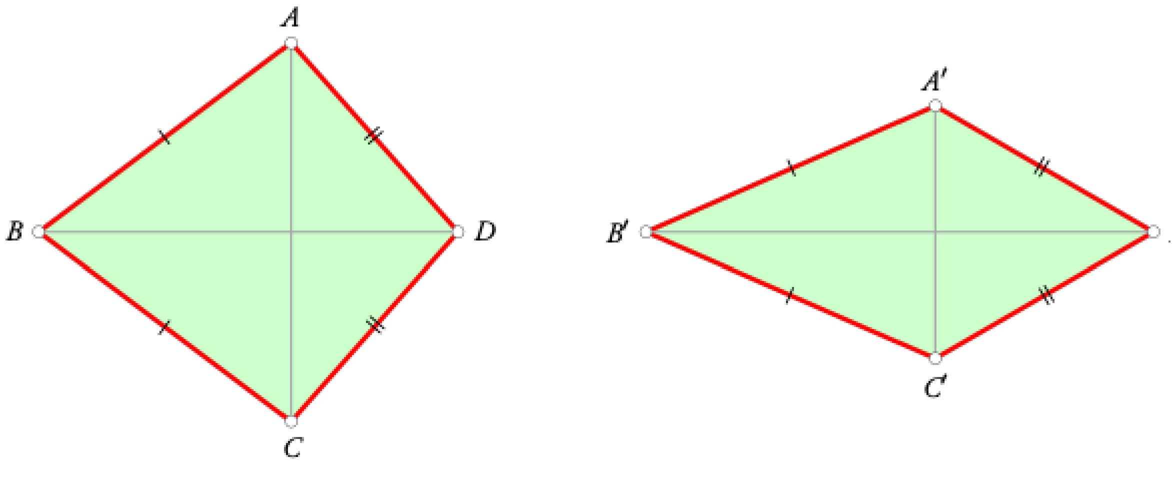
ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ವಿಶೇಷವಾದ ಫಲಿತಾಂಶ ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜ ನಾವು ಪರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದ್ದರೆ i.e., ವಿಕರ್ಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಅನಿರ್ಧರಿತ ರೂಪ (indeterminate form) ವೊಂದು ದೊರಕುತ್ತದೆ !

ಇಲ್ಲಿನ ಅಂಶದಲ್ಲಿ θ = 900 ಇದ್ದರೆ 0 × ∞ ಎಂಬ ಗುಣಲಬ್ಧ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಅವಲೋಕಿಸಿದಾಗ, ಇದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆಟ ಅಥವಾ ವೈಚಿತ್ರ್ಯವಾಗಿರದೆ ನಿಜಕ್ಕೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವೆಂಬ ನಿರ್ಣಯಕ್ಕೆ ಬರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ !

ವಿಭಾಗ II ರಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ವಿಮರ್ಶೆಗಳು ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸುತ್ತವೆ; ಚತುರ್ಭುಜವು ದೃಢವಲ್ಲ ಎಂದು ನಾವು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ; ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಗಳಾಗಬಹುದು. ಆದರೆ ಅದರ ವಿಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಗುಣ ಅಚಲವಾದುದು. ಒಂದು ಗುಣವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಿನ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ಸತ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದು ಯಾವಾಗಲೂ ಸತ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ನಾವು ನೋಡುವುದೇನೆಂದರೆ, ಆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಮೌಲ್ಯಗಳ ನಿರಂತರತೆಯನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ ಹಾಗು ಆ ಕಾರಣದಿಂದಲೇ ಅದು ಅನಿರ್ಧರಿತ **ರೂಪ**ವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಗಾಳಿಪಟದ ಪ್ರಕರಣ. ಇದರದ್ದೇ ಆದ, ಸುಲಭಗ್ರಾಹ್ಯವೆನ್ನಬಹುದಾದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರಕರಣವೊಂದಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 7)

: ಪಕ್ಕದ ಜೋಡಿ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಾಗ (ಅಂದರೆ ಗಾಳಿಪಟ).

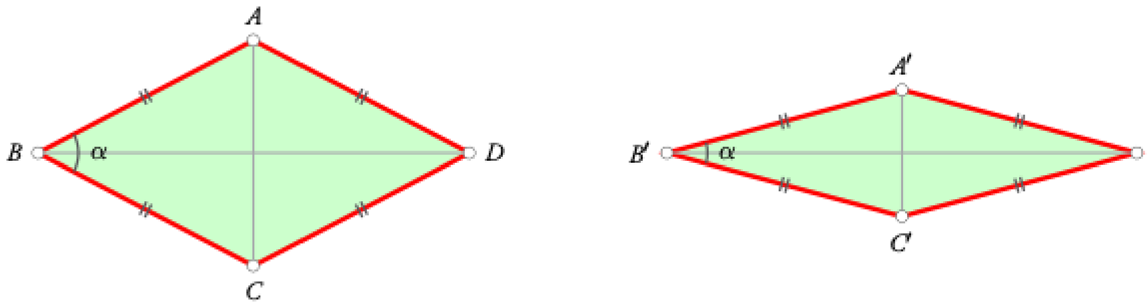


(a) (b)

ABCD ಹಾಗು A ′ B ′ C ′ D ′ ಚಿತ್ರಗಳು (ಗಾಳಿಪಟಗಳು , AD = CD = A ′ D ′ = C ′ D ′ ಹಾಗು AB = BC = A ′ B ′ = B ′ C ′) ಅಸಮನಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಲಂಬ ವಿಕರ್ಣದಗುಂಟ ಕಿರಿದಾಗಿಸಿದರೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣಯನ್ನು ನಮಗೆ ಬೇಕಾದಂತೆ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಶಿಥಿಲ (degenerate) ಚತುರ್ಭುಜ ಇಲ್ಲಿರುವ ಮಿತಿಯಾಗಿದೆ (ಅಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸೊನ್ನೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ) .

ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಪ್ರಕರಣ. ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಪ್ರಕರಣವು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಾಣಿಸುತದೆ.

ವಜ್ರಾಕೃತಿಗೆ a ಎಂಬ ಬಾಹುವಿರಲಿ ಹಾಗು ಇದರ ಕೋನಗಳು α ಹಾಗು 180 ◦ − α ಎಂದರೆ 0 ◦ < α ≤ 90 ◦ (ಚಿತ್ರ 8 ಅನ್ನು ನೋಡಿ) ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $a^2 \sin \alpha$. α ದ ಮೌಲ್ಯವು 0 ◦ ಹಾಗು 90 ◦ರ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿದೆ , ಇದರಿಂದಾಗಿ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 0 ಹಾಗು a^2 ರ ಮಧ್ಯದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಬಹುದಾಗಿದೆ.



(a) (b)

ಉಲ್ಲೇಖಗಳು

1. Martin Josefsson, Characterizations of Orthodiagonal Quadrilaterals. http://forumgeom.fau.edu/FG2012volume12/FG201202.pdf
2. Wikipedia, Orthodiagonal quadrilateral. https://en.wikipedia.org/wiki/Orthodiagonal_quadrilateral
3. Wikipedia, Brahmagupta theorem. https://en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta_theorem

ಮೂಲ : ಶೈಲೇಶ್ ಶಿರಾಲಿ ಸಹ್ಯಾದ್ರಿ ಶಾಲೆ (KFI), ಪುಣೆಯ ನಿರ್ದೇಶಕರು ಹಾಗು ಸಮುದಾಯ ಗಣಿತ ಕೇಂದ್ರ (ಕಮ್ಯೂನಿಟಿ ಮ್ಯಾತಮೆಟಿಕ್ಸ್ ಸೆಂಟರ್) ರಿಷಿ ವ್ಯಾಲಿ ಎಜುಕೇಷನ್ ಸೆಂಟರ್ (AP). ಇವರು ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಒಲಂಪಿಯಾಡ್ ಚಳುವಳಿಯಲ್ಲಿ ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಪ್ರೌಢ ಶಾಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಇವರು ಹಲವಾರು ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ ಹಾಗು At Right Angles ನ ಸಂಪಾದಕರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಇವರನ್ನು shailesh.shirali@gmail.com ನಲ್ಲಿ ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದು.

ಕನ್ನಡಕ್ಕೆ : ಕಾರ್ತಿಕ್ ಕೆ , ಐಟಿ ಫಾರ್ ಚೇಂಜ್

ಪರಿಶೀಲನೆ : ಶ್ರೀರಂಜಿನಿ ಆರ್, ಐಟಿ ಫಾರ್ ಚೇಂಜ್

CC-BY