Translation of Summing V_a correction : Haran Mouli_From Azim premji University At Right Angles_March, 2021

उच्च प्राथमिक विद्यार्थियों का कोना

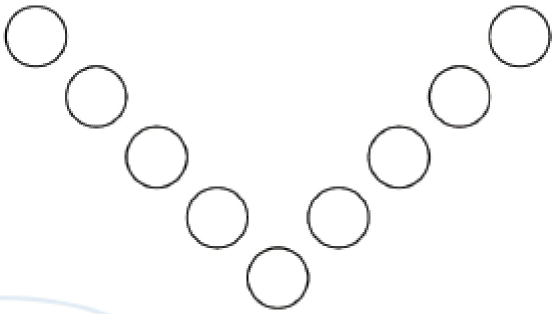
V का जोड़ *(भूलसुधार)*

हरण मौली

मुख्य शब्द : *V का जोड़*

एट राइट एंगल्स के मार्च 2020 के अंक में प्रकाशित 'लो फ्लोर हाई सीलिंग टास्क' (Low floor high ceiling tasks) सीरीज़ [1] के अन्तर्गत, नीचे दिए गए सवाल को हल किया गया था।

समान्तर श्रेणी में दी गई 9 संख्याओं को V आकृति में इस तरह से जमाने के कितने तरीक़े हो सकते हैं कि V आकृति की दोनों भुजाओं पर संख्याओं का योगफल समान हो?



समस्या की पड़ताल करते हुए हमने देखा कि लेख में दिए गए समाधान में त्रुटि थी। यहाँ हम तरीक़ों की सही संख्या बता रहे हैं।

सार्वभौमिकता (Without loss of generality) को छोड़े बिना हम समान्तर श्रेणी की 9 संख्याओं को पूर्णांक 1, 2, ..., 9 मान रहे हैं। तो अब हमारे पास है :

$$1 + 2 + \cdots + 9 = \frac{9.10}{2} = 45.$$

यदि V में सबसे नीचे की संख्या को x मान लें, तो प्रत्येक भुजा पर (बीच की संख्या को छोड़कर) संख्याओं का योगफल $(45 - x)/2$ होना चाहिए। स्पष्ट है कि इस स्थिति में x हमेशा एक विषम संख्या होनी चाहिए। अत: $x \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$।

शुरुआत में हम भुजाओं में संख्याओं के क्रम को बदलने और दोनों भुजाओं की संख्याओं की आपस में अदला-बदली को नज़रन्दाज़ करेंगे। इसे स्पष्ट करने के लिए हम अन्त में $2.(4!)^2$ से गुणा कर देंगे।

जिन स्थितियों में बीच की संख्या 1 और 9 है वहाँ पूरी V आकृति में समान रूप से प्रत्येक संख्या k को $10\text{-}k$ से बदलकर दोनों स्थितियों का आपस में 1-1 से मिलान किया जा सकता है। इसलिए इन दोनों स्थितियों में सम्भावनाओं की संख्या एक समान होनी चाहिए। इसी तर्क का प्रयोग 3 और 7 के लिए भी किया जाएगा। अत: हमें अपना ध्यान केवल उन स्थितियों पर रखने की ज़रूरत है जब बीच की संख्या 5, 7 या 9 हो।

जब बीच की संख्या 9 है, तब हर एक भुजा का योगफल $(45 - 9)/2 = 18$ होगा। आइए, अब हम जोड़ियों {1, 8}, {2, 7}, {3, 6} और {4, 5} पर विचार करें। हर जोड़ी का योगफल समान, यानी कि 9 है, जो कि 18 का आधा है। इस प्रकार यदि इनमें से एक भी जोड़ी यथावत रहती है (यानी दोनों संख्याएँ V की एक ही भुजा पर रहती हैं) तब सभी जोड़ियों को यथावत रहना चाहिए। अगर {1, 8} को एक भुजा पर मान लें, तो हमारे पास उसी भुजा पर दूसरी जोड़ी (जो इसके साथ होनी चाहिए) के लिए 3 विकल्प होंगे। इस प्रकार इसकी 3 सम्भावनाएँ बनती हैं। जब हम यह कर लेते हैं, तब हमारे पास कोई और विकल्प नहीं बचता। इस प्रकार से 3 सम्भावनाएँ हैं जिनमें सारी जोड़ियाँ यथावत रहती हैं।

अब उस स्थिति पर विचार करते हैं जिसमें 1 और 8 अलग-अलग भुजाओं पर हैं। जिस भुजा पर 8 है उस पर आने वाली तीन अन्य संख्याओं का योगफल 10 होना चाहिए। चूँकि $3 + 4 + 5 > 10$ है, इसलिए उस भुजा पर सबसे छोटी संख्या 2 होगी। अब उस भुजा पर आने वाली शेष 2 संख्याओं का योगफल 8 होना चाहिए। इसको हासिल करने की एक ही सम्भावना है, जो कि $3 + 5$ है। इस प्रकार जिस भुजा पर 8 है उस पर आने वाली संख्याएँ हैं {2, 3, 5, 8}। इसका मतलब है कि दूसरी भुजा पर {1, 4, 6, 7} संख्याएँ आएँगी। ध्यान दीजिए कि जब 1 और 8 अलग-अलग भुजाओं पर होते हैं, तब शेष संख्याओं को दोनों भुजाओं पर जमाने का केवल एक ही तरीक़ा है।

तो, जब V की बीच की संख्या 9 है तब कुल $3 + 1 = 4$ सम्भावनाएँ हैं। इसलिए जब V की बीच की संख्या 1 है, तब भी 4 सम्भावनाएँ होंगी।

अब उस स्थिति पर विचार करते हैं जब बीच की संख्या 7 है। तब प्रत्येक भुजा में संख्याओं का योगफल (45 − 7)/2 = 19 होगा। क्योंकि योगफल एक विषम संख्या है, इसलिए प्रत्येक भुजा में विषम संख्याओं की संख्या भी विषम होनी चाहिए। चूँकि हमारे पास 4 विषम संख्याएँ {1, 3, 5, 9} उपलब्ध हैं इसलिए एक भुजा पर तीन विषम संख्याएँ होनी चाहिए और दूसरी पर एक ही विषम संख्या होनी चाहिए। समूह {1, 3, 5, 9} से 3 विषम संख्याओं को चुनने की 4 सम्भावनाएँ हैं। अगर 1, 3, 5 को चुनते हैं तो उस भुजा पर चौथी संख्या 10 ही चुननी पड़ेगी, जिसको स्वीकार नहीं किया जा सकता है। तो यह विकल्प तो उपलब्ध नहीं है। बाक़ी तीनों विकल्प मान्य हलों की ओर ले जाते हैं :

चुनी हुई 3 संख्याएँ	**V के लिए हल**
{1, 3, 9}	{1, 3, 9, 6} | {7} | {2, 4, 5, 8}
{1, 5, 9}	{1, 5, 9, 4} | {7} | {2, 3, 6, 8}
{3, 5, 9}	{3, 5, 9, 2} | {7} | {1, 4, 6, 8}

जब बीच की संख्याएँ 3 और 7 हैं, तब यह प्रत्येक के लिए तीन-तीन सम्भावनाएँ देता है।

अन्तत: अब हम उस स्थिति पर विचार करते हैं जब बीच की संख्या 5 है। तब प्रत्येक भुजा में संख्याओं का योगफल (45 − 5)/2 = 20 होगा। चूँकि योगफल एक सम संख्या है इसलिए प्रत्येक भुजा पर विषम संख्याओं की संख्या भी सम होनी चाहिए। उपलब्ध विषम संख्याएँ {1, 3, 7, 9} हैं। हम सारी विषम संख्याओं को एक ही भुजा पर रख सकते हैं। ऐसा करने से हमें 1 + 3 + 7 + 9 = 20 हल मिलता है। अथवा हम हर भुजा पर दो विषम संख्याएँ रख सकते हैं । अगर {1, 3} एक ही भुजा पर हैं तो उनके साथ दूसरी दो संख्याएँ केवल {7, 9} ही हो सकती हैं। यह हल तो हम ऊपर पहले ही देख चुके हैं। इसलिए हम इस सम्भावना पर विचार नहीं करेंगे। दो और सम्भावनाएँ हैं जो कि मान्य हल देती हैं। यदि {1, 7} एक ही भुजा पर हैं, तब दो अन्य संख्याएँ केवल {4, 8} ही हो सकती हैं। इस स्थिति में दूसरी भुजा पर {3, 9, 2, 6} संख्याएँ होंगी। अन्त में यदि {1, 9} एक ही भुजा पर हैं, तब अन्य दो संख्याएँ सम होंगी जो कि {4, 6} या {2, 8} हो सकती हैं। इस तरह इस सम्भावना से दो मान्य हल मिलते हैं। इस प्रकार जब बीच की संख्या 5 है तब कुल 1 + 1 + 2 = 4 सम्भावनाएँ होती हैं।

इस प्रकार हमारे विश्लेषण से कुल 4 + 3 + 4 + 3 + 4 = 18 सम्भावनाएँ बनती हैं।

पुनर्व्यवस्था को ध्यान में रखते हुए, दी गई शर्तों के अनुसार, V के स्थानों को भरने के तरीक़ों की संख्या है

$2.\ (4!)^2.\ 18 = 20736$

References

[1] Math Space, "Summing V" from https://azimpremjiuniversity.edu.in/SitePages/resources-ara-vol-9-no-6-march-2020-summing-V.aspx

---

हरण मौली पीएसएसबी समूह के स्कूल में कक्षा ग्यारहवीं के छात्र हैं। वह गणित के प्रति ख़ासे उत्साहित रहते हैं और सवालों को हल करने के साथ-साथ गणितीय अवधारणाओं, विशेष रूप से संख्या-सिद्धान्त, को सीखने व उन पर चर्चा करने में रुचि रखते हैं। उनको गणित पढ़ाना अच्छा लगता है और वह गणित में रुचि रखने वाले हाई स्कूल के विद्यार्थियों का मार्गदर्शन करने के लिए स्वैच्छिक रूप से *रैज़िंग अ मैथमैटिशियन फ़ाउंडेशन* से जुड़े हैं। उनसे mouliharan@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : रिद्धि अग्रवाल
पुनरीक्षण एवं कॉपी-एडीटिंग : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही