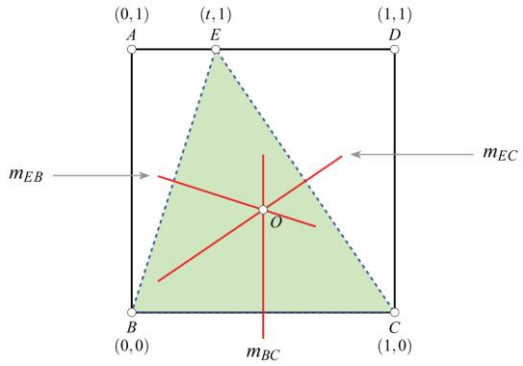
Translation of Solution to the 'Origamics' Problem : Shiv Gaur, Swati Sircar & Shailesh Shirali From Azim premji University At Right Angles Vol.3, No.3, November 2014

'ओरिगैमिक्स (Origamics)' समस्या का हल

शिव गौर, स्वाती सरकार, शैलेष शिराली

इस नोट में हम 'ओरिगैमिक्स (Origamics)' लेख (At Right Angles नवम्बर 2013) के अवलोकनों पर स्पष्टीकरण प्रदान कर रहे हैं। निम्नलिखित अवलोकन किए गए थे : (a) X क्रीज़ों (मोड़ों) के प्रतिच्छेद बिन्दु वर्ग की उर्ध्वाधर मध्य रेखा पर हैं। (b) X क्रीज़ों के प्रतिच्छेद बिन्दु वर्ग के केन्द्र के नीचे एक छोटी दूरी में बदलते रहते हैं। (c) प्रतिच्छेद बिन्दु को किनोर के आरम्भ बिन्दु से जोड़ने वाली रेखाएँ और दो नीचे के शीर्षों से जोड़ने वाली रेखाएँ, लम्बाई में बराबर हैं। इनमें से (a) और (b) आसानी से समझाए जा सकते हैं, जबकि (c) को समझाना कठिन है।



चित्र-1

चित्र-1 में, ABCD एक वर्गाकार शीट है, बिन्दु E वर्ग की ऊपरी भुजा पर एक बिन्दु है जिसे क्रमशः बिन्दु B और बिन्दु C तक मोड़ा जाता है। मोड़ की रेखाओं (क्रीज़) को लाल रेखाओं से दर्शाया गया है। रेखाखण्ड EB और EC मूल शीट पर नहीं दिखते हैं परन्तु हमने इन्हें खींचा है (बिन्दुदार नीली रेखाएँ), जो ∆EBC बनाती हैं। यह स्पष्ट होना चाहिए कि X क्रीज़ें ∆EBC की भुजाओं EB और EC की लम्ब-समद्विभाजक हैं। ये दो रेखाएँ अनिवार्य रूप से त्रिभुज की तीसरी भुजा BC के लम्ब-समद्विभाजक पर मिलती हैं। यह अवलोकन (a) और (c) की व्याख्या करता

है : कि क्यों X रेखाएँ वर्ग की मध्य-रेखाओं पर मिलती हैं और क्यों रेखाओं का संगम बिन्दु E, B, C से समान दूरी पर है क्योंकि यह ∆EBC का परिकेन्द्र है।

(b) को समझाने के लिए, हम निर्देशांक B = (0, 0), C = (1, 0), D = (1, 1), A = (0, 1), E=(t, 1) लेते हैं, जहाँ $0 \leq t \leq 1$ है। EB की प्रवणता 1/t है, इसलिए EB के लम्ब समद्विभाजक की प्रवणता -t है। EB के मध्य बिन्दु के निर्देशांक (t/2, 1/2) हैं। अतः EB के लम्ब समद्विभाजक (चित्र-1 में रेखा m_{EB}) का समीकरण $y - ½ = -t (x - t/2)$ है।

BC के लम्ब समद्विभाजक का समीकरण (**चित्र-1** में रेखा m_{BC}) का समीकरण $x = 1/2$ है। माना m_{EB} और m_{BC} बिन्दु O = (u, v) पर मिलते हैं, ज़ाहिर है, यह बिन्दु ∆EBC का परिकेन्द्र है। चूँकि, $u = 1/2$ है, इसलिए

$v = ½ - t (1/2 - t/2) = ½ - t (1 - t)/2$

चूँकि, $0 \leq t \leq 1$ है, अतः $t (1 - t)$ का $0 \leq t \leq 1$ परास में अधिकतम और न्यूनतम मान क्रमशः ¼ (जब $t = 1/2$ है) और 0 (जब $t = 0$ और $t = 1$ है)। यह देखने के लिए कि अधिकतम मान ¼ क्यों है, यह देखें कि

$$t (1 - t) = t - t^2 = ¼ - (t - 1/2)^2 \leq 1/4$$

यहाँ मान तभी बराबर होते हैं जब $t = ½$ है।

अतः v का मान ½ - ½ . ¼ और ½ के बीच स्थित है, अर्थात

$$3/8 \leq v \leq ½$$

अतः O एक रेखाखण्ड पर चलता है जिसके अन्तिम बिन्दु के निर्देशांक (1/2, 3/8) और (1/2, 1/2) हैं। यह छोटा रेखाखण्ड O का बिन्दुपथ है।

टिप्पणी : ऊपर दी गई व्युत्पत्ति दिखाती है कि व्यंजक t(1-t), $t = ½$ के सापेक्ष सममित है। इसे देखने का एक अन्य तरीक़ा यह है कि यदि t को (1 - t) में बदला जाए तो व्यंजक t (1 - t) में कोई बदलाव नहीं होता है (दोनों गुणनखण्ड के केवल स्थान परिवर्तित हो जाते हैं)। इस सममिति का ज्यामितीय व्यंजक इस प्रकार है : यदि हम पूरी संरचना को वर्ग की मध्यरेखा (रेखा m_{BC}) पर परावर्तित करते हैं, तो त्रिभुज EBC एक ऐसे त्रिभुज पर मैप होता है जो स्वयं के सर्वांगसम है, अतः इसका परिकेन्द्र BC से उतनी ही ऊँचाई पर होता है जितना कि पहले था।

दो और बिन्दुपथ : त्रिभुज EBC के अन्तःकेन्द्र I और त्रिभुज EBC के लम्ब केन्द्र H द्वारा बनाए गए दो और बिन्दुपथ के बारे में जानना रोचक होगा। दूसरे बिन्दुपथ का आसानी से पता लगाया जा सकता है। जब E = (t, 1) है, तब शीर्ष E और C खींचे जाने वाले लम्ब क्रमशः हैं :

$$x = t,\ y = -t\ (x - 1)$$

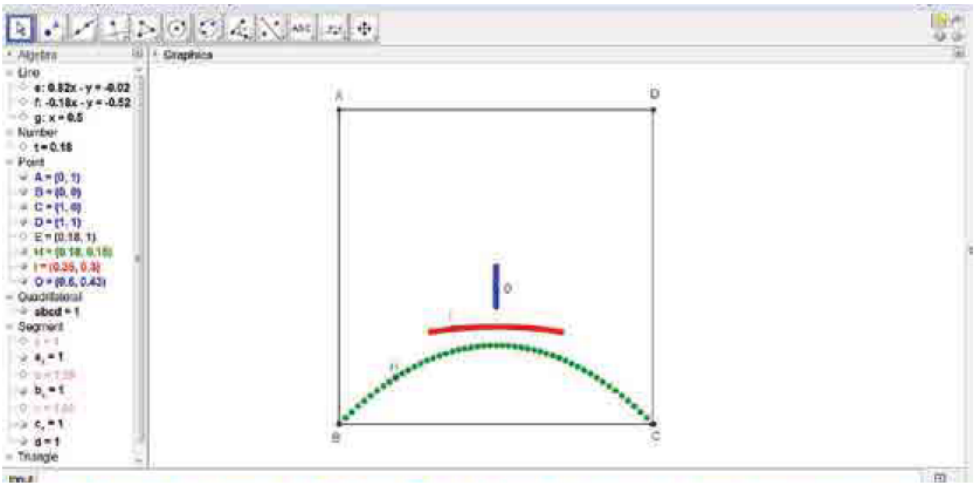
इन्हें हल करने पर, हमें $H = (t, t - t^2)$ मिलता है। अतः H एक परवलय पर चलता है जिसके अन्त बिन्दु B और C हैं, जिसका उच्चतम बिन्दु वर्ग के मध्यरेखा पर ¼ ऊँचाई पर है।

I का बिन्दुपथ एक कम परिचित वक्र है। शीर्ष के निर्देशांकों के पदों में अन्तःकेन्द्र के निर्देशांकों के लिए सदिश सूत्र का उपयोग करने पर, हम पाते हैं कि जब E = (t, 1) है, तब I के निर्देशांक [x(t), y(t)] हैं, जहाँ

$$x(t) = \frac{t + \sqrt{1 + t^2}}{1 + \sqrt{1 + t^2} + \sqrt{1 + (1 - t)^2}},$$

$$y(t) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + t^2} + \sqrt{1 + (1 - t)^2}}.$$

जियोजेब्रा का नीचे दिखाया गया स्क्रीनशॉट (**चित्र-2**) तीनों बिन्दुपथ दर्शा रहा है।



चित्र-2 : तीन बिन्दुपथ

विस्तार का एक सुझाव : यह गतिविधि एक आयताकार काग़ज़ के साथ भी की जा सकती है। आयताकार काग़ज़ के साथ इसे करने का प्रयास करें पहले बिन्दु E को छोटी भुजा पर और फिर बड़ी भुजा पर लें। साथ ही इसका प्रयास एक लम्बे और पतले आयत के साथ करें अर्थात एक A4 आकार के काग़ज़ को उसकी छोटी भुजा पर आधा कर बनने वाले आयत के साथ। यह जाँच करें कि क्या आपको ऊपर वर्णित विवरण के समान संरचना मिलती है।

एक दिलचस्प प्रश्न : एक आयत के ऐसे आयाम ज्ञात कीजिए जिनके लिए बिन्दु O काग़ज़ के बाहर हो। (इस परिस्थिति में शीट के मोड़ शीट पर नहीं मिलेंगे। a और b भुजाओं वाले एक आयत के लिए बीजगणितीय गणनाओं (ऊपर की गईं) में बदलाव करें और यह जाँच करें कि a = b = 1 के लिए की गई गणनाओं से क्या ऊपर दिए सूत्र प्राप्त होते हैं।

अनुवाद : संजय गुलाटी **अनुवाद पुनरीक्षण :** सुशील जोशी
कॉपी-एडिटर : अनुज उपाध्याय (एकलव्य फ़ाउण्डेशन) **सम्पादन :** राजेश उत्साही